

# USO DE OTIMIZADOR EM PLANILHAS ELETRÔNICAS PARA AUXÍLIO AO PLANEJAMENTO DE LAVRA

Luiz Ricardo Pinto (1)

Fabício Lacerda Biajoli (2)

Otávio Massashi Mine (3)

## Resumo:

Este trabalho apresenta modelos matemáticos implementados em planilhas eletrônicas, utilizando o software de programação matemática What's Best, para resolução de problemas relacionados a mistura (blendagem) de pilhas de minério e planejamento operacional de lavra de mina a céu aberto, ou seja, determinação do ritmo de lavra de cada frente, alocação e dimensionamento de frotas de equipamentos de carga e transporte.

**Palavras-chave:** Planejamento de lavra, Otimização.

## Abstract

This work presents mathematical models implemented in spreadsheets, using the mathematical programming software What's Best, to solve ore blending problems and operational problems in open pit mining design such as truck/shovel assignment, productivity of working benches, and sizing of fleet.

**Keywords:** Mine Design, Optimization.

1) Luiz Ricardo Pinto é Engenheiro de Minas (1983) e Mestre em Engenharia (1988) pela UFOP e Doutor em Ciências – Pesquisa Operacional (1999) pela COPPE / UFRJ . É professor Adjunto do Departamento de Engenharia de Minas da UFOP e Consultor. (2) Fabício Lacerda Biajoli e (3) Otávio Massashi Mine são estudantes de Ciência da Computação na UFOP e bolsistas de iniciação científica da Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais - FAPEMIG.

## 1. Introdução:

Esse artigo trata de dois tipos de modelo de otimização. O primeiro deles é relacionado à mistura de minérios provenientes de pilhas e o segundo trata da determinação do ritmo ideal de lavra das frentes e da alocação de equipamentos.

O primeiro tipo de modelo trata da retirada de minério de diversas pilhas, de modo que seja possível fornecer para usina de tratamento ou um cliente externo, um produto que esteja de acordo com as especificações técnicas relativas à qualidade e quantidade. Dessa forma, é preciso conhecer a quantidade de minério disponível em cada pilha bem como sua composição química e sua granulometria que, nos modelos aqui propostos, pode ser classificada como fino, médio ou granulado.

Diante desse cenário surgem questões do tipo:

- Com quais pilhas deve-se trabalhar para atender as especificações de qualidade e quantidade?
- Conhecendo a quantidade de minério disponível em cada pilha e as especificações requeridas, qual quantidade máxima de mistura pode ser obtida? E qual a quantidade de minério que deve ser retirada de cada pilha, considerando que este número deve ser múltiplo da capacidade da caçamba dos equipamentos de carga?

O segundo tipo de modelo trata da lavra de mina, que geralmente é feita em diversas frentes. É preciso conhecer qual o ritmo a ser implementado em cada frente de forma a atender as especificações da usina de tratamento de minério. Entende-se por ritmo de lavra a produção horária da frente(t/h).

Uma mina convencional possui equipamentos como caminhões, carregadeiras e escavadeiras que viabilizam a lavra nas diversas frentes. A quantidade de equipamentos disponível em condições de operar pode variar por motivo de quebra, manutenção preventiva, atrasos operacionais ou outros.

A partir do citado, podem surgir diversas questões, tais como:

- Com quais frentes deve-se trabalhar para atender as especificações de qualidade e quantidade da usina?
- Com a frota de equipamentos disponíveis e as especificações impostas pela usina, qual é a máxima produção que pode ser obtida? E qual é o ritmo de lavra de cada frente?
- A quantidade de minério retirada das frentes atende à relação estéril/minério estabelecida?
- Existe compatibilidade de alocação entre os equipamentos de carga e transporte?
- Qual o número ideal de equipamentos de carga e transporte para atender à demanda imposta pela usina?

As respostas para as questões apresentadas nos dois casos anteriores, podem ser obtidas mediante a construção de modelos distintos de programação matemática. Pinto e Merschmann(2001) apresentaram modelos matemáticos relacionados ao planejamento operacional de lavra de mina. Pinto (1995) abordou a questão relativa à mistura de minérios provenientes de pilhas.

O modelo de mistura de minérios tem como objetivo determinar quais pilhas deverão entrar na mistura e qual a quantidade a ser

retirada de cada uma delas. Os outros modelos (segundo tipo) têm como objetivo determinar o ritmo de lavra de cada frente e alocar os equipamentos existentes. Estes últimos se diferem pela forma de alocação dos caminhões. Um trabalha com **alocação estática**, onde cada caminhão atenderá uma única frente e descarregará sempre no mesmo ponto, e o outro com **alocação dinâmica**, onde a frente a ser atendida e o seu ponto de descarga são definidos ao término de cada viagem. Em minas que operam dessa forma, o controle da alocação é realizado por um sistema de despacho automático. Todos os modelos apresentados visam a maximização da produção total de minério.

