

PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE FACILIDADES COM COBERTURA PARCIAL SOB CONDIÇÕES DE INCERTEZA

Fábio Pires Mourão

Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Minas Gerais - IFMG
R. Itaguaçu, 595, Bairro São Caetano, Betim/MG
fabio.mourao@ifmg.edu.br

Elisangela Martins de Sá, Sérgio Ricardo de Souza

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - CEFET-MG
Av. Amazonas, 7.675, Bairro Nova Gameleira, Belo Horizonte/MG
sergio@cefetmg.br, elisangelamartins@cefetmg.br

Marcone Jamilson Freitas Souza

Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP
Campus Universitário, Morro do Cruzeiro, Ouro Preto/MG
marcone@ufop.edu.br

RESUMO

Este trabalho aplica uma abordagem de otimização robusta ao Problema de Localização de Facilidades com Cobertura Parcial. Este problema consiste em, dada uma rede, um conjunto de potenciais instalações e um conjunto de clientes com suas demandas, determinar quais facilidades devem ser instaladas de modo a minimizar o custo total das instalações e garantir o atendimento de uma demanda mínima. Problemas reais de localização, contudo, podem conter incertezas nos dados de entrada, como nas demandas dos clientes e nos custos das instalações. Este trabalho apresenta uma abordagem robusta baseada em conjunto de incertezas poliedrais com restrições de cardinalidade para lidar com incertezas nas demandas dos clientes. Os resultados dos experimentos utilizando instâncias da literatura mostram a ocorrência de grandes variações no custo total das instalações fruto da inserção de incertezas.

PALAVRAS CHAVE. Localização de instalações. Otimização Robusta. Incertezas.

Tópicos: Programação Matemática, Otimização Combinatória.

ABSTRACT

This work applies a robust optimization approach to the Partial Set Covering Localization Problem. This problem consists of determining which facilities should be installed to minimize the total cost of the installations and guarantee the fulfillment of minimum demand, given a network, a set of potential installations, and a set of customers with their demands. Considering that there may be uncertainties in the input data in real location problems, such as customer demands and facility costs, robust models can be used to deal with these uncertainties. This work uses a robust approach based on a set of polyhedral uncertainties with cardinality constraints to deal with uncertainties in customer demands. The results of the experiments using instances from the literature show the occurrence of significant variations in the total cost of the facilities as a result of the insertion of uncertainties.

KEYWORDS. Facility Location. Robust Optimization. Uncertainties.

Paper topics: Mathematical Programming, Combinatorial Optimization.

1. Introdução

Modelos básicos de Localização de Facilidades buscam determinar a localização de instalações, considerando como dados a localização dos pontos de demandas (clientes) a serem atendidos e os locais de potenciais instalações, conforme descrito em Daskin e Owen [1999]. O problema geral consiste em localizar as instalações para otimizar algum objetivo que pode ser, por exemplo, minimizar o custo total das instalações, minimizar a soma das distâncias entre os clientes atendidos e as instalações ou maximizar a demanda coberta pelas instalações. Duas variações deste problema de cobertura são: (i) Problema de Localização com Cobertura Completa (*Set Covering Location Problem - SCLP*); e o (ii) Problema de Localização com Cobertura Parcial (*Partial Set Covering Localization Problem - PSCLP*).

O SCLP tem como objetivo minimizar o custo total de abertura das instalações, garantindo que cada cliente será atendido por, pelo menos, uma instalação, o que pode levar a soluções irreais por dar a mesma importância a cada cliente, conforme aponta Cordeau et al. [2019]. O PSCLP, por outro lado, busca minimizar o custo total das instalações, respeitando uma restrição que garante uma cobertura mínima a ser atendida. Em ambos os casos, em geral, assume-se que a demanda dos clientes e os custos de abertura das instalações são conhecidos *a priori*.

No entanto, em problemas práticos, podem haver incertezas nas demandas dos clientes ou nos custos das instalações e, por este motivo, uma abordagem por meio de técnicas de otimização sob condições de incerteza pode ser aplicada nestas situações. Owen e Daskin [1998] apresentam um estudo sobre problemas de cobertura sob condições de incertezas, apresentando o caso probabilístico, isto é, quando o parâmetro incerto segue uma distribuição de probabilidade e o caso robusto, em que o parâmetro incerto pode variar segundo diferentes cenários. Snyder [2006] apresenta uma revisão de literatura sobre modelos estocásticos e robustos de localização de facilidades. Em Baron et al. [2011] é aplicada otimização robusta a um problema de localização multiperíodos, considerando incertezas nas demandas.

