MODELOS MATEMÁTICOS PARA O PROBLEMA DA ÁRVORE GERADORA MÍNIMA CAPACITADA EM NÍVEIS

Alexandre Xavier Martins
Departamento de Computação - Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
CEP 35.400-000 Ouro Preto, MG xmartins@iceb.ufop.br

Marcone Jamilson Freitas Souza
Departamento de Computação - Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
CEP 35.400-000 Ouro Preto, MG marcone@iceb.ufop.br

Maurício Cardoso de Souza
Departamento de Engenharia de Produção - Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)
Rua Espírito Santo 35, 30160-030, Belo Horizonte, MG, mauricio@dep.ufmg.br

Resumo
Este trabalho trata do problema de determinar a melhor maneira de conectar n terminais, de diferentes locais, a um computador central através de linhas de transmissão. Geralmente este problema é tratado considerando-se que todas as linhas de transmissão têm uma capacidade fixa Q. Isto corresponde a restringir o fluxo máximo de informação em qualquer linha de transmissão adjacente ao computador central a uma quantidade fixa. Este problema na literatura da Otimização Combinatória é conhecido como Problema da Árvore Geradora Mínima Capacitada (PAGMC). No entanto, este trabalho considera que para o projeto estão disponíveis múltiplos tipos de linhas de transmissão com capacidades variadas, ou seja, as linhas de transmissão têm capacidades variando de Z_1 até Z_L, onde a capacidade $Z_1 < Z_2 < ... < Z_L$. Na literatura este problema é conhecido como *multi level minimum spanning tree problem* ou Problema da Árvore Geradora Mínima Capacitada em Níveis (PAGMCN). Neste trabalho são apresentadas duas novas formulações exatas para o problema e os resultados obtidos são comparados com os resultados da formulação existente.

Palavras-chave: Árvore Geradora Mínima Capacitada, Modelos de Programação Inteira, Grafos

Abstract
In this paper we present mathematical models for a generalization of the well known Capacitated Minimum Spanning Tree Problem (CMST) – the Multi-Level Capacitated Minimum Spanning Tree (MCMST) – where links with different capacities are available to connect n nodes to a central one. Two integer models proposed in the literature for CMST, and one proposed for MCMST are reviewed. We then and propose two new models for MCMST which extends previous models for CMST. Numerical experiments on instances derived from benchmark instances of the CSMT have shown that the two models proposed were able to solve larger instances than the one already found in the literature, and, in particular, one of them outperforms all others.

Keywords: Capacitated Minimum Spanning Tree, Integer Programming Models, Graphs

1. Introdução

O presente trabalho se refere ao problema de layout de terminais, que é um subproblema no projeto de redes de acesso local. Ele consiste em encontrar a melhor maneira de conectar n terminais, de diferentes locais, a um computador central. Esses terminais enviam e recebem informações do computador central através de linhas de transmissão. Para utilizar eficientemente a capacidade das linhas de transmissão, estas podem ser compartilhadas por vários terminais no envio e recebimento de informações.

A topologia ótima para este problema corresponde a uma árvore geradora de um grafo $G = (N, A)$ com $|N|$-1 nós em N correspondendo aos terminais e o nó restante, conhecido como nó raiz, correspondendo ao computador central. As arestas em A correspondem às linhas de transmissão. Geralmente este problema é tratado considerando-se que todas as linhas de transmissão têm uma capacidade fixa Q. Isto corresponde a restringir o fluxo máximo de informação em qualquer linha de transmissão adjacente ao computador central (raiz do grafo G) a uma quantidade fixa. Este problema na literatura da Otimização Combinatória é conhecido como Problema da Árvore Geradora Mínima Capacitada (PAGMC).

No entanto, é razoável admitir que para o projeto da rede estão disponíveis múltiplos tipos de linhas de transmissão com capacidades variadas, ou seja, as linhas de transmissão têm capacidades variando de Z_1 até Z_L,, com $Z_1 < Z_2 < ... < Z_L$. Na literatura este problema é conhecido como Problema da Árvore Geradora Mínima Capacitada em Níveis (PAGMCN).

Este trabalho considera a situação onde cada terminal requer a mesma quantidade de informação, que é o caso da demanda homogênea ou demanda unitária. Seja T uma árvore geradora de G e considere um nó como raiz. Uma sub-árvore é a componente conexa que contém o nó i ao se eliminar o arco $(i, p(i))$ de T, sendo $p(i)$ o predecessor do nó i no único caminho até a raiz. Assim como no PAGMC, no PAGMCN cada sub-árvore de T, obtida ao se eliminar a raiz e todas as arestas que lhe são adjacentes, pode ter um número máximo de nós terminais, sendo o primeiro limitado por Q e o segundo por Z_L (a linha de transmissão de maior capacidade).