A seguir será feita uma breve apresentação dos modelos matemáticos, já que foram desenvolvidos nos trabalhos citados anteriormente. Já a implementação computacional será apresentada de forma mais detalhada. Tal implementação foi feita utilizando planilha eletrônica e o software What's Best, da Lindo Systems Inc.

Este software trabalha vinculado ao Microsoft Excel e apresenta elevada capacidade de resolução de problemas de grande porte, de natureza linear ou não-linear. Apresenta uma interface simplificada, uma vez que a manipulação de seus comandos é bastante semelhante a do Excel.

## 2. Modelos Matemáticos

### 2.1. Mistura de Minérios

Seja:

$N_i$  o número de caçambadas a serem retiradas de cada pilha  $i$ ;

$q_i$  a quantidade retirada em cada pilha  $i$ ;

$Q_i$  a quantidade disponível em cada pilha  $i$ ;

$t_{vi}$  o teor da variável  $v$  na pilha  $i$  (%);

$l_{inf}_v$  o teor mínimo admissível para a variável  $v$  (%);

$l_{sup}_v$  o teor máximo admissível para a variável  $v$  (%);

$C$  a capacidade da caçamba da carregadeira que fará a mistura;

$G$  o conjunto de pilhas com a granulometria igual à requerida.

*Função Objetivo:* Maximizar 
$$\sum_{i \in G} q_i \quad (1)$$

*Restrições de Qualidade:*

$$l_{inf}_v \leq \frac{\sum_{i \in G} q_i t_{vi}}{\sum_{i \in G} q_i} \leq l_{sup}_v \quad \forall v \quad (2)$$

*Restrições de Quantidade:*

$$q_i \leq Q_i \quad \forall i, i \in G \quad (3)$$

Restrições de número não fracionário de caçambadas:

$$q_i = C.N_i \quad (4) \text{ e } N_i \text{ inteiro } (5) \quad \forall i, i \in G$$

Restrições de não-negatividade:

$$q_i \geq 0 \quad \forall i \quad (6) \quad N_i \geq 0 \quad \forall i \quad (7) \quad Q_i \geq 0 \quad \forall i, i \in G \quad (8)$$

## 2.2. Alocação de Equipamentos de Carga

Este modelo aloca as carregadeiras e determina o número total de caminhões necessários à operação. Todos caminhões têm a mesma capacidade e os equipamentos de carga, apesar de poderem ter capacidades diferentes, são compatíveis com os caminhões.

Seja:

**M** o conjunto das frentes de minério;

**E** o conjunto das frentes de estéril;

**P<sub>i</sub>** o ritmo de lavra da frente i (t/h);

$$x_{ji} = \begin{cases} 0, & \text{se o equipamento de carga } j \text{ não trabalha na frente } i \\ 1, & \text{se o equipamento de carga } j \text{ trabalha na frente } i \end{cases}$$

**t<sub>vi</sub>** o teor da variável v na frente i (%);

**linf<sub>v</sub>** o teor mínimo admissível para a variável v (%);

**lsup<sub>v</sub>** o teor máximo admissível para a variável v (%);

**Pmin<sub>j</sub>** a produção mínima admissível para o equipamento de carga j (t/h);

**Pmax<sub>j</sub>** a produção máxima admissível para o equipamento de carga j (t/h);

**Nmax<sub>i</sub>** o número máximo de caminhões, obtido pela divisão do tempo de deslocamento total pelo tempo de carga, para cada frente i;

**Ncam** o número total de caminhões necessários à operação;

**Cap** a capacidade do caminhão (t);

**TC<sub>i</sub>** o tempo de ciclo total dos caminhões para a frente i (min);

**R** relação estéril/minério mínima requerida;

**Preq** a produção mínima de minério requerida (t/h);

Função Objetivo: Maximizar  $\sum_{i \in M} P_i \quad (9)$

Restrições de Qualidade:

$$\text{linf}_v \leq \frac{\sum_{i \in M} P_i t_{vi}}{\sum_{i \in M} P_i} \leq \text{lsup}_v \quad \forall v \quad (10)$$

Restrições de Alocação:

$$\sum_j x_{ji} \leq 1 \quad \forall i \in M, i \in E \quad (11)$$

$$\sum_{\substack{i \in M \\ i \in E}} x_{ji} \leq 1 \quad \forall j \quad (12)$$

*Restrições de Produção:*

$$\sum_j P_{\min_j} x_{ji} \leq P_i \leq \sum_j P_{\max_j} x_{ji} \quad \forall i \in M, i \in E \quad (13)$$

$$\sum_{i \in M} P_i \geq P_{\text{req}} \quad (14) \quad \frac{\sum_{i \in E} P_i}{\sum_{i \in M} P_i} \geq R \quad (15)$$