Neste trabalho, é estudado o PSCLP considerando incertezas nas demandas dos clientes. Para resolvê-lo, utiliza-se técnicas de Otimização Robusta, considerando um conjunto de incertezas poliedrais com restrições de cardinalidade. A consideração de incertezas na demanda em um problema de cobertura se justifica pelo fato de que, em geral, estes dados não são conhecidos antes da implantação efetiva das instalações e a re-otimização da rede após se ter mais informações sobre a demanda pode ser muito custosa. Em casos reais, esses dados podem ser obtidos por estimativas e, por este motivo, se faz necessário o uso de modelos robustos, que possam garantir uma solução que contemple incertezas a um determinado custo adicional.

O PSCLP foi apresentado inicialmente por Daskin e Owen [1999], que desenvolveram uma heurística Lagrangiana aplicada à solução do problema. Apesar de sua relevância prática, o PSCLP tem recebido pouca atenção na literatura científica, segundo Cordeau et al. [2019]. Cordeau et al. [2019] apresentam um método exato, com base no método de decomposição de Benders, para resolver o PSCLP, propondo tipos de cortes com base na demanda atendida. Os autores mostram os resultados da aplicação desse método em testes computacionais para instâncias de grandes dimensões (com até 40 milhões de pontos de demanda). Uma característica das instâncias resolvidas no trabalho é que o número de instalações potenciais é pequeno, quando comparado com o número de clientes.

Dentre os trabalhos recentes que abordaram problemas de localização sob condições de incertezas, podem ser destacados os seguintes. Zhu et al. [2022] consideram a entrega de produtos de primeiros socorros por meio de veículos aéreos não tripulados (drones). O problema apresentado é de dois estágios e incorpora incertezas por meio de cenários de demanda. Dönmez et al.

[2021] apresentam uma revisão sobre problemas de localização sob condições de incerteza em um contexto humanitário e, segundo os autores, o objetivo do trabalho é sumarizar e estruturar este tópico, o qual tem atraído cada vez mais atenção da comunidade científica. Cheng et al. [2021] estudam um problema robusto de localização de carga fixa sob demandas incertas e interrupções das instalações. A modelagem do problema é baseada em um modelo de dois estágios, em que as decisões de localização são tomadas no primeiro estágio e as decisões de alocação são feitas no segundo estágio, quando as informações incertas são reveladas. Gülpınar et al. [2013] consideram um problema estocástico de localização no qual múltiplas instalações capacitadas atendem a clientes com um único produto. Neste problema, a falta de estoque é modelada por uma restrição probabilística, que parte da suposição de que as demandas dos clientes são incertas e seguem uma distribuição de probabilidade conhecida. Mohammadi et al. [2014] abordam um problema sustentável de localização de *hubs*, com duas novas funções de custo que tratam poluição sonora e atmosférica causadas por veículos, com incertezas em parâmetros como as capacidades e raios dos *hubs*. Em Lu e Cheng [2021] é estudado um problema capacitado de localização sob interrupções, no qual o risco de interrupções afeta a demanda padrão dos clientes e afeta a capacidade das instalações, podendo haver interrupção parcial ou total. Foi utilizado um conjunto de incertezas para expressar simultaneamente interrupções das instalações e incertezas nas demandas dos clientes, causadas por falhas em instalações próximas. Três formulações robustas de dois estágios com diferentes objetivos foram propostas para modelar o problema e foram aplicados algoritmos de geração de colunas-restrição e o método de decomposição de Benders para sua resolução. Yu [2022] estuda como localizar uma nova empresa, dado um conjunto de empresas já existentes que ofereçam produtos ou serviços similares a esta nova empresa no mercado. Um modelo robusto de dois níveis é proposto para determinar a localização da nova empresa, considerando incertezas nos tipos de demandas dos clientes. Monzón et al. [2020] apresentam um modelo logístico humanitário para otimizar o pré-posicionamento de centros de distribuição de ajuda e reforço rodoviário para garantir que o máximo possível da população afetada por desastres possa receber ajuda de modo eficiente. O modelo é estocástico e considera que a demanda nos centros afetados e o estado da rede de transporte são incertos. A incerteza é representada por cenários que representam possíveis desastres e a metodologia proposta é aplicada em um estudo de caso, com base em tempestades que atingiram a Província de Nampula, em Moçambique.

O restante deste artigo está organizado do seguinte modo. A Seção 2 descreve e apresenta o modelo robusto proposto para o PSCLP. A Seção 3 descreve os testes computacionais realizados, resultados obtidos e uma discussão sobre os resultados. Por fim, a Seção 4 mostra as conclusões gerais e as propostas de trabalhos futuros.