Na próxima seção faremos uma descrição do PAGMC. Na seção 3, descreveremos o PAGMCN e o modelo matemático existente na literatura. Na seção 4 são apresentados dois novos modelos propostos. Na seção 5 apresentaremos uma comparação feita entre os três modelos. As conclusões finais serão apresentadas na seção 6.

2. Problema da Árvore Geradora Mínima Capacitada

Seja $G = (N, A)$ um grafo não direcionado e conexo com um conjunto de nós $N = \{0, 1, ... , n\}$ e um conjunto de arcos A. Cada nó $i \in N$ tem um peso $b_i \geq 0$ com $b_0 = 0$. O peso do nó pode ser interpretado como uma demanda requerida. Cada arco $(i,j) \in A$ tem um custo c_{ij} associado a sua utilização na árvore geradora. O problema da árvore geradora mínima capacitada consiste em determinar uma árvore geradora de custo mínimo sobre G, centralizada sobre o nó 0 (raiz), com a restrição adicional que a soma dos pesos dos nós de qualquer sub-árvore conectada à raiz não pode ser maior que uma constante Q, onde Q é um valor inteiro.

Quando todos os pesos dos nós são iguais temos a versão homogênea do problema que pode ser tratado como um problema de demanda unitária. Para $2 < Q < n/2$, Papadimitriou (1978) mostrou que o problema é NP-difícil.

Esau & Williams (1966) desenvolveram um dos principais algoritmos para construção de uma solução para o PAGMC, o Esau-Williams (EW). Gavish (1982, 1983) apresentou uma formulação de fluxo para a versão unitária do PAGMC. Gouveia (1995) apresentou uma formulação com $2n$

restrições. Gouveia & Martins (1999) apresentaram uma formulação com índice de nível e obtiveram excelentes limites inferiores com a relaxação linear deste modelo, o problema é que, com o novo índice criado, o modelo gerava muitas variáveis. Este problema foi solucionado com o modelo com índice de nível hierarquizado que é capaz de agregar o modelo reduzindo assim esse número de variáveis geradas (Gouveia e Martins (2000)).

Amberg et al (1996) fizeram uma excelente revisão sobre o tema e apresentaram uma estrutura de vizinhança baseada na troca de nós entre sub-árvores. Sharaiha et al. (1997) propuseram uma estrutura de vizinhança baseada na transferência de toda ou de parte de uma sub-árvore, o movimento executa duas operações, “corte” e ”colagem”. Ahuja et al. (2001) consideraram duas estruturas de vizinhança que são generalizações das estruturas anteriores. Nos três trabalhos a metaheurística Busca Tabu é utilizada para testar as estruturas de vizinhança. Souza et al. (2003) consideraram uma busca local onde cada aresta que não pertence à solução e tem extremidade em duas sub-árvores diferentes é candidata a entrar na nova solução. Em conjunto com a busca local os autores utilizam um procedimento GRASP baseado em memória e uma estratégia de reconexão por caminhos.

2.1. Formulação de Fluxo

O modelo apresentado nesta seção foi introduzido por Gavish (1982, 1983). Seja x_{ij} = 1 se o arco (i,j) é incluído na solução e x_{ij} = 0 caso contrário. Além disso, seja y_{ij} o fluxo sobre o arco (i,j) para $i = 0, ..., n$ e $j = 1, ..., n$. Para um grafo direto com o nó 0 sendo a raiz então temos:

Minimize $$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \qquad (2.1)$$

Sujeito a: $$\sum_{i=0}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1,..., n; \qquad (2.2)$$

$$\sum_{i=0}^{n} y_{ij} - \sum_{i=1}^{n} y_{ji} = 1 \qquad j = 1,..., n; \qquad (2.3)$$

$$x_{ij} \leq y_{ij} \leq (Q - b_i)\, x_{ij} \qquad i = 0,..., n;\ j = 1,..., n; \qquad (2.4)$$

$$x_{ij} \in (0,1);\ y_{ij} \geq 0 \qquad i = 0,..., n;\ j = 1,..., n \qquad (2.5)$$

As igualdades (2.2) garantem que exatamente um arco chega a cada nó, excluindo o nó central. As igualdades (2.3) estabelecem a propriedade da conservação de fluxo para cada nó $j \in N\backslash\{0\}$, impondo que a diferença entre a totalidade do fluxo que chega e sai de j seja igual ao valor da demanda desse nó, isto é, igual a 1. As restrições (2.2) e (2.3) conjugadas garantem a não existência de ciclos na solução. As inequações (2.4) relacionam ambos os conjuntos de variáveis, limitando inferiormente e superiormente a quantidade de fluxo em cada arco da solução. Nestas restrições, o valor de b_i permite que o fluxo máximo num arco incidente na raiz seja igual a Q, enquanto nos arcos não incidentes ao nó central esse valor máximo é igual a Q-1. Note que o valor do fluxo que atravessa o arco (i,j), é igual ao número de nós que ficam desconexos da raiz se esse arco for retirado da solução. Em (2.5) são estabelecidas as restrições de integralidade sobre o conjunto de variáveis.