*Restrição de número de caminhões por frente:*

$$P_i \leq (60 \cdot \text{Cap} \cdot N_{\max_i}) / TC_i \quad \forall i \in M, i \in E \quad (16)$$

*Restrições de não-negatividade:*

$$P_i \geq 0 \quad \forall i \in M, i \in E \quad (17)$$

**Obs:** o número total de caminhões é dado por:

$$N_{\text{cam}} = \sum_{\substack{i \in M \\ i \in E}} \frac{P_i \cdot TC_i}{60 \cdot \text{Cap}} \quad (18)$$

### 2.3. Alocação de Equipamentos de Carga e Transporte

Nesse modelo, além da alocação dos equipamentos de carga, é realizada a alocação dos caminhões para cada frente. O modelo considera a possibilidade de incompatibilização entre equipamentos de carga e transporte. Caminhões e carregadeiras podem ter diferentes capacidades.

Seja:

**M** o conjunto das frentes de minério;

**E** o conjunto das frentes de estéril;

**P<sub>i</sub>** o ritmo de lavra da frente i (t/h);

$$x_{ji} = \begin{cases} 0, & \text{se o equipamento de carga } j \text{ não trabalha na frente } i \\ 1, & \text{se o equipamento de carga } j \text{ trabalha na frente } i \end{cases}$$

$$d_{ki} = \begin{cases} 0, & \text{se o caminhão } k \text{ não trabalha na frente } i \\ 1, & \text{se o caminhão } k \text{ trabalha na frente } i \end{cases}$$

$$Y_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{se o equipamento de carga } j \text{ não puder trabalhar com o} \\ & \text{caminhão } k \\ 1, & \text{se o equipamento de carga } j \text{ puder trabalhar com o} \\ & \text{caminhão } k \end{cases}$$

$t_{vi}$  o teor da variável  $v$  na frente  $i$  (%);

$linf_v$  o teor mínimo admissível para a variável  $v$  (%);

$lsup_v$  o teor máximo admissível para a variável  $v$  (%);

$Pmin_j$  a produção mínima admissível para o equipamento de carga  $j$  (t/h);

$Pmax_j$  a produção máxima admissível para o equipamento de carga  $j$  (t/h);

$R$  relação estéril minério mínima requerida;

$Preq$  a produção mínima requerida (t/h);

$C_{ki}$  a produtividade do caminhão  $k$  operando na frente  $i$ , obtida pela divisão da sua capacidade pelo seu tempo total de ciclo (t/h).

*Função Objetivo:* Maximizar  $\sum_{i \in M} P_i$

*Restrições de Qualidade:*

$$linf_v \leq \frac{\sum_{i \in M} P_i t_{vi}}{\sum_{i \in M} P_i} \leq lsup_v \quad \forall v \quad (19)$$

*Restrições de Alocação:*

$$\sum_j x_{ji} \leq 1 \quad \forall i \in M, i \in E \quad (20) \quad \sum_{\substack{i \in M \\ j \in E}} x_{ji} \leq 1 \quad \forall j \quad (21)$$

$$\sum_{\substack{i \in M \\ j \in E}} d_{ki} \leq 1 \quad \forall k \quad (22) \quad x_{ji} + d_{ki} - 2y_{jk} \leq 1 \quad \forall i \in M, i \in E, j, k \quad (23)$$

$$d_{ki} \leq \sum_j x_{ji} \quad \forall i \in M, i \in E, k \quad (24)$$

*Restrições de Produção:*

$$\sum_j Pmin_j x_{ji} \leq P_i \leq \sum_j Pmax_j x_{ji} \quad \forall i \in M, i \in E \quad (25)$$

$$\sum_{i \in M} P_i \geq Preq \quad (26) \quad \frac{\sum_{i \in E} P_i}{\sum_{i \in M} P_i} \geq R \quad (27)$$

$$P_i \leq \sum_k C_{ki} d_{ki} \quad \forall i \in M, i \in E \quad (28)$$

*Restrições de não-negatividade:*

$$P_i \geq 0 \quad \forall i \in M, i \in E \quad (17)$$

### **3.Implementação Computacional**

O What's Best é um programa de otimização de modelos matemáticos lineares e não-lineares que trabalha em planilhas eletrônicas, de forma semelhante ao Excel, ou seja, utilizando-se de fórmulas onde cada atributo deve corresponder ao endereço de uma célula da planilha. As variáveis consideradas deverão ser passadas como endereço de células, podendo ser nomeadas ou não. O What's Best possui uma interface VBA(Visual Basic for Applications), que permite ao usuário escrever códigos ou macros, usando linguagem Visual Basic, para executarem seus comandos no Excel.