2. Descrição do problema

O PSCLP leva em consideração o grau de cobertura das demandas, de modo que, caso uma facilidade seja instalada em um local, ela poderá atender somente aos pontos de demanda que estiverem a, no máximo, uma distância r , denominada raio de cobertura. O objetivo do problema é determinar a localização das instalações de forma a minimizar o custo total de abertura, garantindo uma cobertura mínima, denotada por D , que pode ser menor do que a demanda total.

Sejam I o conjunto formado por n instalações potenciais e J o conjunto formado por m clientes (pontos de demanda). Para representar a relação de cobertura entre facilidades potenciais e clientes, é utilizada uma matriz de adjacências $A_{n \times m}$. A matriz de adjacências A pode ser definida como uma matriz com elementos $a_{ij} = 1$, caso o cliente j esteja dentro do raio de cobertura da facilidade i , ou $a_{ij} = 0$, caso contrário.

As variáveis de decisão do PSCLP são: (i) a variável binária y_i , que indica se a facilidade

i será instalada ($y_i = 1$) ou não ($y_i = 0$); (ii) a variável binária z_j , que indica se um cliente j é coberto por, pelo menos, uma facilidade instalada ($z_j = 1$) ou não ($z_j = 0$).

2.1. PSCLP nominal

O PSCLP considera que cada cliente $j \in J$ está associada a uma demanda d_j . A versão do PSCLP que considera que as demandas são conhecidas será denominada PSCLP nominal. Uma formulação para o PSCLP nominal, baseada em Cordeau et al. [2019], é dada por:

$$\min \sum_{i=1}^n f_i y_i \quad (1)$$

$$\text{s.a: } \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i \geq z_j, \quad \forall j \in J \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^m d_j z_j \geq D \quad (3)$$

$$y_i \in \{0,1\}, \quad \forall i \in I \quad (4)$$

$$z_j \in \{0,1\}, \quad \forall j \in J. \quad (5)$$

A Expressão (1) representa a função objetivo do problema, que visa a minimizar o custo total das instalações. O conjunto de restrições (2) garante que, caso um cliente j esteja coberto, haverá pelo menos uma instalação dentro do raio de cobertura que possa cobri-lo. A restrição (3) garante que a demanda mínima D deverá ser coberta. As restrições (4) e (5) garantem que as variáveis de decisão sejam binárias.

2.2. PSCLP robusto

Esta subseção considera que a demanda de cada cliente é incerta. Deste modo, para cada cliente $j \in J$, define-se um parâmetro que fornece o raio máximo de variação de sua demanda, denotado por $\hat{d}_j$. Este raio de variação representa o quanto a demanda do cliente $j \in J$ pode variar a partir do seu valor nominal d_j . Assim, para cada ponto de demanda $j \in J$, tem-se a demanda incerta $\tilde{d}_j \in [d_j - \hat{d}_j, d_j + \hat{d}_j]$.

Além disso, considera-se que, dado um parâmetro $\Gamma \in \mathbb{R}_+$ tal que $0 < |\Gamma| < |J|$, o conjunto de incertezas com base em restrições de cardinalidade [Bertsimas e Sim, 2003], associado às demandas incertas, é dado por:

$$\mathcal{U}(\Gamma) = \left\{ \tilde{d} \in \mathbb{R}^m : \tilde{d}_j = d_j + s_j \hat{d}_j, \text{ para } s_j \in [-1,1], \sum_{j=1}^m |s_j| \leq \Gamma, \forall j \in J \right\}. \quad (6)$$

A abordagem robusta proposta por Bertsimas e Sim [2003] busca otimizar o pior caso para os parâmetros incertos pertencentes ao conjunto de incertezas $\mathcal{U}(\Gamma)$. Neste caso, o parâmetro Γ controla o nível de robustez da seguinte forma: (i) se $\Gamma = 0$, o problema será equivalente ao problema nominal; (ii) se $\Gamma = |J| = m$, todos os parâmetros incertos são levados ao pior caso; (iii) se $\Gamma \in (0, |J|)$, então $\lfloor \Gamma \rfloor$ demandas corresponderá ao pior caso e o valor de demanda de um cliente t , para $t \in J$, irá variar uma quantidade $(\Gamma - \lfloor \Gamma \rfloor) \hat{d}_t$ em relação ao valor nominal d_t .

