

Aula prática 3

Vetores, Matrizes e Gráficos

Resumo

Nesta aula você irá utilizar vetores para resolver diversos tipos de problemas. Para expressar a solução do problema, você poderá precisar usar operações escalares ou operações vetoriais.

Você vai também aprender um pouco sobre como desenhar gráficos.

Sumário

1	Matrizes	1
1.1	Criando matrizes	1
1.2	Operações com matrizes	3
2	Desenhando Gráficos	6
3	Operações usando matrizes	10
4	Usando vetores e operações vetoriais	12

1 Matrizes

A estrutura fundamental de dados em Scilab é uma **matriz**. Uma matriz é semelhante a uma *tabela*, exceto que uma matriz pode ter qualquer número de dimensões, enquanto uma tabela tem apenas duas dimensões, que usualmente são chamadas de linhas e colunas. Por exemplo, as matrizes A , B e C , dadas a seguir, têm dimensões 1×5 , 3×1 e 3×2 , respectivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 12 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 12 & 5 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

A matriz A , que tem apenas 1 linha, é também chamada de **vetor-linha**, ou simplesmente **vetor**. A matriz B , que tem apenas 1 coluna, é também chamada de **vetor-coluna**.

Em Scilab, o valor denotado por uma variável é sempre uma matriz. Em particular, um valor escalar, tal como 2, 11.3 ou $\%pi$ é visto como uma matriz de dimensão 1×1 .

1.1 Criando matrizes

Enumerando os elementos Os elementos são colocados entre colchetes. Elementos de uma mesma linha são separados por espaço ou vírgula (,), e as linhas são separadas por ponto-e-vírgula (;).

Exemplo:

```
-->A = [ 10, 20, 30, 40; 4, 3, 2, 1; 0.2, 4/10, 0.6, 1-0.8 ]
A =

    10.    20.    30.    40.
     4.     3.     2.     1.
    0.2    0.4    0.6    0.2
```

Valores incrementados linearmente Os elementos de uma linha podem ser especificados por $v_i:i:v_f$, que representa todos os valores de v_i até v_f , em incrementos de i .

Exemplos:

```
-->E = [ 0 : 2 : 8 ]
E =

    0.    2.    4.    6.    8.

-->F = [ 3 : 0.3 : 2*2+1 ]
F =

    3.    3.3    3.6    3.9    4.2    4.5    4.8

-->G = [ -2:2:4 ; 1:-3:-8 ]
G =

    - 2.    0.    2.    4.
     1.   - 2.   - 5.   - 8.
```

Matrizes especiais A função **zeros** cria uma matriz de zeros. A função **ones** cria uma matriz de uns. A função **eye** cria uma matriz diagonal. As dimensões são especificadas pelos argumentos da função.

Exemplos:

```
-->Z = zeros(2, 3)    // matriz 2x3 de zeros
Z =

    0.    0.    0.
    0.    0.    0.

-->O = ones(2, 3)    // matriz 2x3 de uns
O =

    1.    1.    1.
    1.    1.    1.

-->D = eye(3, 4)    // matriz diagonal 3x4
D =

    1.    0.    0.    0.
    0.    1.    0.    0.
    0.    0.    1.    0.
```

Criando matrizes a partir de sub-matrizes Uma matriz podem ser usada para criar uma outra matriz.

Exemplos:

```
-->A = [0:2:6]
A =

    0.    2.    4.    6.

-->B = [A; 1:4]
B =

    0.    2.    4.    6.
    1.    2.    3.    4.
```

1.2 Operações com matrizes

Aplicação de funções a matrizes Funções usuais sobre números, como, por exemplo, as funções `abs`, `sqrt`, `log`, `sin` e `cos`, também podem ser aplicadas a matrizes de valores numéricos. Nesse caso, elas operam sobre cada um dos elementos da matriz, de maneira independente.

Exemplo:

```
-->X = [0, %pi/2, %pi, 3*%pi/2, 2*%pi]
X =

    0.    1.5707963    3.1415927    4.712389    6.2831853

-->Y = sin(X)
Y =

    0.    1.    1.225D-16    - 1.    - 2.449D-16
```

Transposição O operador pós-fixado `'` calcula a transposta de uma matriz.