Após definido o modelo matemático, a implementação computacional usando What's Best deve seguir os seguintes passos:

1. Definir as células ajustáveis, ou seja, as células que representam as variáveis de decisão do problema;
2. Definir a célula "Best Cell", ou seja, aquela que representa a função objetivo do problema, que pode ser de maximização, minimização ou apenas de resolução de equações, este último não possuindo a "Best Cell"; e
3. Definir as células de restrições. Essas células abrigam os comandos do What's Best que representam as restrições.

#### **3.1.Modelo de Mistura de Minérios**

No modelo de mistura de minérios foram definidos os seguintes dados de entrada:

- Teores das variáveis químicas que constituem cada pilha (%);
- Massa total de cada pilha (t);
- Capacidade da caçamba da carregadeira utilizada (t);
- Granulometria do produto em questão (fino, médio e granulado); e
- Produto que se deseja obter com a mistura, com os teores admissíveis para suas variáveis químicas.

As células ajustáveis para este problema são aquelas referentes a quantidade de caçambadas( $N_i$ ) a serem retiradas de cada pilha, de forma que as restrições sejam atendidas.

A "Best Cell" foi definida como o somatório do número de caçambadas retiradas de cada pilha, sendo esta a função objetivo do modelo matemático apresentado.

Foram definidas restrições:

- de qualidade: limites dos teores das variáveis e sua granulometria, ou seja, o tipo do produto(fino, médio ou granulado);
- de quantidade: garantem que a quantidade retirada de cada pilha esteja limitada a quantidade disponível nas mesmas; e
- de não-negatividade: garantem que as variáveis do problema não assumam valores negativos.

No modelo implementado na planilha do Excel, tem-se  $U36 = \text{SOMA}(U6:U35)$ , sendo a célula,  $U36 = \text{WBMAX}$ , a "Best Cell" de maximização do problema, e as células do intervalo  $(U6:U35)$ , as variáveis de decisão ( $N_i$ ), ou seja, as células ajustáveis do modelo que representam o número de caçambadas a serem retiradas de cada pilha.

Caixas de seleção foram usadas para oferecer as opções dos tipos de produto existentes, para que apenas aquelas pilhas do mesmo tipo do produto visado, ou seja, da mesma granulometria, sejam utilizadas na mistura.

As restrições também são definidas em células da planilha, sendo que cada célula pode abrigar somente uma restrição.

As células ajustáveis referentes ao número de caçambadas são do tipo inteiro ( $\text{WBINT}N_i$ ) e positivo.

Os teores das variáveis da mistura são limitados através da restrição  $F39 = \text{WB}(F38, "<=", F37)$  e  $F40 = \text{WB}(F38, ">=" F36)$ , sendo  $F39$  e  $F40$  as células que abrigam as restrições do WB, e as células  $F38$ ,  $F37$  e  $F36$ , as células referentes ao valor dos teores da mistura e valores dos teores máximo e mínimo do produto visado, respectivamente.

A célula  $Y6 = \text{WB}(T6, "<=", R6)$  contém uma das restrições de quantidade da mistura, sendo  $T6$  e  $R6$  as células referentes aos valores retirados ( $q_1$ ) e da massa total da primeira pilha ( $Q_1$ ), respectivamente.

As restrições de não-negatividade são definidas como  $\text{WB}(U6, ">=", 0)$ ,  $\text{WB}(R6, ">=", 0)$  e  $\text{WB}(T6, ">=", 0)$ , sendo as células  $U6$ ,  $R6$  e  $T6$  as representantes de  $N_1$ ,  $Q_1$  e  $q_1$  respectivamente.

As restrições acima também devem ser aplicadas às demais pilhas do modelo.

### 3.2. Modelo de Alocação de Equipamentos de Carga

Nesse modelo, foram definidos os seguintes dados de entrada:

- Teores das variáveis químicas em cada frente (%);
- Teores, mínimo e máximo admissíveis, das variáveis químicas, para o R.O.M. ("run of mine") (%);
- Produção mínima requerida de R.O.M. (t/h);
- Tempos médios de carga e descarga dos caminhões (min);
- Tempos médios de deslocamento dos caminhões vazios e carregados para cada frente (min);
- Capacidade de carga dos caminhões (t);
- Número de caminhões disponíveis;
- Relação estéril/minério requerida (t/t); e
- Produção mínima e máxima de cada equipamentos de carga (t/h).

As células ajustáveis para este problema são aquelas referentes ao ritmo de lavra em cada frente ( $P_i$ ) e aquelas que determinam quais equipamentos de carga deverão ser alocados para cada frente ( $X_{j,i}$ ), sendo estas do tipo binário (0 ou 1).

A "Best Cell" foi definida como o somatório dos ritmos de lavra das frentes de minério, sendo esta a função objetivo do modelo matemático apresentado.