Para algum parâmetro de robustez $\Gamma \in \mathbb{R}_+$ tal que $0 < |\Gamma| < |J|$, com base na abordagem robusta de Bertsimas e Sim [2003], a contraparte robusta do problema nominal descrito anterior-

mente pode ser dada por:

$$\min \sum_{i=1}^n f_i y_i \quad (7)$$

$$\text{s.a: } \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i \geq z_j, \forall j \in J \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^m d_j z_j - \max_{S \cup \{t\} \subseteq J: |S| = \lfloor \Gamma \rfloor} \left\{ \sum_{j=1}^m \hat{d}_j z_j + (\Gamma - \lfloor \Gamma \rfloor) \hat{d}_t z_t \right\} \geq D \quad (9)$$

$$y_i \in \{0,1\}, \forall i \in I \quad (10)$$

$$z_j \in \{0,1\}, \forall j \in J. \quad (11)$$

A restrição (9), que se refere à única alteração com relação ao modelo nominal, considera as variações nos coeficientes das demandas no atendimento da demanda mínima. As variações são controladas pelo parâmetro Γ e essa restrição é não-linear, devido ao problema interno de maximização.

2.3. PSCLP robusto linearizado

A linearização do problema robusto (7)-(11) pode ser dada da seguinte forma. O problema interno de maximização da restrição (9) para um certo vetor $z \in \{0,1\}^m$ pode ser dado por:

$$\mathcal{V}(z) = \max_{S \cup \{t\} \subseteq J: |S| = \lfloor \Gamma \rfloor} \left\{ \sum_{j=1}^m \hat{d}_j z_j + (\Gamma - \lfloor \Gamma \rfloor) \hat{d}_t z_t \right\}. \quad (12)$$

Seja $s_j \in [0,1]$ uma variável de decisão que indica a fração de máximo desvio $\hat{d}_j$ da demanda a ser contabilizada para o cliente $j \in J$. Logo, o problema (12) pode ser reescrito como:

$$\mathcal{V}(z) = \max \sum_{j=1}^m \hat{d}_j z_j s_j \quad (13)$$

$$\text{s.a: } \sum_{j=1}^m s_j \leq \Gamma \quad (14)$$

$$0 \leq s_j \leq 1, \forall j \in J. \quad (15)$$

O dual deste problema pode ser escrito como:

$$\beta(z) = \min \Gamma w + \sum_{j=1}^m \rho_j \quad (16)$$

$$\text{s.a: } w + \rho_j \geq \hat{d}_j z_j, \forall j \in J \quad (17)$$

$$\rho_j \geq 0, \forall j \in J \quad (18)$$

$$z \geq 0. \quad (19)$$

Portanto, usando o Teorema Fundamental da Dualidade [Bazaraa et al., 2011], a contra-parte robusta pode ser linearizada usando o problema dual dado pelas expressões (16)-(19) para

substituir o problema interno de maximização da restrição (9). Assim, a contraparte robusta linearizada pode ser escrita como:

$$\min \sum_{i=1}^n f_i y_i \quad (20)$$

$$\text{s. a: } \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i \geq z_j, \forall j \in J \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^m d_j z_j - \left(\Gamma w + \sum_{j=1}^m \rho_j \right) \geq D \quad (22)$$

$$w + \rho_j \geq \hat{d}_j z_j, \forall j \in J \quad (23)$$

$$y_i \in \{0,1\}, \forall i \in I \quad (24)$$

$$z_j \in \{0,1\}, \forall j \in J \quad (25)$$

$$\rho_j \geq 0, \forall j \in J \quad (26)$$

$$z \geq 0. \quad (27)$$

3. Experimentos computacionais

O modelo linearizado, representado pelas expressões (20)-(27), foi implementado utilizando a biblioteca Concert Technology em C++ e solucionado pelo solver CPLEX, versão 20.1.0. Os testes computacionais foram executados em um computador Intel (R) Core TM i3-2348M, 2.30 GHz, com 6 GB de Memória RAM, com sistema operacional Windows 8.1. Foi utilizada uma instância de teste com 100 potenciais facilidades e 10000 clientes, disponibilizada por Cordeau et al. [2019]. Foram considerados raios de cobertura, isto é, a distância máxima que um cliente pode estar de uma instalação para poder ser atendido por ela, pertencentes ao conjunto $\{4; 4,25; 5,5\}$ e demandas mínimas equivalentes aos seguintes percentuais da demanda total: 50, 60 e 70. Os experimentos utilizaram valores para o parâmetro de robustez $\Gamma \in \{0, 100, 500, 1000, 2000, 3000\}$ e um parâmetro $\delta \in \{0, 5, 10, 20, 30\}$ para controlar o percentual de variação de demanda ($\hat{d}_j$) em relação ao valor nominal. O parâmetro Γ controla a quantidade de demandas que irá variar para o pior caso e o parâmetro δ está associado às incertezas das demandas, de forma que quanto maior for seu valor maior será a incerteza considerada na solução do modelo. Como, em casos reais, pode ser difícil estimar o quanto as demandas poderão variar, em situações práticas esse valor pode ser estimado com base em experiências anteriores.

