Geometria

MATERIAL PREPARADO PELOS PROFESSORES:

RODOLFO AYALA LOPES COSTA

SAUL DELABRIDA

Transformações Geométricas

Fundamentais

- Translação
- Escala
- Rotação

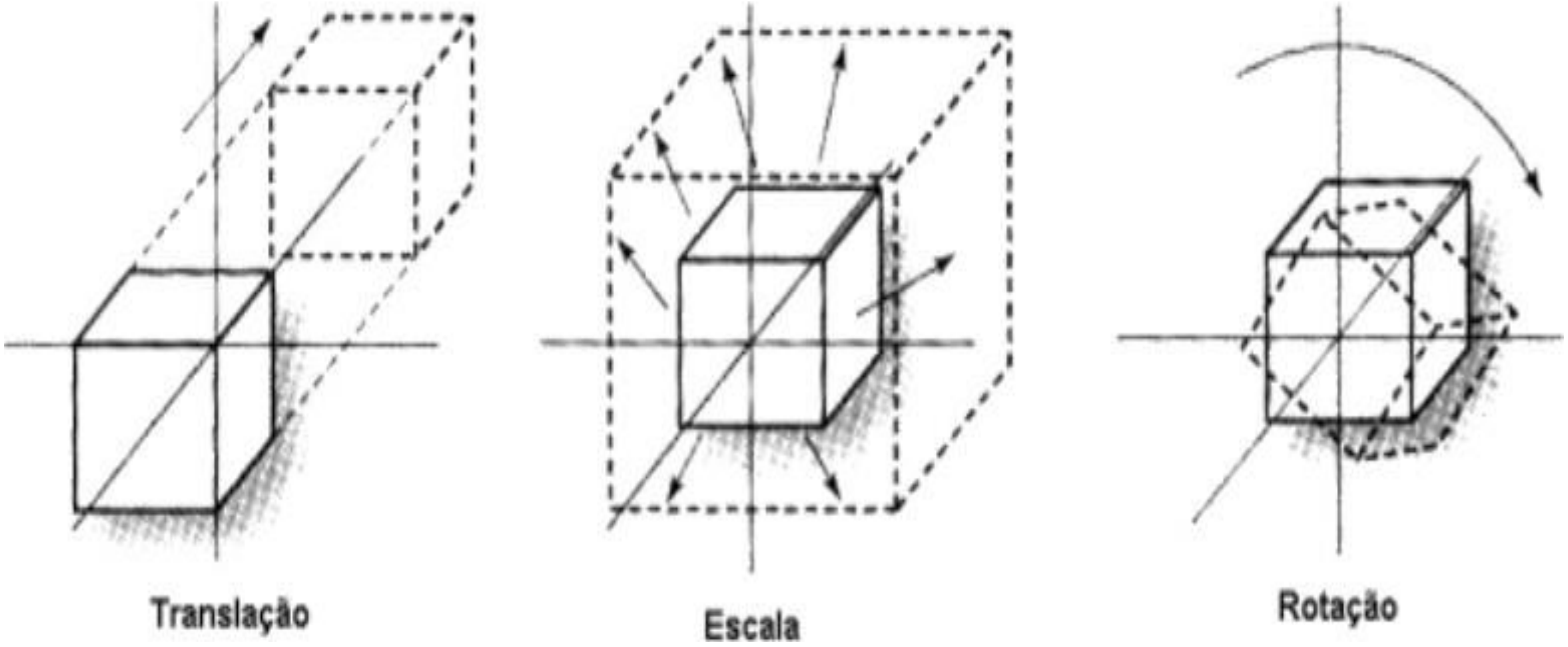
Outras

- Reflexão
- Ciscilhamento

Transformações Geométricas

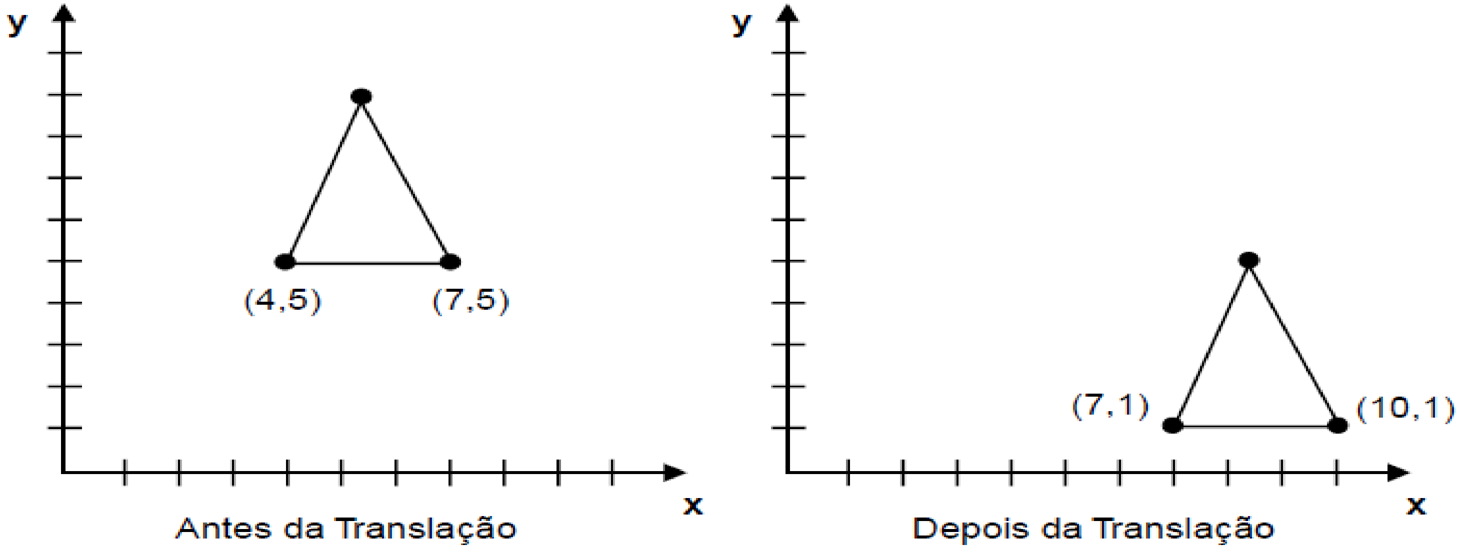
- São operações que podem alterar algumas características do objeto a ser desenhado
- Permitem representar um objeto em diversas posições no espaço
- Importante nas aplicações de computação gráfica, principalmente, na computação gráfica interativa
- Transformações geométricas podem ser representadas por equações

Transformações Geométricas



Translação

- Transladar significa movimentar o objeto. Transladamos um objeto transladando todos os seus pontos
- É possível efetuar a translação de pontos no plano (*x*, *y*) adicionando quantidades às suas coordenadas
- Cada ponto em (*x*, *y*) pode ser movido por *Tx* unidades em relação ao eixo *x*, e por *Ty* unidades em relação ao eixo *y*



Translação

Plano (2D)

A nova posição do ponto (x, y) passa a ser (x^j, y^j), que pode ser escrito como:

$$x^j = x + Tx$$

$$y^j = y + Ty$$

Espaço (3D)

O mesmo ocorre para um ponto definido em 3D, a nova posição do ponto (x, y, z) passa a ser (x^j, y^j, z^j), que pode ser escrito como:

$$x^j = x + Tx$$

$$y^j = y + Ty$$
$$z^j = z + Tz$$

Translação

Notação Matricial

$$[x^j, y^j, z^j] = [x, y, z] + [Tx, Ty, Tz]$$

Posição Final   Posição Atual   Matriz de Translação

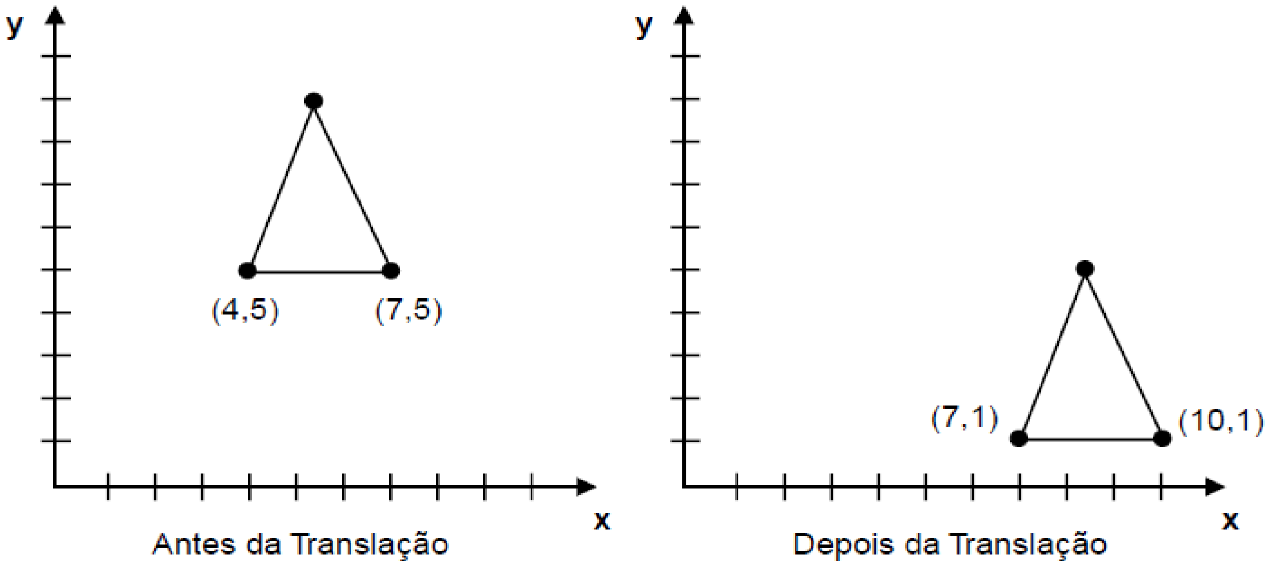
Translação Exemplo

T = [3,-4]
P1 = [4,5]
P2= [7,5]
P3 = [5.3,9]

P1’= [4,5]+[3,-4]
P1’= [7,1]

P2’=[7,5]+[3,-4]
P2’= [10,1]

P3’=?