Foram definidas restrições:

- de qualidade: garantem que o produto resultante da mistura dos minérios das diversas frentes esteja dentro dos limites de qualidade exigidos pela usina de tratamento;
- de alocação: garantem que cada frente possua somente um equipamento de carga e que cada um deles atenda somente uma frente;
- número de caminhões por frente: garante que o número de caminhões alocados a cada frente esteja limitado ao número máximo admissível para a mesma;
- de produção: garantem uma produção mínima de minério, uma relação estéril/minério mínima e que os equipamentos de carga trabalhem entre os limites de produção preestabelecidos; e
- de não-negatividade: garantem que as variáveis do problema não assumam valores negativos.

No modelo implementado no Excel, a "Best Cell" é a função objetivo de maximização ( $O19 = WBMAX$ ) do ritmo de lavra das frentes, definida pela soma das células que contém a produção de minério ( $O19 = SOMA(N8:N19)$ ), ou seja, neste exemplo, temos 12 frentes de minério que estão definidas no intervalo  $N8:N19$ ).

As células ajustáveis referentes à alocação de equipamentos são binárias ( $WBBINEscavadeiras$ ), pois apenas vão indicar em quais frentes os equipamentos de carga irão trabalhar (1 se o equipamento estiver alocado à frente e 0 caso contrário). Também são ajustáveis as células referentes ao ritmo de lavra por frente ( $P_i$ ).

A restrição referente a produção mínima de minério foi definida da seguinte forma:  $E35 = WB(O19;">=";C35)$ , sendo  $E35$  a célula que contém a restrição,  $C35$  a que contém a produção mínima de minério requerida e  $O19$  a produção total de minério. As restrições que dizem respeito aos limites de produção preestabelecidos são definidas em duas células, uma vez que se possui um limite mínimo e um máximo. Elas ficam da seguinte forma:  $WB(N8;">=";L18)$ ,  $WB(N8;"<=";M18)$ , ou seja, a produção de minério, valor contido na célula  $N8$  deve ser maior que a produção mínima, contida na célula  $L18$ , e menor que a produção máxima, contida na célula  $M18$ , que são os limites produtivos do equipamento 1 (essa restrição é feita para todos os equipamentos de carga).

As restrições de não-negatividade seguem o mesmo padrão de implementação,  $WB(N8;">=";0)$ , ou seja, a célula  $N8$  (ritmo de lavra da frente 1 ( $P_1$ )) deve conter um valor maior ou igual a zero.

A restrição  $WB(C36;"<=";D36)$  é referente a relação estéril minério, ou seja, o valor contido na célula  $C36$  (obtida pela divisão da produção total de estéril pela produção total de minério) deve ser menor ou igual à relação que se deseja, definida na célula  $D36$ .

A restrição que limita o número de caminhões por frente é definida da seguinte forma:  $WB(L35;"<=";J35)$ , sendo  $L35$  a célula que contém o número de caminhões alocados à frente 1 e  $J35$  a célula que contém o número máximo de caminhões admissível para a mesma. Essa restrição é feita para as demais frentes.

Quanto às restrições de alocação, tem-se as seguintes implementações:  $WB(X8;"<=";1)$ , onde  $X8$  é o somatório dos equipamentos de carga alocados para a frente 1 (essa restrição é

feita para todas as frentes do modelo);  $WB(P25; "<="; 1)$ , onde  $P25$  é o somatório de todas as frentes atendidas pelo equipamento de carga 1 (isso é feito para todos os equipamentos de carga).

A restrição de qualidade garante um produto dentro dos limites preestabelecidos, sendo definida da seguinte maneira:  $WB(B25; "<="; B28)$ ,  $WB(B25; ">="; B29)$ , onde  $B25$  é o teor de uma das variáveis da mistura de minério resultante das diversas frentes, que deve ser maior que o teor mínimo,  $B29$ , e menor que o máximo,  $B28$ , admissível pela usina de tratamento (isso é feito para as demais variáveis químicas).

### 3.3. Modelo de Alocação de Equipamentos de Carga e Transporte

Nesse modelo, foram definidos os seguintes dados de entrada:

- Teores das variáveis químicas em cada frente (%);
- Teores, mínimo e máximo admissíveis, das variáveis químicas (%);
- Produção mínima de minério requerida (t/h);
- Tempos médios de carga e descarga dos caminhões (min);
- Tempos médios de deslocamento dos caminhões vazios e carregados para cada frente (min);
- Capacidade de carga de cada caminhão (esse modelo permite caminhões com capacidades diferentes) (t);
- Compatibilidade entre caminhões e equipamentos de carga;
- Relação estéril/minério (t/t); e
- Produção mínima e máxima dos equipamentos de carga (t/h).