As Tabelas 1-3 apresentam os resultados dos experimentos computacionais. Nestas tabelas, a coluna “Raio” apresenta o raio r de cobertura; a coluna “ D ” representa o percentual mínimo da demanda total que deverá ser atendido; a coluna “ Γ ” representa o parâmetro de robustez; a coluna “ δ ” apresenta o raio máximo de variação dos parâmetros incertos (demandas dos clientes); a coluna “Custo” representa o custo total das instalações, ou seja, o valor da função objetivo obtido do modelo robusto; a coluna “gap” representa a variação percentual do valor da função objetivo, considerando incertezas, em relação ao custo total obtido no problema nominal; a coluna “Tempo(s)” corresponde ao tempo de execução, em segundos, do modelo implementado e a coluna “Configuração” apresenta a solução obtida. Nestas tabelas, a solução obtida para $\Gamma = 0$ corresponde à solução do problema nominal, isto é, considera-se que não haverá variação nas demandas. Pela visualização destas tabelas, o gap pode fornecer uma ideia intuitiva em relação aos parâmetros incertos. Por exemplo, na Tabela 1, a solução nominal fornece o custo total igual a 74. No entanto, pode ser mais vantajoso,

Tabela 1: Resultados para $r = 5,5$ e $D = 50\%$.

Raio	D	Γ	δ	Custo	gap	Tempo (s)	Configuração
5,5	50%	0	0%	74	0,00%	112,20	3;32;53;70;83;89
		100	5%	74	0,00%	224,91	3;32;35;53;88;89
		100	10%	74	0,00%	189,50	3;32;35;53;88;89
		100	20%	74	0,00%	180,00	3;32;35;53;88;89
		100	30%	75	1,35%	160,17	3;35;53;70;88;89
		500	5%	74	0,00%	257,72	3;32;35;53;88;89
		500	10%	75	1,35%	205,05	3;32;53;83;88;89
		500	20%	76	2,70%	550,16	3;53;70;83;88;89
		500	30%	79	6,76%	989,06	3;35;53;83;88;89
		1000	5%	75	1,35%	254,45	3;32;53;83;88;89
		1000	10%	76	2,70%	112,42	3;53;70;83;88;89
		1000	20%	79	6,76%	476,72	3;35;53;83;88;89
		1000	30%	87	17,57%	571,13	3;32;53;70;83;88;89
		2000	5%	75	1,35%	171,34	3;32;53;83;88;89
		2000	10%	79	6,76%	855,16	3;35;53;83;88;89
		2000	20%	89	20,27%	311,02	3;32;35;53;70;83;89
		2000	30%	95	28,38%	192,53	3;35;53;83;88;89;96
		3000	5%	76	2,70%	992,97	3;53;70;83;88;89
		3000	10%	79	6,76%	227,03	3;35;53;83;88;89
		3000	20%	91	22,97%	748,28	3;35;53;70;83;88;89
		3000	30%	104	40,54%	157,28	3;9;35;53;70;83;88;89

numa situação real, assumir a solução para $\Gamma = 3000$ e $\delta = 5\%$. Neste caso, há uma margem de variabilidade da demanda de 30% do total de clientes, sendo que as demandas podem variar em um raio máximo de 5% do valor de suas demandas nominais, a um custo total de 76, isto é, duas unidades maior do que o custo total da solução nominal.

Os resultados apresentados nas Tabelas 1-3 são ilustrados nas Figuras 1-3. Nestes gráficos é possível verificar que, com o aumento dos valores dos parâmetros do modelo robusto, há também aumento no custo total das instalações.