De acordo com as restrições definidas, qualquer solução viável para o PAGMC contém todos os arcos orientados no sentido oposto ao da raiz e o valor do fluxo que se define ao longo dos arcos de qualquer caminho numa dessas soluções, decresce quando se percorre esse caminho no sentido da orientação dos arcos. Gavish (1983) mostra que essa formulação é válida para o PAGMC. Para tentar encontrar soluções ótimas seus trabalhos também incluem decomposição de Benders, decomposição de Dantzig-Wolfe e Relaxação Lagrangeana combinada com técnicas de otimização de subgradiente (Gavish (1982,1983)).

2.2. Formulação com 2*n* restrições

Gouveia (1995) apresentou uma formulação para o PAGMC que usa $2n$ restrições ao invés das $2n^2$ restrições do modelo de Gavish (1982, 1983). Para isso ele substitui as informações contidas nas variáveis (x_{ij}, y_{ij}) por um único conjunto de variáveis de três índices z^q_{ij} ($i = 0, ..., n; j = 1, ..., n; q = 1, ..., Q - b_i$) tal que $z^q_{ij} = 1$ se o fluxo de valor q passa pelo arco (i,j) e $z^q_{ij} = 0$ caso contrário. Com $b_0 = 0$ e $b_i = 1$ para $i = 1, ..., n$, onde Q é a capacidade máxima de cada componente.

Este conjunto de variáveis relaciona-se com as variáveis (x_{ij}, y_{ij}), através das seguintes igualdades:

$$x_{ij} = \sum_{q=1}^{Q-bi} z_{ij}^{q} \qquad i = 0,..., n; j = 1,..., n; \tag{2.6}$$

$$y_{ij} = \sum_{q=1}^{Q-bi} q z_{ij}^{q} \qquad i = 0, ..., n; j = 1,..., n \tag{2.7}$$

Para qualquer arco (i,j), as relações (2.6) e (2.7) impõem que $x_{ij} = 1$ e $y_{ij} = p$ se e somente se $z^p_{ij} = 1$ e $z^q_{ij} = 0$ para $q = 1, ..., Q - b_i$ e $q \neq p$. Simultaneamente, tem-se que $x_{ij} = y_{ij} = 0$ se e somente se $z^q_{ij} = 0$ para $q = 1, ..., Q - b_i$. O modelo então pode ser formulado da seguinte forma:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{q=1}^{Q-bi} c_{ij}\, z_{ij}^{q} \tag{2.8}$$

$$\text{Sujeito a:} \quad \sum_{i=0}^{n}\sum_{q=1}^{Q-bi} z_{ij}^{q} = 1 \qquad j = 1,..., n; \tag{2.9}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{q=1}^{Q-bi} q\, z_{ij}^{q} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{q=1}^{Q-1} q\, z_{ji}^{q} = 1 \qquad j = 1,..., n; \tag{2.10}$$

$$z_{ij}^{q} \in \{0,1\} \qquad i = 0, ..., n; j = 1,..., n; Q = 1,..., Q - b_i \tag{2.11}$$

Com esta formulação Gouveia (1995) mostra que o custo da solução ótima da relaxação linear deste modelo é igual ao modelo apresentado por Gavish (1982, 1983). A formulação de Gouveia constitui a formulação com o menor número de restrições conhecidas para o PAGMC, envolvendo apenas $2n$ restrições. Porém, esta transformação conduz a um aumento significativo no número de variáveis, passando esse valor de $2n^2$ para $(n^2(Q-1)+n)$ variáveis. Além disso, o autor apresentou alguns métodos de Relaxação Lagrangeana derivadas da nova formulação como uma maneira de produzir um limite inferior ao valor da solução ótima.

3. Problema da Árvore Geradora Mínima Capacitada em Níveis

O problema da árvore geradora mínima capacitada em níveis (PAGMCN) é uma generalização do PAGMC, que acreditamos ser de uso mais prático no projeto de uma rede de comunicação local. Apesar disso o PAGMCN não tem recebido muita atenção dos pesquisadores, sendo a primeira pesquisa apresentada sobre o assunto feita por Gamvros et al. (2002). A diferença entre o PAGMC e o PAGMCN é que no segundo é permitida a instalação de facilidades com capacidades distintas.

No PAGMCN são dados um grafo $G = (N, A)$, com um conjunto $N = \{0,1,2, ..., n\}$, onde o nó 0 representa o terminal central de onde o fluxo deve sair e os outros são os consumidores, e um conjunto de arcos A, b_i sendo a demanda de tráfego (ou peso) do no i a ser transportada do nó 0, facilidades do tipo 1,2, ..., L com capacidades $Z_1 < Z_2 < ... < Z_L$ e uma função de custo c^l_{ij} denotando o custo de uma facilidade do tipo l instalada entre os nós i e j. O objetivo então, assim como no PAGMC, é o de encontrar uma rede de custo mínimo para transportar o tráfego requerido, onde o fluxo sobre cada facilidade não pode ser maior que sua capacidade.