Para esse modelo será considerada, inicialmente, a mesma situação do modelo anterior. A diferença é que, neste caso, tem-se também que realizar a alocação de caminhões às frentes de lavra, limitando a produção de cada frente à produtividade dos caminhões a ela alocados. Para garantir a restrição citada, foi usada a seguinte implementação: inclusão das variáveis de controle  $d_{ki}$  e  $Y_{jk}$ , ambas binárias. A variável de controle  $d_{ki}$  foi usada para que cada caminhão atenda uma única frente de lavra, sendo que uma frente pode ter mais de um caminhão alocado a ela. E  $Y_{jk}$  foi usada para garantir que um caminhão somente poderá trabalhar numa determinada frente, se o seu modelo for compatível com o modelo do equipamento de carga que foi alocado àquela frente. Já a restrição que limita o número de caminhões por frente não está presente neste modelo, uma vez que esta limitação está contemplada em outras restrições.

As células ajustáveis para este problema são aquelas referentes ao ritmo de lavra em cada frente ( $P_i$ ), aquelas que determinam quais equipamentos de carga e caminhões deverão ser alocados ( $X_{ji}$  e  $d_{ki}$ ) às frentes, sendo estas últimas do tipo binário (0 ou 1).

Foram definidas restrições:

- de qualidade: garantem que o produto resultante da mistura dos minérios das diversas frentes esteja dentro dos limites de qualidade exigidos pela usina de tratamento;
- de alocação: fazem com que cada frente possua somente um equipamento de carga ( $X_{ji}$ ), que cada equipamento de carga e

caminhão( $d_{ki}$ ) atendam somente uma frente, que somente caminhões e equipamentos de carga compatíveis trabalhem juntos( $Y_{jk}$ ) e que caminhões só sejam alocados a frentes que estejam produzindo;

- de produção: garantem uma produção mínima de minério, uma relação estéril/minério mínima, que a produção de cada frente fique limitada a produtividade dos caminhões que a ela estão alocados e que os equipamentos de carga trabalhem entre os limites de produção preestabelecidos; e
- de não-negatividade: garantem que as variáveis do problema não assumam valores negativos.

Na implementação deste modelo, a "Best Cell" também é de maximização, assim como no modelo que aloca apenas equipamentos de carga. As restrições que foram acrescentadas ao modelo estão definidas a seguir. A restrição de alocação, que permite somente o trabalho de modelos compatíveis, de caminhões e equipamentos de carga, numa mesma frente, é a seguinte: **WB(P5 + G37 - 2\*B63;"<=";1)**, sendo **P5** a célula que representa a variável de decisão  $X_{ji}$ , **G37** a variável  $d_{ki}$  e **B63** a  $Y_{jk}$ . Outra restrição de alocação presente neste modelo é a que garante alocação de caminhões somente às frentes que estejam produzindo. Ela está definida da seguinte forma: **WB(G37;"<=";X5)**, onde **G37** representa o  $d_{ki}$  da frente 1(isto é, se o caminhão está alocado ou não) e **X5** a célula que contém o somatório dos  $X_{ji}$  da frente 1(isto é, 1 se há algum equipamento de carga alocado e 0 caso contrário). A restrição que limita a produção de cada frente à produtividade dos caminhões a ela alocados pode ser definida da seguinte maneira: **WB(N5;"<=";AM37)**, sendo a célula **N5** o ritmo de lavra na frente 1 e **AM37** o somatório da produtividade dos caminhões a ela alocados. A produtividade dos caminhões( $C_{ki}$ ) é calculada dividindo-se a sua capacidade de carga pelo tempo de ciclo total. Entende-se por tempo de ciclo total o somatório dos tempo de carga, deslocamento carregado, descarga e deslocamento vazio.

## 4. Exemplos

### 4.1. Mistura de Minérios (Blendagem) :

- 10 pilhas de minério;
- Capacidade da caçamba: 30 toneladas;
- Teor das variáveis envolvidas no problema:

Pilhas	Var 1	Var 2	Var 3	Var 4	Var 5	Var 6	Var 7	Var 8	Var 9	Var 10	Var 11	Var 12
1	12.00%	3.30%	3.00%	7.60%	0.90%	3.30%	0.80%	4.20%	7.60%	11.00%	14.40%	17.80%
2	5.50%	6.20%	4.00%	8.01%	1.40%	6.30%	11.00%	1.40%	1.49%	1.58%	1.67%	1.76%
3	6.00%	1.10%	1.10%	7.50%	5.60%	11.00%	1.30%	2.60%	3.90%	5.20%	6.50%	7.80%
4	4.00%	7.60%	2.00%	4.00%	4.30%	9.00%	2.20%	4.50%	6.80%	9.10%	11.40%	13.70%
5	3.30%	4.10%	4.90%	5.70%	6.50%	7.30%	8.10%	8.90%	9.70%	10.50%	11.30%	3.10%
6	4.30%	4.45%	4.60%	4.75%	4.90%	5.05%	5.20%	5.35%	5.50%	5.65%	5.80%	5.95%
7	7.70%	3.00%	5.90%	9.10%	8.00%	1.00%	6.50%	1.10%	2.50%	3.90%	5.30%	6.70%
8	4.30%	3.15%	2.40%	5.60%	4.30%	2.10%	6.65%	1.60%	1.70%	1.80%	1.90%	2.00%
9	4.60%	3.30%	2.45%	6.10%	4.32%	3.20%	6.80%	2.10%	2.50%	2.90%	3.30%	3.70%
10	4.90%	3.45%	2.50%	6.60%	4.34%	4.30%	6.95%	2.60%	2.65%	2.70%	2.75%	2.80%