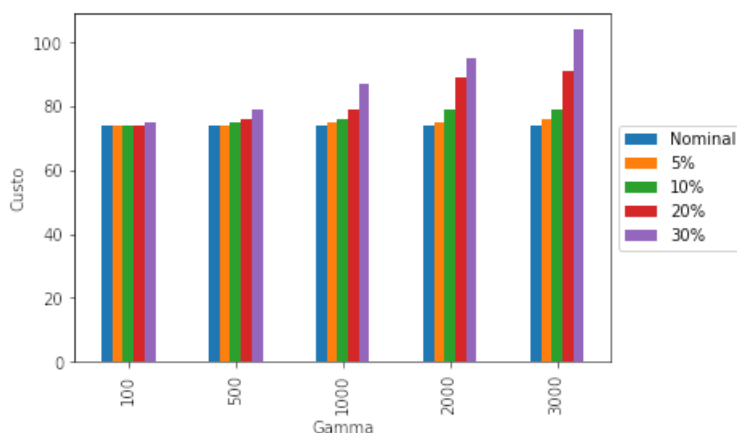


Figura 1: Resultados para $D = 50\%$ e raio $r = 5,5$.

Os resultados mostram que, de acordo com os valores de Γ e δ , podem ocorrer gran-

Tabela 2: Resultados para $r = 4$ e $D = 60\%$.

Raio	D	Γ	δ	Custo	Gap	Tempo (s)	Configuração
4	60%	0	0%	207	0,00%	112,77	3;8;9;32;35;42;53; 57;70;74;83;89;96
		100	5%	207	0,00%	275,45	3;8;9;32;35;42;53; 57;70;74;83;89;96
		100	10%	209	0,97%	261,84	3;9;16;20;35;42;53; 70;74;83;88;89;96
		100	20%	209	0,97%	184,61	3;9;20;35;42;53;54; 70;74;83;88;89;96
		100	30%	210	1,45%	316,27	5;9;15;19;32;35;42; 53;70;83;88;89;96
		500	5%	210	1,45%	376,36	9;19;20;35;42;53;54; 70;74;83;88;89;96
		500	10%	212	2,42%	305,09	3;9;20;32;35;42;53; 54;57;70;83;89;96
		500	20%	214	3,38%	438,28	3;8;9;32;35;42;53; 54;70;74;83;88;89;96
		500	30%	220	6,28%	471,09	3;9;20;32;35;42;53; 54;70;74;83;88;89;96
		1000	5%	212	2,42%	424,92	3;9;20;32;35;42;53; 54;57;70;83;89;96
		1000	10%	214	3,38%	759,22	3;8;9;32;35;42;53; 54;70;74;83;88;89;96
		1000	20%	231	11,59%	383,80	5;9;15;19;32;35;42; 53;54;70;83;88;89;96
		1000	30%	241	16,43%	155,70	5;8;9;19;32;35;42;53; 54;70;74;83;88;89;96
		2000	5%	214	3,38%	833,91	3;8;9;32;35;42;53; 54;70;74;83;88;89;96
		2000	10%	228	10,14%	292,41	3;8;9;32;35;42;53;54; 57;70;74;83;89;96
		2000	20%	253	22,22%	363,45	3;8;9;32;35;42;53;54; 60;70;74;83;88;89;96
		2000	30%	279	34,78%	406,78	3;5;8;9;32;35;42;53;54; 60;70;74;83;88;89;96
		3000	5%	220	6,28%	196,61	3;9;20;32;35;42;53;54; 70;74;83;88;89;96
		3000	10%	237	14,49%	522,36	3;9;20;32;35;42;53;54; 60;70;83;88;89;96
		3000	20%	270	30,43%	419,69	5;9;15;19;32;35;42;53; 54;60;70;83;88;89;96
		3000	30%	308	48,79%	818,13	5;8;9;19;32;35;42;47;53; 54;60;70;74;83;88;89;96

des variações no custo total das instalações. Considerando as configurações referentes às soluções ótimas apresentadas nas Tabelas 1-3, pode ser visualizado que, em alguns casos, pode ser necessário mudar a configuração dos locais em que serão abertas as instalações para atender um nível estabelecido de robustez. Para $\Gamma = 100$, ocorrem pequenas (ou nulas) variações no custo total, porém com mudança na configuração das instalações.

Tabela 3: Resultados para $r = 4,25$ e $D = 70\%$.