Em geral, a demanda de cada nó pode ser diferente, contudo, neste trabalho os modelos apresentados a seguir são baseados no problema da demanda unitária. Além disso, a função de custo para as linhas de transmissão para todos os testes apresenta economia de escala, o que se verifica em redes de comunicação (Gamvros et al., 2002). Também impomos neste trabalho que somente um único tipo de linha de transmissão pode ser instalado para conectar qualquer par de nós.

Gamvros et al. (2002) utilizaram um algoritmo genético para resolver o PAGMCN. Para testar o método foram gerados três conjuntos de testes com 50 nós terminais – um com a raiz no centro, outro com a raiz na esquina e um onde a raiz era aleatoriamente localizada – cada conjunto com 50 instâncias. Também geraram um conjunto com 100 nós terminais com a raiz localizada no centro, onde este conjunto também era composto por 50 instâncias. Em todos os testes realizados os autores trabalharam com três tipos de facilidades de capacidades 1, 3 e 10 com os respectivos custos 1, 2 e 6.

Para comparar os resultados do algoritmo genético os autores desenvolveram um modelo matemático para o PAGMCN e usaram o limite inferior ao valor da solução ótima dado pela relaxação linear. Nos resultados apresentados o maior *gap* médio observado foi de 9,95% em relação à solução do problema relaxado para as instâncias com 50 nós e a raiz no centro.

3.1. Formulação de Gramvros et al. (2002)

Gamvros et al. (2002) apresentam um modelo de programação matemática para o PAGMCN que utiliza três tipos de variáveis. Seja x_{ij} igual a 1 se uma facilidade é instalada sobre o arco (i,j) e 0 caso contrário. Seja y^l_{ij} igual a 1 se a facilidade do tipo l é instalada sobre o arco (i,j), e 0 caso contrário.

Nos modelos baseados em fluxo para o PAGMC o fluxo vai do nó central em direção aos nós terminais. No modelo apresentado por Gamvros et al. (2002) o fluxo deixa os nós terminais em direção ao nó central. Cada nó terminal possui um produto que deve ser transportado ao nó central. A origem do produto k é o nó K. A variável f^k_{ij} indica o fluxo do produto k que passa pelo arco (i, j). Sendo assim o problema foi formulado da seguinte forma:

Minimize $$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{l=1}^{L} c^l_{ij} y^l_{ij} \quad (3.1)$$

Sujeito a: $$\sum_{j=0}^{n} f^i_{ji} - \sum_{j=0}^{n} f^i_{ij} = -1 \qquad i = 1,... n; \quad (3.2a)$$

$$\sum_{j=0}^{n} f^k_{j0} - \sum_{j=0}^{n} f^k_{0j} = 1 \qquad k = 1,..., K; \quad (3.2b)$$

$$\sum_{j=0}^{n} f^k_{ji} - \sum_{j=0}^{n} f^k_{ij} = 0 \qquad i = 1,... n; k = 1,..., K \text{ e } i \neq k; \quad (3.2c)$$

$$\sum_{k=1}^{K} f^k_{ij} \leq \sum_{l=1}^{L} Z^l y^l_{ij} \qquad i = 0, ... n; j = 0,..., n; \quad (3.3)$$

$$\sum_{l=0}^{L} y^l_{ij} = x_{ij} \qquad i = 0, ... n; j = 0,..., n; \quad (3.4)$$

$$f_{ij}^{k} \leq x_{ij} \qquad i = 0, \ldots n;\ j = 0,\ldots, n;\ k = 1,\ldots,K; \qquad (3.5)$$

$$\sum_{j=0}^{n} x_{0j} = 0 \qquad (3.6)$$

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n; \qquad (3.7)$$

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 1 \qquad i = 0, \ldots n;\ j = 0,\ldots, n; \qquad (3.8)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i = 0, \ldots n;\ j = 0,\ldots, n; \qquad (3.9)$$

$$y_{ij}^{l} \in \{0,1\} \qquad i = 0, \ldots n;\ j = 0,\ldots, n;\ l = 1,\ldots,L; \qquad (3.10)$$

$$f_{ij}^{k} \geq 0 \qquad i = 0, \ldots n;\ j = 0,\ldots, n;\ k = 1,\ldots,K. \qquad (3.11)$$

O conjunto de restrições (3.2a), (3.2b), (3.2c), (3.5), (3.6), (3.7) e (3.8) garantem que a topologia da rede será uma árvore e que os arcos vão em direção ao nó central. O conjunto de restrições (3.4) garantem que somente um tipo de facilidade será instalada sobre um arco, e somente se este arco for utilizado na solução. As restrições (3.3) garantem que o fluxo que passa por uma facilidade é menor que a sua capacidade. Esta formulação gera (n^3+n^2L+n^2) variáveis, onde L é o número de facilidades disponíveis, e (n^3+4n^2+3n) restrições.