Exemplo:

```
-->A = [ 1 8 9 5; 2 3 4 0 ]
A =

    1.    8.    9.    5.
    2.    3.    4.    0.

-->A'
ans =

    1.    2.
    8.    3.
    9.    4.
    5.    0.
```

Operações entre matrizes e escalares Os operadores aritméticos abaixo podem ser usados para realizar uma operação aritmética entre um escalar k e cada elemento de uma matriz A .

Nos exemplos apresentados na tabela, considere que M é a matriz $[2, 4, 6; 5, 3, 1]$:

operação	descrição	exemplo
$k + A$ $A + k$	adição	$M + 2 = [4, 6, 8; 7, 3, 1]$
$k - A$ $A - k$	subtração	$M - 1 = [1, 3, 5; 4, 2, 0]$
$k * A$ $A * k$	multiplicação	$M * 2 = [4, 6, 8; 7, 3, 1]$
A / k $k ./ A$	divisão	$M / 2 = [1, 2, 3; 2.5, 1.5, 0.5]$ $2 ./ M = [1., 0.5, 0.333; 0.4, 0.6666, 2.]$
$k .^A$ $A .^ k$	potenciação	$M .^2 = [4, 16, 36; 25, 9, 1]$ $2 .^M = [4, 16, 64; 32, 8, 2]$

Exemplo:

```
-->m = [3:6; 3:-1:0]
m =

    3.    4.    5.    6.
    3.    2.    1.    0.

-->(m.^2 - 1) / 2
ans =

    4.    7.5    12.    17.5
    4.    1.5     0.    - 0.5
```

Operações matriciais elemento a elemento Os operadores aritméticos abaixo podem ser usados para realizar uma operação aritmética entre duas matrizes A e B de mesma dimensão, *elemento a elemento*.

Nos exemplos apresentados na tabela, considere que M e N são as seguintes matrizes: $M = [2, 4, 6; 5, 3, 1]$ e $N = [1, 2, 3; 4, 5, 6]$

operação	descrição	exemplo
$A + B$	adição	$M + N = [3, 6, 9; 9, 8, 7]$
$A - B$	subtração	$M - N = [1, 2, 3; 1, -2, -5]$
$A .* B$	multiplicação	$M .* N = [2, 8, 18; 20, 15, 6]$
$A ./ B$	divisão	$M ./ N = [2., 2., 2.; 1.25, 0.6, 0.1666]$
$A.^B$	potenciação	$M.^N = [2, 16, 729; 1024, 125, 6]$

Exemplo:

```
-->A = [3:6; 3:-1:0]
A =

    3.    4.    5.    6.
    3.    2.    1.    0.

-->B = [0:3; 1 5 2 0]
B =

    0.    1.    2.    3.
    1.    5.    2.    0.

-->C = 2*eye(2, 4)
C =

    2.    0.    0.    0.
    0.    2.    0.    0.

-->A.^B + A.*C
ans =

    7.    4.    25.    216.
    3.    36.    1.    1.
```

Operações matriciais Além da adição ($A + B$) e da subtração ($A - B$), descritas anteriormente, estão também definidos outros operadores matriciais, relacionados na tabela a seguir. Nas operações $A * B$ e A / B , as matrizes A e B devem ser de dimensões $(n \times k)$ e $(k \times n)$, respectivamente. Na operação $A.^k$, onde k é um escalar, a matriz A deve ser uma matriz quadrada, isto é, de dimensão $(n \times n)$, e $A.^k$ é o mesmo que $A * A * \dots * A$.¹ Nos exemplos da tabela a seguir, considere que $M = [4 \ 5; 5 \ 4]$ e $N = [1, 2; 3, 4]$.

¹Não confundir esta operação com a operação $A.^k$, que significa elevar cada um dos elemento de A a k

operação	descrição	exemplo
$A * B$	multiplicação	$M * N = [14, 13; 32, 31]$
A / B	divisão	$M / N = [-0.5, 1.5; -4, 3]$
$A ^ k$	exponenciação	$M ^ 6 = [7, 10; 15, 22]$

Exemplo:

```
-->A = [ 1 , 2; 3, 4 ]
A =

    1.    2.
    3.    4.

-->B = [2, 2; 1, 0]
B =

    2.    2.
    1.    0.

-->C = A * B
C =

    4.    2.
   10.    6.

-->D = A ^ 2 // D = A * A
D =

    7.    10.
   15.    22.

-->E = B^-1 // E = inversa de B
E =

    0.    1.
   0.5   -1.

-->B * B^-1 // o produto de uma mat. pela sua inversa é a mat. identidade
ans =

    1.    0.
    0.    1.
```