Figura 1 - Quadro com os teores das variáveis químicas das pilhas

- Tipo do produto e teores mínimo, máximo e da mistura:



Figura 5 - Quadro com os teores das variáveis químicas das frentes

- Teores, mínimo e máximo, admissíveis para as variáveis químicas:

Teor Min.	2.40%	3.47%	0.50%	2.70%	0.93%	2.80%	0.86%	1.10%	1.00%	1.21%
Teor Max.	4.20%	5.00%	2.75%	5.13%	1.20%	3.25%	1.40%	1.37%	2.53%	2.20%

Figura 6 - Quadro com os teores, mínimo e máximo, admissíveis para as variáveis químicas

- Tempos de deslocamento dos caminhões e resultados obtidos:

Frentes	Tdesl Car	Tdesl Vaz	Ttotal	Num. Max	Cap (t/h)	Num. Cam
1	2.6	2.9	8.8	3.52	340.91	0.00
2	2.7	3	9	3.60	333.33	3.30
3	2.8	3.1	9.2	3.68	326.09	2.76
4	2.9	3.2	9.4	3.76	319.15	0.00
5	3	3.3	9.6	3.84	312.50	3.20
6	2.6	2.8	8.7	3.48	344.83	0.00
7	2.3	3.5	9.1	3.64	329.67	3.34
8	2.7	3.4	9.4	3.76	319.15	0.00
9	2.4	3.1	8.8	3.52	340.91	2.93
10	2.9	3.2	9.4	3.76	319.15	2.82
11	2.1	3.6	9	3.60	333.33	0.00
12	2.5	3.5	9.3	3.72	322.58	0.00
13	2.6	3.7	9.6	3.84	312.50	2.88
14	2.3	3.4	9	3.60	333.33	2.70
15	2.4	3.2	8.9	3.56	337.08	0.00
16	2.5	3.4	9.2	3.68	326.09	0.00
17	2.8	3.8	9.9	3.96	303.03	0.00

Figura 7 - Quadro com os tempos de deslocamento e resultados obtidos

A coluna Num. Cam. da figura 7 apresenta o número de caminhões necessários para se obter a produção máxima. A soma dos caminhões alocados as suas respectivas frentes é igual a 24, ou seja, dos 25 caminhões disponíveis, 24 foram utilizados.

Frentes	PminXij	PmaxXij	Pi		1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0
2	400	1100	1100		0	0	0	0	0	0	0	1
3	300	900	900		0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0
5	350	1000	1000		0	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0
7	400	1100	1100		0	0	0	0	0	0	0	1
8	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0
9	350	1000	1000		0	0	0	0	0	1	0	0
10	300	900	900		0	0	1	0	0	0	0	0
11	0	0	0	Total Min.	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	6000	0	0	0	0	0	0	0	0
13	300	900	900		0	0	0	1	0	0	0	0
14	300	900	900		1	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	Total Est.	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	1800	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 8 - Quadro com os resultados obtidos - produtividade e alocação de carregadeiras

A figura 8 apresenta o ritmo de lavra em cada frente ( $P_i$ ) e as carregadeiras/escavadeiras que foram alocadas ( $X_{ji}$ ).

O tempo gasto para resolver este problema foi de 2 segundos e a produção total de minério foi de 6000 toneladas/hora.

#### 4.3. Alocação de Equipamentos de Carga e Transporte:

Os dados deste problema são os mesmos do problema apresentado no exemplo 4.2 (figuras 4, 5 e 6), diferenciando no que diz respeito a compatibilidade de caminhões e equipamentos de carga, quantidade de caminhões disponíveis, capacidades dos mesmos e nos resultados obtidos.