4. Modelos Propostos

Neste trabalho são propostos dois modelos matemáticos para representar o PAGMCN e, ao contrário do modelo apresentado por Gamvros et al. (2002), nos dois modelos o fluxo flui do nó 0 em direção aos outros nós da rede. Os modelos desenvolvidos também são baseados em um grafo direto.

4.1. Formulação Baseada em Fluxo

Seja x^k_{ij} igual a 1 se a facilidade do tipo k é usado para ligar o nó i ao nó j e igual a 0 caso contrário, Z_k é a capacidade da facilidade do tipo k e y_{ij} é o fluxo que passa pelo arco (i,j). Podemos então formular o problema da seguinte forma:

Minimize
$$\sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{k} x_{ij}^{k} \qquad (4.1)$$

Sujeito a:
$$\sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{n} x_{ij}^{k} = 1 \qquad j = 1,\ldots, n; \qquad (4.2)$$

$$\sum_{k=1}^{L} Z_k x_{ij}^{k} \geq y_{ij} \qquad i = 0,\ldots, n;\ j = 1,\ldots, n; \qquad (4.3)$$

$$\sum_{i=0}^{n} y_{ij} - \sum_{i=1}^{n} y_{ji} = 1 \qquad j = 1,\ldots, n; \qquad (4.4)$$

$$x_{ij}^{k} \in (0,1) \qquad i = 0, \ldots, n;\ j = 1,\ldots, n;\ k = 1,\ldots, L; \qquad (4.5)$$

$$y_{ij} \geq 0 \qquad i = 0, \ldots, n;\ j = 1,\ldots, n. \qquad (4.6)$$

Os conjuntos de restrições (4.2), (4.3) e (4.4) garantem a conservação do fluxo e que a topologia da rede será uma árvore, onde o fluxo vai do nó central em direção aos nós terminais. O conjunto de restrições (4.3) ainda garante que o fluxo sobre um arco de capacidade k não irá ultrapassar essa capacidade. Este modelo baseado em fluxo para o PAGMCN, denotado por MBF, gera (n^2L+n^2) variáveis, onde L é o número de facilidades disponíveis e (n^2+2n) restrições.

Note que este modelo é uma generalização do modelo apresentado por Gavish (1982, 1983).

4.2. Formulação baseada na capacidade das facilidades

O modelo apresentado a seguir, denotado por MBC, utiliza as mesmas variáveis do modelo anterior, com exceção da variável de fluxo y_{ij}. Dito isso, a formulação pode ser feita da seguinte forma:

Minimize $$\sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{k} x_{ij}^{k} \qquad (4.7)$$

Sujeito a: $$\sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{n} x_{ij}^{k} = 1 \qquad j = 1,\dots, n; \qquad (4.8)$$

$$\sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{n} Z_k x_{ij}^{k} - \sum_{k=1}^{L}\sum_{i=1}^{n} Z_k x_{ji}^{k} \geq 1 \qquad j = 1,\dots, n; \qquad (4.9)$$

$$x_{ij}^{k} \in (0,1) \qquad i = 0,\dots, n;\ j = 1,\dots, n;\ k = 1,\dots, L. \qquad (4.10)$$

As restrições (4.8) e (4.9) garantem que a topologia da rede será uma árvore, que o fluxo irá do nó central em direção aos nós terminais e que a capacidade das facilidades será preservada.

O problema deste modelo é que se for usado uma facilidade com capacidade k qualquer ele considera que por essa facilidade estará passando um fluxo igual à capacidade deste. Este problema pode ser solucionado com a criação de facilidades artificiais. Suponhamos que só temos disponíveis 3 tipos de facilidades com as seguintes capacidades 1, 3 e 5, com custos c_1, c_2 e c_3, respectivamente. Então criamos duas facilidades artificiais, uma com a capacidade 2 e custo c_2 e outra com capacidade 4 e custo c_3. Isso deve ser feito pois as facilidades devem ter capacidades variando de 1 em 1 até a facilidade de maior capacidade. Além disso, o custo da facilidade artificial deve ser igual à de menor custo de uma facilidade real com a capacidade superior a sua, pois se na solução estiver uma facilidade com capacidade 4, isso quer dizer na verdade que estaremos usando uma facilidade com capacidade 5 mas que passa somente 4 unidades de fluxo. Este modelo apresenta n^2Z_L variáveis, onde Z_L é a maior capacidade entre todas as facilidades, e $2n$ restrições.