Algumas funções úteis sobre matrizes

função	descrição
$n = \text{length}(A)$	número de elementos da A
$[l, c] = \text{size}(A)$	número de linhas e colunas de A
$s = \text{sum}(A)$	soma dos elementos de A
$s = \text{prod}(A)$	produto dos elementos de A
$s = \text{mean}(A)$	média dos elementos de A

Exemplo:

```
-->A = [ 1 8 9 5; 2 3 4 0 ]
A =

    1.    8.    9.    5.
    2.    3.    4.    0.

-->[linhas,colunas] = size(A)
colunas =

    4.
linhas =

    2.

-->sum(A)
ans =

    32.
```

2 Desenhando Gráficos

Para desenhar um gráfico de uma maneira simples, siga os passos seguintes:

1. É bom limpar a janela de gráficos (também chamada janela de figuras) antes de começar a construir um novo desenho. Para tanto use o comando `clf`.
2. Defina um vetor² contendo as abscissas dos pontos a serem plotados. A notação de progressão aritmética pode ser usada, indicando o limite inferior, a razão, e o limite superior.

Exemplo:

```
// vetor linha formado pelas abscissas dos pontos a serem plotados
x = [-%pi : 0.2 : %pi];
```

3. Calcule o vetor de valores das ordenadas dos pontos a serem plotados. Pode-se usar operações aritméticas ou funções com vetores para construir este vetor a partir do vetor das abscissas.

Exemplo:

```
// vetor linha formado pela aplicação da função
// f(x) = x * sin(x) - x^3 / (2*pi)
// a cada elemento do vetor das abscissas
y = x .* sin(x) - x.^ 3 / (2*pi);
```

4. Para desenhar o gráfico, use a função `plot`, passando o vetor das abscissas e o vetor das ordenadas como argumentos. Pode-se desenhar vários gráficos ao mesmo tempo. Para cada gráfico use dois vetores (abscissas e ordenadas).

A função `title` permite dar um título ao desenho.

As funções `xlabel` e `ylabel` podem ser usadas para rotular os eixos do desenho.

A função `legend` coloca legendas nos gráficos desenhados.

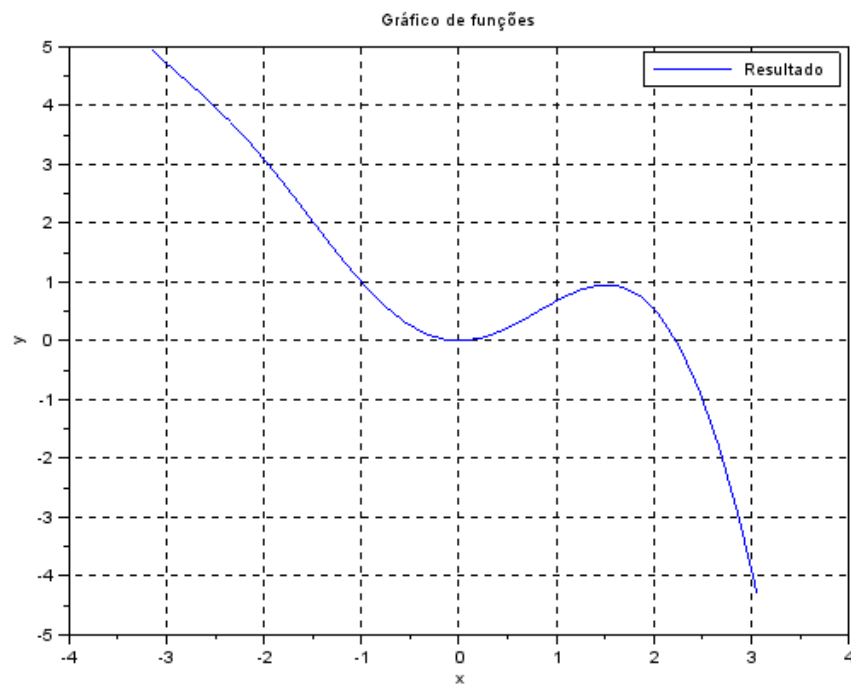
A expressão `set(gca(), 'grid', [1 1])` desenha uma grade.