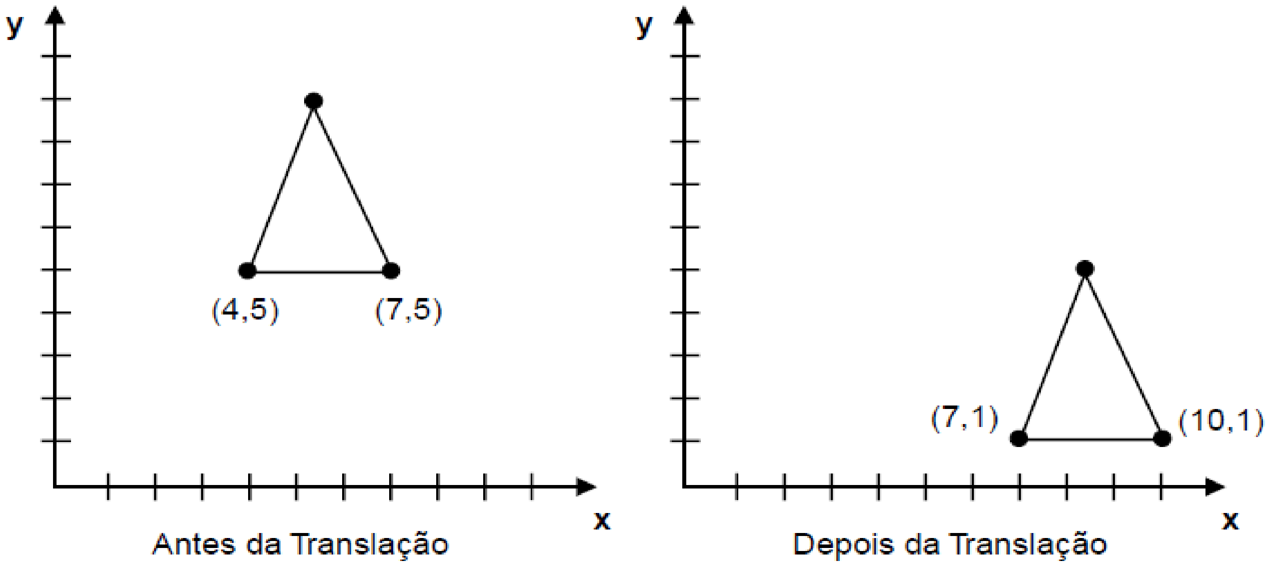
Translação Exemplo

T = [3,-4]
P1 = [4,5]
P2= [7,5]
P3 = [5.3,9]

P1’= [4,5]+[3,-4]
P1’= [7,1]

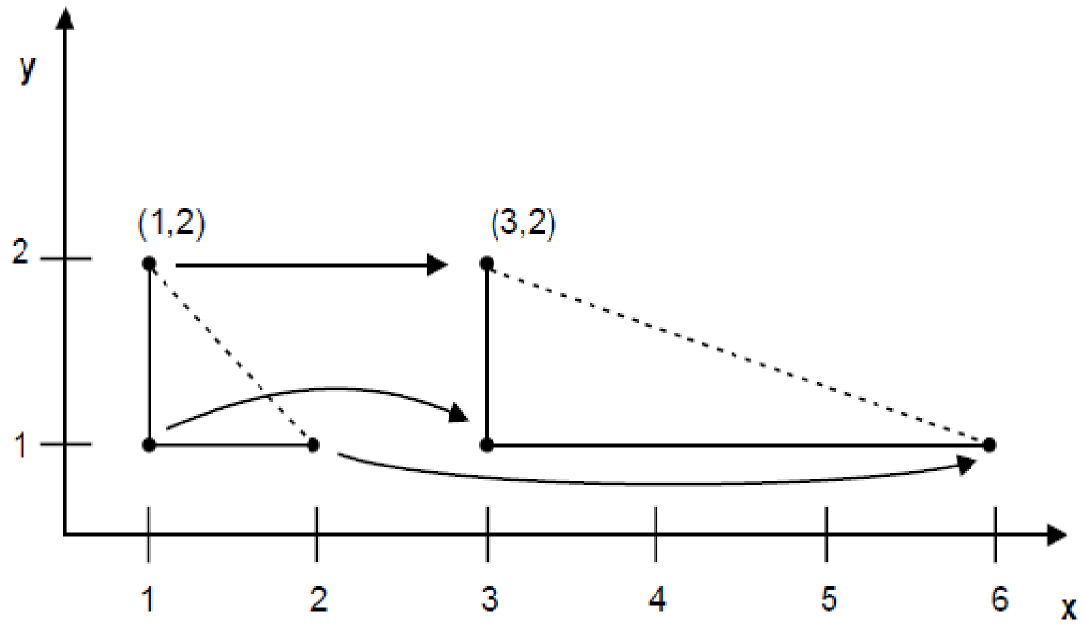
P2’=[7,5]+[3,-4]
P2’= [10,1]

P3’=[5.3,9]+[3,-4]
P3’ = [8.3,5]



Escala

- Redimensiona o objeto
- Os valores das coordenadas de cada ponto é modificado a partir da multiplicação por fatores de escala



Escala

Plano (2D)

Formulação matemática:

$$x^j = x * S_x$$
$$y^j = y * S_y$$

Espaço (3D)

Formulação matemática:

$$x^j = x * S_x$$
$$y^j = y * S_y$$
$$z^j = z * S_z$$

Escala

Notação Matricial

$$[x', y', z'] = [x, y, z] * \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{bmatrix}$$