5. Resultados

Os modelos desenvolvidos e o apresentado por Gamvros et al. (2002) foram implementados no modelador e otimizador LINGO versão 7.0. Para testá-los foram geradas instâncias a partir das instâncias conhecidas na literatura (ver por exemplo Gouveia e Martins (2000)) como tc40-k e te40-k (k = 1,..., 10). Estas instâncias são compostas de 40 nós (além da raiz) gerados aleatoriamente num *grid* 100x100. Os custos das arestas são a parte inteira das distâncias Euclidianas. A classe TC é caracterizada por ter a raiz no centro do *grid*, e a classe TE por ter a raiz no canto. Essas instâncias são utilizadas para testar algoritmos para resolução do PAGMC e para usá-los para testar os modelos para o PAGMCN basta acrescentar novos tipos de facilidades com custos diferentes. Neste experimento nós atribuímos à capacidade de cada tipo de facilidade um fator que multiplica os custos Euclidianos das arestas nas instâncias originais. Os testes foram realizados em um computador com processador Pentium IV, 1,8 MHz, com 256 MB de memória RAM, sob o sistema operacional Windows XP.Cada bateria de testes apresenta um conjunto com dez instâncias.

As tabelas a seguir apresentam os resultados obtidos pelos modelos apresentados nas seções 3.1, 4.1 e 4.2 respectivamente. São apresentados os tempos em que os modelos resolveram cada instância, em segundos. Para todos os conjuntos de testes foi estabelecido o tempo máximo para que o modelo encontrasse a melhor solução, que foi limitado em 3600 segundos. Cada tabela também informa o valor do *gap*, que é calculado da seguinte forma: (*MS-LI*)/*MS*, onde *MS* indica o valor da melhor solução até o momento e *LI* indica o valor do limite inferior até o momento.

Tabela 5.1 – Resultados dos testes tc20

Modelos	Modelo Gamvros et. Al (MG)		Modelo Baseado em Fluxo (MBF)		Modelo Baseado na capacidade (MBC)		Valor Ótimo
Instâncias	Tempo (s)	GAP (%)	Tempo (s)	GAP (%)	Tempo (s)	GAP (%)	
Tc20-1	3600	8,90	2207	0	3	0	647
Tc20-2	3600	7,32	324	0	3	0	653
Tc20-3	1064	0	41	0	3	0	611
tc20-4	2407	0	108	0	3	0	702
tc20-5	3600	9,20	615	0	8	0	671
tc20-6	494	0	94	0	3	0	706
tc20-7	1905	0	257	0	3	0	708
tc20-8	446	0	40	0	3	0	626
tc20-9	125	0	15	0	4	0	642
tc20-10	1124	0	14	0	2	0	604

A primeira bateria de testes foi feita utilizando-se os 20 primeiros nós das instâncias tc40 mais o nó central e utilizando-se três tipos de facilidade com capacidades 1, 3 e 5 e fatores multiplicativos de 1, 2 e 3 respectivamente. Este conjunto de testes foi chamado de tc20. Para este conjunto de testes os modelos propostos encontraram a solução ótima para todas as instâncias antes do tempo máximo estabelecido e o modelo MBC uma convergência muito mais rápida, como pode ser observado na Tabela 5.1. Já o modelo existente não consegue encontrar a solução ótima em três instâncias.

A segunda bateria de testes foi realizada com os 20 primeiros nós das instâncias te40 mais o nó central e utilizando-se das mesmas facilidades dos testes tc20 apresentados anteriormente. Este conjunto de testes foi chamado de te20.

Tabela 5.2 – Resultados dos testes te20

Modelos	Modelo Gamvros et. al (MG)		Modelo Baseado em Fluxo (MBF)		Modelo Baseado na capacidade (MBC)		Valor Ótimo
Instâncias	Tempo (s)	GAP (%)	Tempo (s)	GAP (%)	Tempo (s)	GAP (%)	
Te20-1	3600	13,21	3600	5,06	116	0	1140
Te20-2	3600	8,98	770	0	3	0	954
Te20-3	3600	14,67	3600	4,43	3	0	952
Te20-4	3600	8,87	3600	3,34	3	0	1108
Te20-5	3600	7,21	3600	1,73	9	0	1096
Te20-6	3600	9,28	405	0	2	0	1057
Te20-7	3600	11,59	2939	0	6	0	992
Te20-8	3600	8,94	2740	0	9	0	1079
Te20-9	3600	11,14	289	0	3	0	958
Te20-10	3600	21,20	1382	0	3	0	942

Para o conjunto de testes te20 o modelo MG não consegue encontrar a solução ótima no tempo máximo determinado em nenhuma instância como podemos observar na Tabela 5.2. Já o modelo MBF não encontra o ótimo em quatro instâncias, enquanto o modelo MBC encontra a solução ótima para todas as instâncias e levando um tempo máximo de 116 segundos.