²Vetores são matrizes unidimensionais. Um vetor linha é uma matriz contendo somente uma linha. Um vetor coluna é uma matriz contendo somente uma coluna.

Exemplo:

```
// desenha o gráfico
plot(x, y);
title("Gráfico de funções");
xlabel("x");
ylabel("y");
legend("Resultado");
set(gca(), "grid", [1 1]);
```

A seguir temos o desenho produzido por este exemplo.



Observação: O comando `figure` pode ser usado para alocar janelas distintas para gráficos desenhados em programas. Por exemplo, você poderá desenhar os dois gráficos, cada um em uma janela, do seguinte modo:

```
figure(1);
// inclua aqui os comandos para plotar o gráfico da janela 1
figure(2);
// inclua aqui os comandos para plotar o gráfico da janela 2
```

Tarefa 1: Posição e velocidade de uma bola (exercício 2.10)

Se uma bola estacionária é lançada da altura h_0 acima da superfície da Terra, com velocidade vertical v_0 , a posição e a velocidade da bola como função do tempo serão dadas pelas equações

$$h(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$$

$$v(t) = gt + v_0$$

onde g é a aceleração da gravidade ($-9,8m/s^2$), h é a altura acima da superfície da Terra (assumindo ausência de atrito do ar) e v é a componente vertical da velocidade.

Escreva um programa que solicite ao usuário a altura inicial da bola em m e a velocidade de lançamento da bola em m/s , depois desenhe a altura e velocidade em função do tempo.

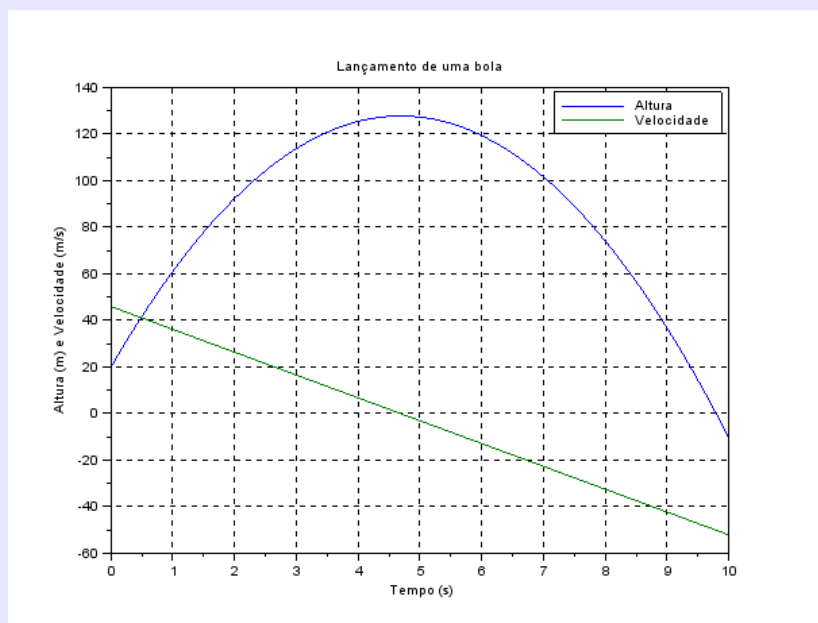
Não deixe de incluir as legendas apropriadas no seu desenho.

Exemplo de execução da aplicação

Lançamento de uma bola

altura inicial da bola (m): 20

velocidade de lançamento da bola (m/s): 46



Solução:

```

clc;      // limpa a janela do console
clf;      // limpa a janela de desenho
clear;    // limpa as variáveis do ambiente de trabalho

// entrada de dados
printf("Lançamento de uma bola\n");
printf("-----\n");
h0 = input("altura inicial da bola (m): ");
v0 = input("velociade de lançamento da bola (m/s): ");

// cálculos
g = -9.81;
t = [0 : 0.2 : 10];
h = 0.5 * g * t.^ 2 + v0 .* t + h0;
v = g .* t + v0;

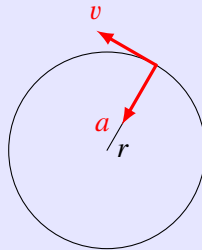
// desenho do Gráfico
title("Lançamento de uma bola");
xlabel("Tempo (s)");
ylabel("Altura (m) e Velocidade (m/s)");
legend("Altura", "Velocidade");
set(gca(), "grid", [1 1]);
plot(t, h, t, v);