Pontos Resultantes

Pontos originais

Matriz de Escala

$$[(x * S_x + y*0 + z*0), (x*0 + y * S_y + z*0), (x*0 + y*0 + z * S_z)]$$

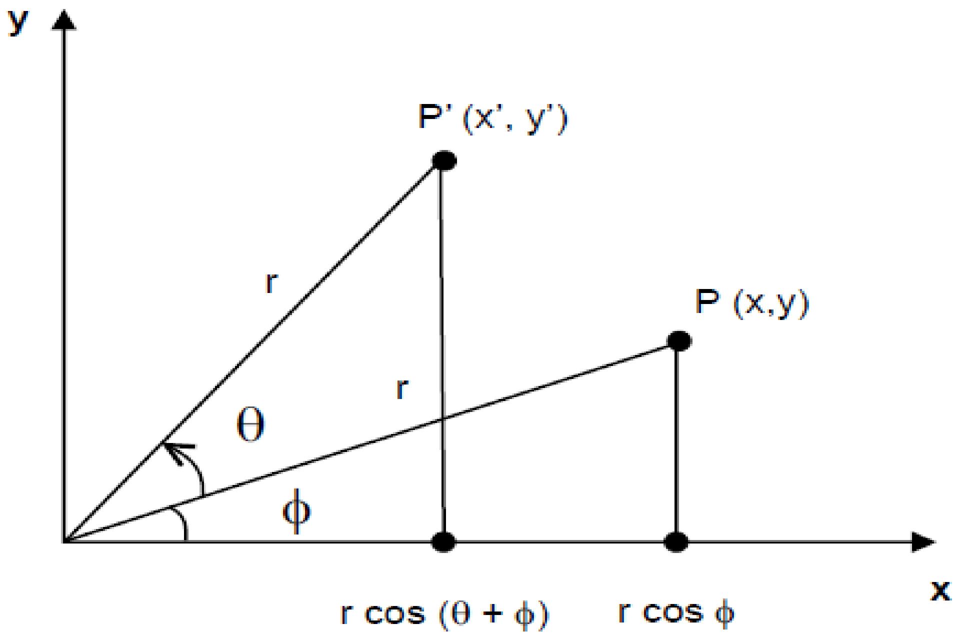
Escala

De acordo com os valores atribuídos a Sx e Sy podem ocorrer as seguintes situações:

- Se $S_x, S_y > 1$ – objeto será ampliado
- Se $S_x, S_y < 1$ – objeto será reduzido
- Se $S_x = S_y$ – objeto manterá proporções relativas em x e y
- Se $S_x <> S_y$ – objeto será deformado