Tabela 5.3 – Resultados dos testes tc30

Modelos	Modelo Gamvros et. al (MG)		Modelo Baseado em Fluxo (MBF)		Modelo Baseado na capacidade (MBC)		Valor Ótimo
Instâncias	Tempo (s)	GAP (%)	Tempo (s)	GAP (%)	Tempo (s)	GAP (%)	
Tc30-1	3600	26,47	3600	8,62	22	0	935
Tc30-2	3600	–	3600	5,88	18	0	933
Tc30-3	3600	–	3600	8,84	50	0	906
Tc30-4	3600	–	3600	8,40	68	0	1036
Tc30-5	3600	–	3600	6,00	35	0	945
Tc30-6	3600	–	3600	1,80	21	0	957
Tc30-7	3600	–	3600	5,50	76	0	982
Tc30-8	3600	–	3600	7,19	44	0	878
Tc30-9	3600	–	3600	12,14	52	0	959
Tc30-10	3600	–	3600	6,32	37	0	927

Para o terceiro conjunto de testes foram utilizados os 30 primeiros nós das instâncias tc40, mais o nó 0, com três tipos de facilidades com as seguintes capacidades: 1, 3 e 10, sendo os fatores multiplicativos associados à cada facilidade 1, 2 e 6 respectivamente. Este conjunto de testes foi chamado tc30 e os seus resultados podem ser observados na Tabela 5.3.

Como podemos observar na Tabela 5.3, o único modelo a encontrar a solução ótima para todas as instâncias no tempo determinado foi o modelo MBC, e o tempo máximo para resolvê-lo na otimalidade não superou 76 segundos. Além disso, o modelo MG só foi capaz de encontrar solução viável no tempo estabelecido em uma única instância (Tc30-1), dessa forma não foi possível calcular o *gap* deste modelo para as demais instâncias do problema. Já o modelo MBF, apesar de não encontrar a solução ótima para nenhuma das instâncias no tempo estabelecido, é capaz de encontrar soluções viáveis para todas e apresenta um *gap* máximo de 12,14%.

A quarta bateria de testes utiliza os 30 primeiros nós, além do nó 0, das instâncias te40 e também utiliza três tipos de facilidades com as mesmas capacidades e os mesmos fatores utilizados para o conjunto de testes tc30 apresentados anteriormente. Este conjunto de testes foi chamado te30 e seus resultados são apresentados na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Resultados dos testes te30

Modelos	Modelo Gamvros et. al (MG)		Modelo Baseado em Fluxo (MBF)		Modelo Baseado na capacidade (MBC)		Valor Ótimo
Instâncias	Tempo (s)	GAP (%)	Tempo (s)	GAP (%)	Tempo (s)	GAP (%)	
Te30-1	3600	–	3600	11,28	708	0	1626
Te30-2	3600	–	3600	11,80	631	0	1474
Te30-3	3600	–	3600	10,41	264	0	1401
Te30-4	3600	–	3600	13,27	1832	0	1501
Te30-5	3600	28,17	3600	9,51	97	0	1544
Te30-6	3600	35,56	3600	11,34	791	0	1527
Te30-7	3600	–	3600	10,90	2133	0	1466
Te30-8	3600	–	3600	17,77	1401	0	1585
Te30-9	3600	–	3600	11,44	3600	0,68	1473
Te30-10	3600	–	3600	13,32	375	0	1396

A Tabela 5.4 mostra que, mais uma vez, o modelo MG não consegue encontrar solução viável no tempo máximo determinado para a maioria das instâncias. Para este conjunto de testes o modelo MBF também não consegue encontrar nenhuma solução ótima no tempo determinado, mas apresenta solução viável para todas as instâncias. Já o modelo MBC só não consegue encontrar a solução ótima no tempo determinado em uma instância (Te30-9), mesmo assim apresenta um *gap* de apenas 0,68%.

Para a quinta e a sexta bateria de testes foram utilizadas as instâncias tc40 e te40 respectivamente, também utilizando facilidades com capacidades 1, 3 e 10 e fatores multiplicativos de 1, 2 e 6, respectivamente.

Os resultados dos testes da quinta bateria são apresentados na Tabela 5.5. Esta tabela, assim como a Tabela 5.6, só apresentam os resultados dos dois novos modelos desenvolvidos, pois não foi possível aplicar o modelo proposto por Gamvros et al. (2002) a nenhuma das instâncias, devido a problemas de falta de memória. Além disso, para algumas instâncias não foi possível encontrar o valor da solução ótima.

Na Tabela 5.5 podemos observar que, mais uma vez, o modelo MBC converge mais rapidamente para a solução ótima do que o modelo MBF, sendo que o modelo MBC só não encontra a solução ótima no tempo determinado para uma instância (Tc40-4), apresentando um *gap* de 3,61%, enquanto no modelo MBF o *gap* de menor valor é de 7,28% para a instância (Tc40-2).