```

3 Operações usando matrizes

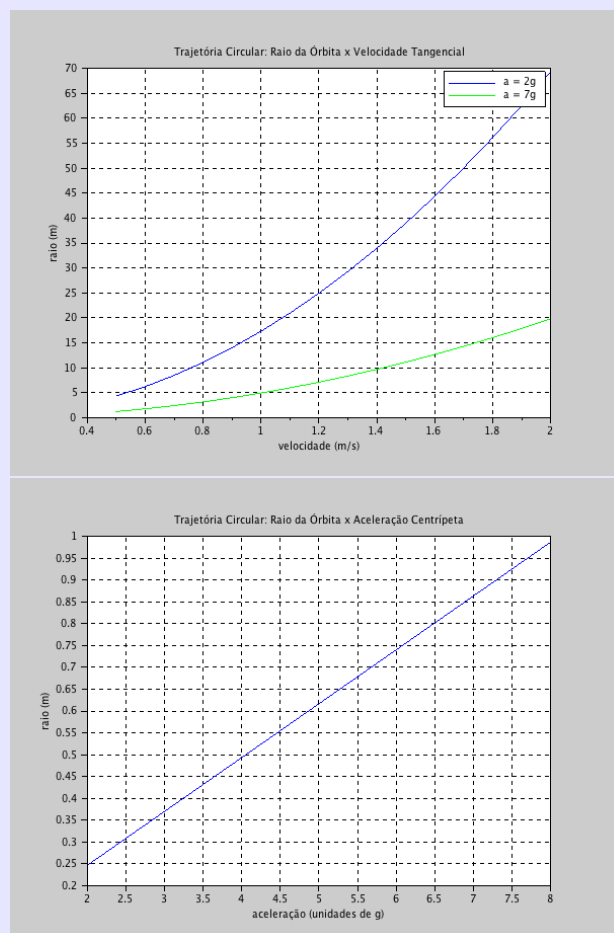
Tarefa 2: Objeto movendo-se em trajetória circular (exercício 2.20)

Um objeto movendo-se em trajetória circular é apresentado na figura a seguir, onde r é o raio da trajetória (em m), v é a velocidade tangencial do objeto (em m/s), e a é a sua aceleração centrípeta (em m/s^2), dada pela equação $a = v^2/r$



Considere que a aceleração gravitacional é $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ e que a velocidade do som – ou 1 Mach – é 340 m/s. Escreva um programa Scilab para traçar os gráficos mostrados abaixo, relativos à trajetória circular de uma aeronave:

1. Desenhe o gráfico da velocidade versus raio da trajetória, para valores de velocidade variando de 0,5 a 2,0 Mach, em intervalos de 0,1 Mach, supondo que a aceleração a permanece com o valor constante $2g$.
2. Desenhe, na mesma janela, o gráfico de velocidade versus raio da trajetória, para a mesma faixa de valores de velocidade tangencial, supondo que a aceleração é $7g$.
3. Desenhe, em uma outra janela, o gráfico de raio versus aceleração centrípeta, para valores da aceleração de $2g$ a $8g$, em intervalos de $1g$, supondo uma velocidade tangencial de 0,85 Mach.



Solução:

```
clear; clc;

// Trajetória circular EX2.20

// aceleração  $a = v^2/r$ 

// aceleração gravitacional (m/s^2)
g = 9.81;
// velocidade do som (m/s)
Mach = 340;

// Raio versus velocidade tangencial
// vetor de velocidades (fração de Mach)
v = [0.5:0.1:2.0];
// cálculo do raio da trajetória, para  $a=g$ 
r = (v^2*Mach)/g

// gráfico v versus r para  $a = 2g$  e  $a = 7g$ 
figure(1);
clf;
plot(v,r/2);
plot(v,r/7, 'green');
title("Trajetória Circular: Raio da Órbita x Velocidade Tangencial");
xlabel("velocidade (m/s)");
ylabel("raio (m)");
legend("a = 2g","a = 7g");
set(gca(), 'grid', [1 1]);

// Raio versus aceleração, para  $vt = 0.85$  Mach
vt = 0.85;
// vetor de acelerações (unidades de g)
a = [2:8];
r = (vt^2*Mach)/(a*g);
// gráfico de raio versus aceleração
figure(2);
clf;
plot(a,r);
title("Trajetória Circular: Raio da Órbita x Aceleração Centrípeta");
xlabel("aceleração (unidades de g)");
ylabel("raio (m)");
set(gca(), 'grid', [1 1]);
```