Raio	D	Γ	δ	Custo	Gap	Tempo (s)	Configuração
4,25	70%	0	0%	238	0,00%	617,66	9;19;20;32;35;53;54; 60;70;74;83;88;89;96
		100	5%	238	0,00%	714,22	9;19;20;32;35;53;54; 60;70;74;83;88;89;96
		100	10%	238	0,00%	862,66	9;19;20;32;35;53;54; 60;70;74;83;88;89;96
		100	20%	240	0,84%	257,77	4;9;19;20;35;53;54;60; 70;74;83;88;89;96
		100	30%	245	2,94%	415,08	5;9;15;19;32;35;42;53; 54;57;70;83;89;96
		500	5%	241	1,26%	285,98	4;9;19;20;35;42;53; 60;70;74;83;88;89;96
		500	10%	247	3,78%	470,61	3;9;20;32;35;42;53;54; 57;70;74;83;88;89;96
		500	20%	253	6,30%	226,63	3;8;9;32;35;42;53;54; 60;70;74;83;88;89;96
		500	30%	255	7,14%	563,28	3;4;8;9;35;42;53;54; 60;70;74;83;88;89;96
		1000	5%	247	3,78%	315,42	3;9;20;32;35;42;53;54; 57;70;74;83;88;89;96
		1000	10%	251	5,46%	286,11	5;9;19;35;42;53;54; 60;70;74;83;88;89;96
		1000	20%	260	9,24%	324,22	9;19;20;32;35;42;53; 54;60;70;74;83;88;89;96
		1000	30%	279	17,23%	184,84	3;5;8;9;32;35;42;53; 54;60;70;74;83;88;89;96
		2000	5%	251	5,46%	304,11	5;9;19;35;42;53;54; 60;70;74;83;88;89;96
		2000	10%	259	8,82%	108,08	3;9;20;32;35;42;53; 54;60;70;74;83;88;89;96
		2000	20%	286	20,17%	335,64	5;9;19;20;32;35;42;53; 54;60;70;74;83;88;89;96
		2000	30%	323	35,71%	208,55	5;8;9;19;22;35;42;47;53; 54;60;70;74;83;88;89;96
		3000	5%	253	6,30%	281,69	3;8;9;32;35;42;53;54; 60;70;74;83;88;89;96
		3000	10%	275	15,55%	776,19	5;9;19;20;35;42;53;54; 60;70;74;83;88;89;96
		3000	20%	312	31,09%	84,88	5;9;19;20;22;32;35;42; 53;54;60;70;74;83;88;89;96
		3000	30%	398	67,23%	283,92	4;5;8;9;19;22;35;42;47;53; 54;56;60;70;74;83;88;89;96

4. Conclusões e Trabalhos Futuros

Este trabalho abordou o Problema de Localização com Cobertura Parcial considerando incertezas nas demandas dos clientes. No problema estudado, é dada uma rede, um conjunto de potenciais instalações e um conjunto de clientes com suas demandas. O objetivo é determinar quais facilidades devem ser instaladas de modo a minimizar o custo total das instalações e garantir o atendimento de uma demanda mínima.

Para tratá-lo, foi proposto um modelo robusto, considerando um conjunto de incertezas

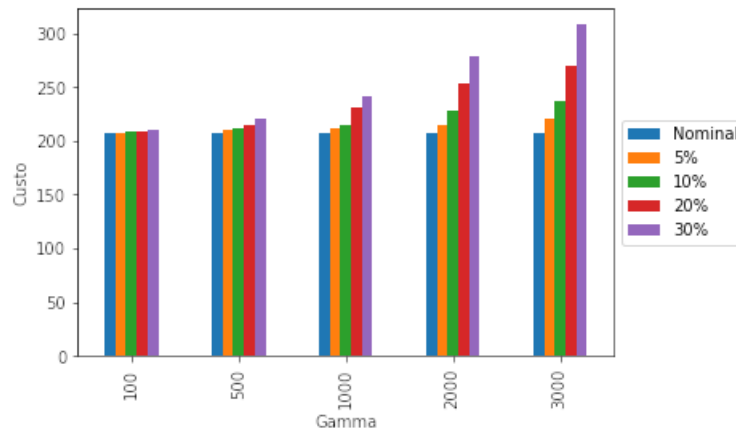


Figura 2: Resultados para $D = 60$ e raio $r = 4$.

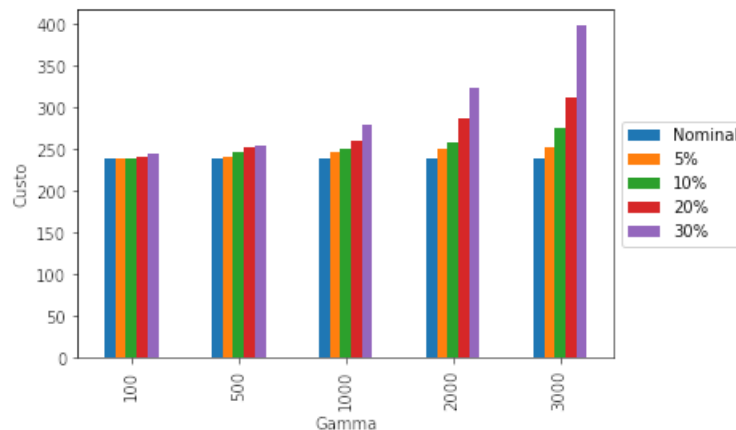


Figura 3: Resultados para $D = 70\%$ e raio $r = 4,25$.