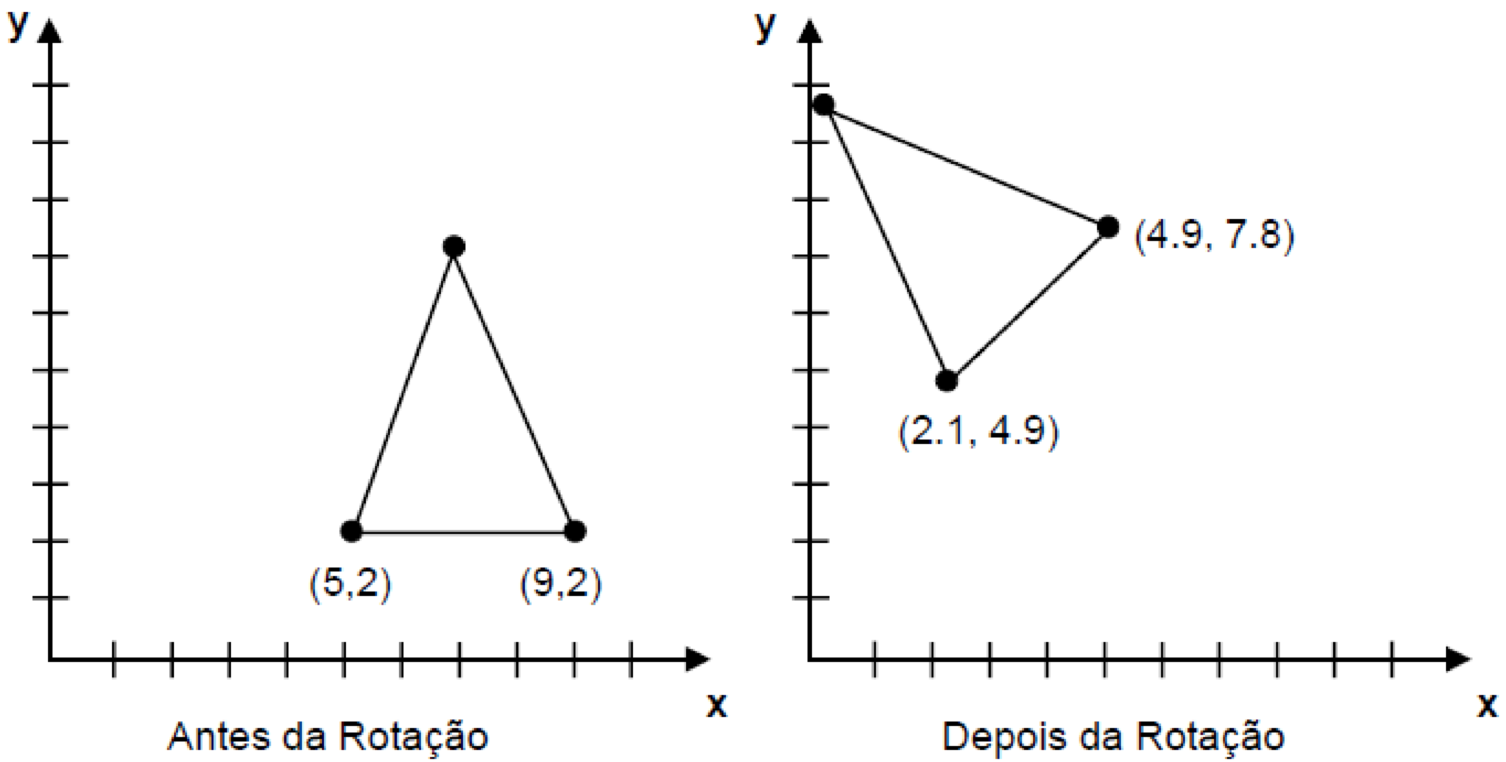
Rotação

- Rotacionar significar girar o objeto
- Exemplo de rotação de um ponto P em torno da origem, passando para a posição P’



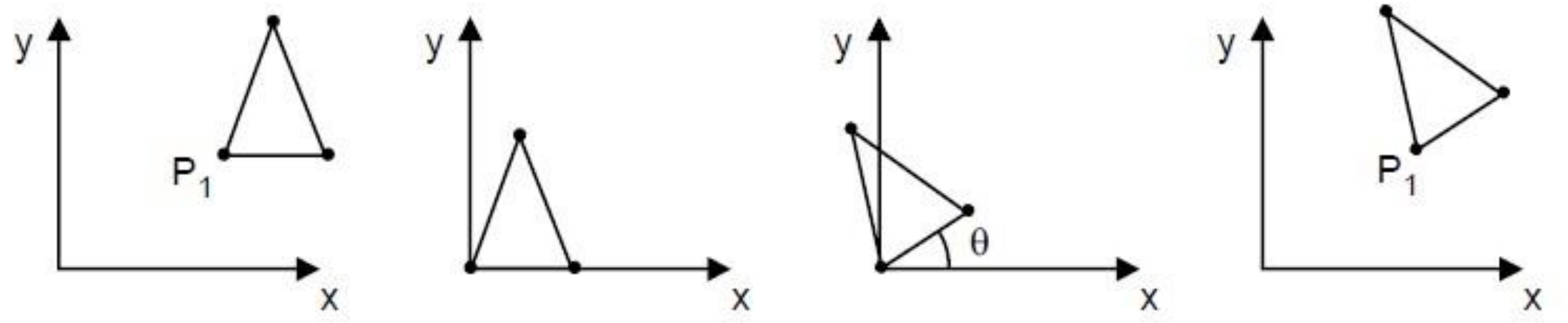
Rotação

Se o objeto não estiver definido na origem, ocorrerá também uma translação



Rotação

Para evitar o efeito da translação durante a rotação:



Objeto Original	Depois da Translação de P_1 à origem	Após Rotação	Após Translação que retorna a posição original

Rotação

Formulação matemática para Plano (2D):

$$x^j = x * cos(\theta) - y * sen(\theta)$$

$$y^j = y * cos(\theta) + x * sen(\theta)$$

Rotação

Notação Matricial

$$[x', y'] = [x, y] * \begin{pmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Pontos Resultantes

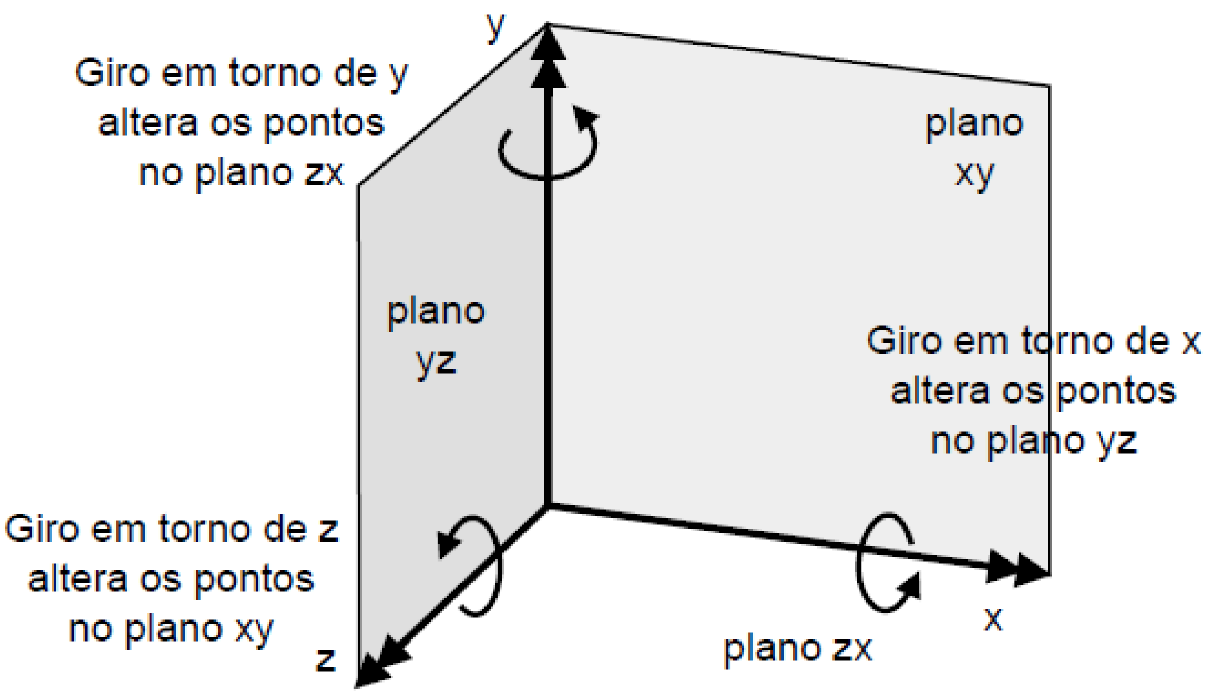
Pontos Originais

Matriz de rotação xy por um ângulo θ

$[(x * cos(\theta) - y * sen(\theta)), (x * sen(\theta) + y * cos(\theta)]$

Rotação – Espaço 3D

A rotação ocorre em torno de um dos eixos



Rotação – Eixo x

Espaço (3D):