4 Usando vetores e operações vetoriais

Tarefa 3: Série de Taylor

O logaritmo natural de um número real z , tal que $0 < z < 2$, pode ser aproximado pela série de Taylor a seguir:

$$\ln(z) = (z - 1) - \frac{(z - 1)^2}{2} + \frac{(z - 1)^3}{3} - \frac{(z - 1)^4}{4} + \dots$$

Em uma aproximação por série, quanto maior o número de termos considerados, mais próximo o valor do somatório estará do valor de $\ln(z)$.

Faça um programa Scilab para calcular e imprimir o valor aproximado do logaritmo de um número real z ($0 < z < 2$), dado pela série de Taylor. O programa deve solicitar ao usuário o valor de z e o número n de termos da série a serem usados no cálculo do logaritmo natural de z .

Dicas:

Encontre o **termo geral** da série: t_i (o i -ésimo termo).

Como t_i pode ser obtido a partir de i ?

Observe que cada termo é uma fração:

- o numerador da fração é uma potência com base $z - 1$ e expoente i .
- o denominador da fração é i .
- o sinal dos termos alternam entre $+1$ e -1 . Este sinal pode ser obtido facilmente usando uma potência de -1 . Lembre-se que -1 elevado a um expoente par sempre resulta em $+1$. Já se o expoente for ímpar o resultado será -1 .

Logo o termo geral da série é

$$t_i = (-1)^{i-1} \times \frac{(z - 1)^i}{i}$$

a partir do qual pode-se obter os termos individuais:

$$t_1 = (-1)^{1-1} \times \frac{(z - 1)^1}{1} = (-1)^0 \times \frac{(z - 1)^1}{1} = 1 \times \frac{z - 1}{1} = z - 1$$

$$t_2 = (-1)^{2-1} \times \frac{(z - 1)^2}{2} = (-1)^1 \times \frac{(z - 1)^2}{2} = -1 \times \frac{(z - 1)^2}{2} = -\frac{(z - 1)^2}{2}$$

$$t_3 = (-1)^{3-1} \times \frac{(z - 1)^3}{3} = (-1)^2 \times \frac{(z - 1)^3}{3} = 1 \times \frac{(z - 1)^3}{3} = \frac{(z - 1)^3}{3}$$

$$t_4 = (-1)^{4-1} \times \frac{(z - 1)^4}{4} = (-1)^3 \times \frac{(z - 1)^4}{4} = -1 \times \frac{(z - 1)^4}{4} = -\frac{(z - 1)^4}{4}$$

$\vdots$

Uma vez conhecido a equação do termo geral da série:

1. Crie um vetor com valores de 1 a n (os índices dos termos da série).
2. Calcule os termos da série usando operações escalares e vetoriais sobre o vetor dos índices.
3. A função `sum` pode ser usada para calcular a soma de todos elementos de uma matriz. Por exemplo, `sum([2, 6, 4, 8])` produz como resultado o valor 20. Use a função `sum` para somar os termos da série.

4. Compare o resultado dado pelo seu programa com o valor calculado por meio da função `log` predefinida em Scilab.

Exemplo de execução da aplicação

```
Cálculo aproximado do logaritmo de z (0<z<2)
-----
Digite um número no intervalo (0-2): 1.3
Digite o número de termos para o cálculo: 8

Valor aproximado do logaritmo de 1.3 = 0.262363
Usando a função predefinida = 0.262364
```

Solução:

```
clear; clc;

// Cálculo aproximado do logaritmo natural pela a série de Taylor
// O logaritmando deve ser um número real z t.q. 0 < z < 2

// Leitura dos dados
printf("Cálculo aproximado do logaritmo de z (0<z<2)\n");
printf("-----\n");

z = input("Digite um número no intervalo (0-2): ");

n = input("Digite o número de termos para o cálculo: ");

// Cálculo do logaritmo
I = 1:n;
LogZ = sum((-1)^(I-1) .* (z-1)^I) ./ I;

// Exibição do resultado
printf("\n");
printf("Valor aproximado do logaritmo de %g = %g\n", z, LogZ);
printf("Usando a função predefinida = %g\n", log(z));
```