poliedrais com restrições de cardinalidade. As demandas variam de acordo com um raio definido por um parâmetro do modelo robusto. Além disso, utiliza-se o parâmetro Γ para controlar o nível de robustez do modelo.

Para testar o modelo proposto, foram utilizadas instâncias da literatura, com 10000 clientes e 100 potenciais instalações. Nessas instâncias, considera-se que as demandas dos clientes variam de acordo com um raio, definido por um parâmetro δ . Além disso, o parâmetro Γ controla o nível de robustez do modelo, definindo a quantidade de clientes que terão suas demandas modificadas.

Os resultados mostraram que podem ocorrer grandes variações no custo total das instalações para atender a diferentes níveis de robustez. Para menores níveis de robustez, houve variações menores (ou nulas), com mudança na configuração da solução do problema nominal.

Em problemas reais, informações como as apresentadas neste trabalho podem ser utilizadas em tomadas de decisões estratégicas. A aplicação de modelos robustos pode ajudar um tomador de decisão em sua escolha por uma solução com base em incertezas nas entradas de um modelo. Essas incertezas são inerentes a problemas reais de localização e podem ocorrer, por exemplo, na variação da demanda de clientes após a decisão de onde realizar as instalações ou variação no custo

previsto de alguma instalação.

Como propostas de trabalhos futuros, sugere-se uma abordagem de otimização robusta com conjuntos de incertezas elipsoidais e uma abordagem de otimização estocástica em dois estágios e multi-cenário.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES, código de financiamento 001), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), à Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG), ao Instituto Federal de Minas Gerais (IFMG, Campus Betim) e à Universidade Federal de Ouro Preto, pelo apoio ao desenvolvimento deste trabalho.

Referências

- Baron, O., Milner, J., e Naseraldin, H. (2011). Facility location: A robust optimization approach. *Production and Operations Management*, 20(5):772–785.
- Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., e Sherali, H. D. (2011). *Linear programming and network flows*. John Wiley & Sons.
- Bertsimas, D. e Sim, M. (2003). Robust discrete optimization and network flows. *Mathematical programming*, 98(1):49–71.
- Cheng, C., Adulyasak, Y., e Rousseau, L.-M. (2021). Robust facility location under demand uncertainty and facility disruptions. *Omega*, 103:102429.
- Cordeau, J.-F., Furini, F., e Ljubić, I. (2019). Benders decomposition for very large scale partial set covering and maximal covering location problems. *European Journal of Operational Research*, 275(3):882–896.
- Daskin, M. S. e Owen, S. H. (1999). Two new location covering problems: The partial p-center problem and the partial set covering problem. *Geographical Analysis*, 31(3):217–235.
- Dönmez, Z., Kara, B. Y., Karsu, Ö., e Saldanha-da Gama, F. (2021). Humanitarian facility location under uncertainty: Critical review and future prospects. *Omega*, 102:102393.
- Gülpınar, N., Pachamanova, D., e Çanakoğlu, E. (2013). Robust strategies for facility location under uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 225(1):21–35.
- Lu, X. e Cheng, C. (2021). Locating facilities with resiliency to capacity failures and correlated demand uncertainty. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 153: 102444.
- Mohammadi, M., Torabi, S., e Tavakkoli-Moghaddam, R. (2014). Sustainable hub location under mixed uncertainty. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 62: 89–115.
- Monzón, J., Liberatore, F., e Vitoriano, B. (2020). A mathematical pre-disaster model with uncertainty and multiple criteria for facility location and network fortification. *Mathematics*, 8(4): 529.

- Owen, S. H. e Daskin, M. S. (1998). Strategic facility location: A review. *European journal of operational research*, 111(3):423–447.
- Snyder, L. V. (2006). Facility location under uncertainty: a review. *IIE transactions*, 38(7):547–564.
- Yu, W. (2022). Robust competitive facility location model with uncertain demand types. *Plos One*, 17(8):e0273123.
- Zhu, T., Boyles, S. D., e Unnikrishnan, A. (2022). Two-stage robust facility location problem with drones. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 137:103563.