Tabela 5.5 – Resultados dos testes tc40

Modelos	Modelo Baseado em Fluxo (MBF)		Modelo Baseado na capacidade (MBC)		Valor Ótimo
Instâncias	Tempo (s)	GAP (%)	Tempo (s)	GAP (%)	
Tc40-1	3600	16,87	232	0	1246
Tc40-2	3600	7,28	98	0	1168
Tc40-3	3600	14,85	1023	0	1171
Tc40-4	3600	12,81	3600	3,61	-
Tc40-5	3600	10,98	257	0	1213
Tc40-6	3600	10,37	1233	0	1229
Tc40-7	3600	14,67	119	0	1265
Tc40-8	3600	14,55	1288	0	1156
Tc40-9	3600	14,79	128	0	1235
Tc40-10	3600	15,36	85	0	1268

Como pode ser observado na Tabela 5.6, o modelo MBC consegue encontrar os *gap* mais baixos e ainda foi capaz de encontrar a solução ótima para uma das instâncias (Te40-3) antes do tempo estabelecido. Já o modelo MBF, apesar de ser capaz de encontrar soluções viáveis para todas as instâncias, apresenta um *gap* superior ao modelo MBC em todas as instâncias.

Tabela 5.6 – Resultados dos testes te40

Modelos	Modelo Baseado em Fluxo (MBF)		Modelo Baseado na capacidade (MBC)		Valor Ótimo
Instâncias	Tempo (s)	GAP (%)	Tempo (s)	GAP (%)	
Te40-1	3600	26,85	3600	3,50	–
Te40-2	3600	17,30	3600	8,95	–
Te40-3	3600	20,75	1944	0	1918
Te40-4	3600	10,46	3600	7,67	–

Te40-5	3600	24,74	3600	2,57	–
Te40-6	3600	21,54	3600	3,28	–
Te40-7	3600	15,09	3600	5,44	–
Te40-8	3600	14,51	3600	6,68	–
Te40-9	3600	15,68	3600	9,70	–
Te40-10	3600	13,50	3600	9,50	–

6. Conclusões e trabalhos futuros

Este trabalho apresenta dois novos modelos para o Problema da Árvore Geradora Mínima Capacitada em Níveis (PAGMCN). Os modelos propostos, denominados MBF e MBC, são comparados com o modelo de Gamvros et al. (2002) e, claramente, apresentam um desempenho bem superior a este último, sendo o modelo MBC aquele que apresenta os melhores resultados em todos os testes realizados.

Para trabalhos futuros sugere-se a construção de modelos heurísticos para a resolução do PAGMCN, já que com o crescimento do número de variáveis, mesmo o modelo mais eficiente já começa a ter dificuldades para encontrar a solução ótima.

Referências Bibliográficas

AHUJA, R.K., ORLIN, J.B. & SHARMA, D., Multi-exchange neighborhood structures for the capacitated minimum spanning tree problem. *Mathematical Programming*, 91:71-97,2001.

AMBERG, A. DOMSCHKE, W. & VOSS, S., Capacitated minimum spanning trees: Algorithms using intelligent search. *Combinatorial Optimization: Theory and Practice*, 1:9-40, 1996.

ESAU, L.R. & WILLIAMS, K.C., On teleprocessing system design. Part II – A method for aproximating the optimal networks. *IBM Syst*., *J*. 5:142-147, 1966.

GAMVROS, I., GOLDEN, B.L. & RAGHAVAN, S., An evolutionary approach for the multi-level capacitated minimum spanning tree. *Telecommunications Network Design and Management*, Anandalingam e Raghavan (editores), Kluwer Academic Press, 2003. (Disponível em: http://www.cshcn.umd.edu/publications/technical/raghavan.html. Acesso em 01/06/2004.)

GAVISH, B., Topological design of centralized computer networks: Formulations and algorithms. *Networks*, 12:355-377, 1982.

GAVISH, B., Formulations and algorithms for the capacitated minimal directed tree problem. *Journal of the ACM*, 30:118-132, 1983.

GOUVEIA, L., A *2n* formulation for the capacitated minimal spanning tree problem. *Operations Research*, 4:130-141, 1995.

GOUVEIA, L. & MARTINS, P., The capacitated minimal spanning tree problem: An experiment with a hop-indexed model. *Annals of Operations Research*, 86:271-294, 1999.

GOUVEIA, L. & MARTINS, P., A hierarchy of hop-indexed models for the capacitated minimum spanning tree problem. *Networks*, 35:1-16, 2000.

PAPADIMITRIOU, C.H., The complexity of the capacitated tree problem. *Networks*, 8:217-230, 1978.

SHARAIRA, Y., GENDREAU, M., LAPORTE, G. & OSMAN, I., A tabu search algorithm for the capacitated shortest spanning tree problem. *Networks*, 29:161-171, 1997.

SOUZA, M.C., DUHAMEL C. & RIBEIRO C.C., A GRASP heuristic for the capacitated minimum spanning tree problem using a memory-based local search strategy. *Metaheuristics: Computer Decision-Making*. Kluwer Academic Publishers B.V., pp. 627-657, 2003.