Uma rotação no **eixo *x* (plano *yz*)**, deixa o eixo *x* inalterado, enquanto as demais são alterados em função do ângulo β

Notação matricial para rotação no **eixo *x*** :

$$[x', y', z'] = [x, y, z] * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\beta) & sen(\beta) \\ 0 & -sen(\beta) & cos(\beta) \end{pmatrix}$$

Rotação – Eixo y

Espaço (3D):

Uma rotação no **eixo** *y* **(plano** *xz* **)**, deixa o eixo *y* inalterado, enquanto as demais são alterados em função do ângulo δ

Notação matricial para rotação no **eixo** *y* :

$$[x', y', z'] = [x, y, z] * \begin{pmatrix} cos(\delta) & 0 & -sen(\delta) \\ 0 & 1 & 0 \\ sen(\delta) & 0 & cos(\delta) \end{pmatrix}$$

Rotação – Eixo z

Espaço (3D):

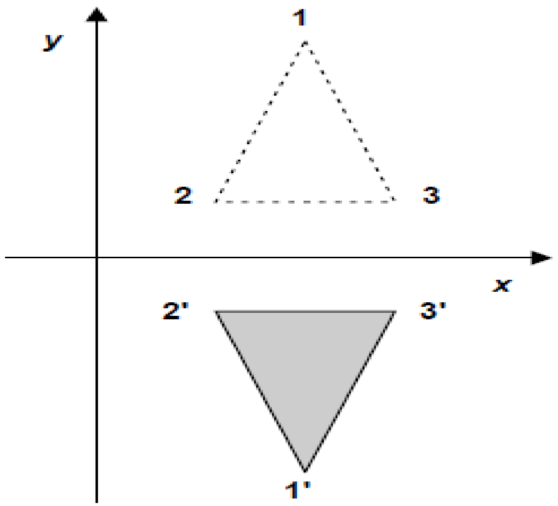
Uma rotação no **eixo *z* (plano *xy*)**, deixa o eixo *z* inalterado, enquanto as demais são alterados em função do ângulo α

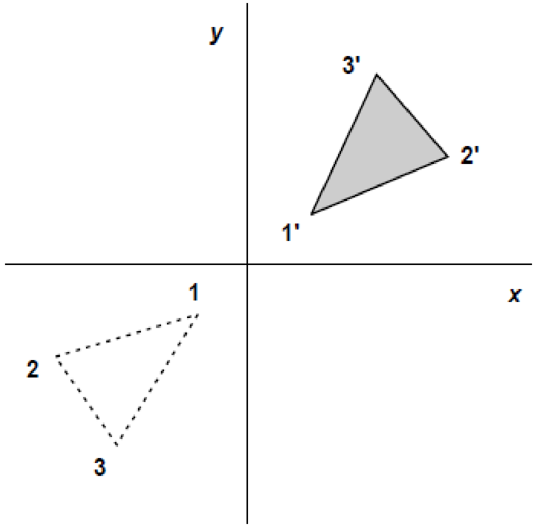
Notação matricial para rotação no **eixo *z*** :

$$[x', y', z'] = [x, y, z] * \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sen(\alpha) & 0 \\ -sen(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reflexão

Conhecida como espelhamento, produz o objeto espelhado





Reflexão

Notação matricial para Plano (2D):

- **Reflexão em x (inversão em y)**

$$[x', y'] = [x, y] * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Reflexão em y (inversão em x)**

$$[x', y'] = [x, y] * \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reflexão

Notação matricial para Plano (2D):

- **Reflexão em x (inversão em y)**

$$[x', y'] = [x, y] * \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \end{array}$$

- **Reflexão em y (inversão em x)**

$$[x', y'] = [x, y] * \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \end{array}$$

Reflexão 3D

Notação matricial para Plano (3D):

- Reflexão no plano xz (inversão em y)

$$[x', y', z'] = [x, y, z] * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- A reflexão para os demais planos seguem a mesma lógica da reflexão 2D