- Quadro de compatibilidade de caminhões e equipamentos de carga e capacidade dos caminhões:

		Carregadeira / Escavadeira									
Caminhões		1	2	3	4	5	6	7	8	Caminhões	Capacidade
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	50
2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	2	50
3	1	1	1	1	1	0	0	0	0	3	50
4	1	1	1	1	1	0	0	0	0	4	50
5	1	1	1	1	1	0	0	0	0	5	50
6	1	1	1	1	1	0	0	0	0	6	50
7	1	1	1	1	1	0	0	0	0	7	50
8	1	1	1	1	1	0	0	0	0	8	50
9	1	1	1	1	1	0	0	0	0	9	50
10	1	1	1	1	1	0	0	0	0	10	50
11	1	1	1	1	1	0	0	0	0	11	50
12	1	1	1	1	1	0	0	0	0	12	50
13	1	1	1	1	1	0	0	0	0	13	50
14	1	1	1	1	1	0	0	0	0	14	50
15	1	1	1	1	1	0	0	0	0	15	50
16	0	0	0	0	0	1	1	1	1	16	80
17	0	0	0	0	0	1	1	1	1	17	80
18	0	0	0	0	0	1	1	1	1	18	80
19	0	0	0	0	0	1	1	1	1	19	80
20	0	0	0	0	0	1	1	1	1	20	80
21	0	0	0	0	0	1	1	1	1	21	80
22	0	0	0	0	0	1	1	1	1	22	80
23	0	0	0	0	0	1	1	1	1	23	80
24	0	0	0	0	0	1	1	1	1	24	80
25	0	0	0	0	0	1	1	1	1	25	80
26	0	0	0	0	0	1	1	1	1	26	80
27	0	0	0	0	0	1	1	1	1	27	80
28	0	0	0	0	0	1	1	1	1	28	80
29	0	0	0	0	0	1	1	1	1	29	80
30	0	0	0	0	0	1	1	1	1	30	80

Figura 9 - Quadro de compatibilidade entre caminhões e carregadeiras

Na figura 9 temos a compatibilidade, de caminhões e equipamentos de carga, representada pelo número 1.

- Resultados obtidos:

Frentes	PminjXij	PmaxjXij	Pi		1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0
2	300	900	900		0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0
4	350	1000	1000		0	0	0	0	1	0	0	0
5	400	1100	1100		0	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0
8	400	1100	1100		0	0	0	0	0	0	0	1
9	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0
10	300	900	900		0	1	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	Total Min.	0	0	0	0	0	0	0	0
12	350	1000	1000	6000	0	0	0	0	0	1	0	0
13	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0
16	300	900	900	Total Est.	0	0	0	1	0	0	0	0
17	300	900	900	1800	1	0	0	0	0	0	0	0

Figura 10 - Quadro com os resultados obtidos - produtividade e alocação de carregadeiras

A figura 10 apresenta o ritmo de lavra em cada frente ( $P_i$ ) e as carregadeiras/escavadeiras que foram alocadas ( $X_{ji}$ ).

O tempo gasto para resolver este problema foi de 10 segundos e a produção total de minério foi de 6000 toneladas/hora.

O quadro da figura 11 mostra os caminhões que foram alocados para suas respectivas frentes, bem como o total utilizado por frente.

Frentes	Caminhão	Caminhão	Caminhão	Caminhão	Caminhão	...	Caminhão	Caminhão	Caminhão	Caminhão	Cam. por frente
	1	2	3	4	5	...	27	28	29	30	
1	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	3
3	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	...	0	0	0	1	2
5	0	0	0	0	0	...	1	0	0	0	3
6	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	...	0	1	1	0	3
9	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0
10	0	1	0	0	0	...	0	0	0	0	3
11	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	2
13	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	3
17	0	0	0	1	1	...	0	0	0	0	3

Figura 11 - Quadro com os resultados obtidos - alocação de caminhões

O total de caminhões alocados foi 22 e o tempo gasto para a solução deste problema foi de 10 segundos.

## 5. Conclusões

A implementação dos modelos apresentados, em planilhas eletrônicas utilizando o software de programação matemática What's Best, mostrou-se bastante simples, independente do número de restrições envolvidas.

Como vimos, o software What's Best apresentou-se bastante eficiente na resolução dos exemplos apresentados.

Ainda hoje, a maioria das minas brasileiras ainda utilizam métodos baseados em tentativas e erros, o que demanda muito tempo, além de não apresentar uma solução otimizada para o problema.

O What's Best se apresenta como uma das diversas soluções existentes hoje no mercado que visam a otimização das atividades dessas empresas, utilizando o método de programação matemática.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais - FAPEMIG - pelo suporte financeiro ao projeto que originou este artigo.

## Referências Bibliográficas

1- PINTO, L. R. Uso de Técnicas de Pesquisa Operacional na Otimização das Operações de Lavra. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE MINERACÃO, 6. 1995. Salvador. Coletânea de trabalhos técnicos. Salvador: IBRAM, 1995. P. 53-61.

2- PINTO, L. R. e Merschmann, L. H. C. Planejamento Operacional da Lavra de Mina Usando Modelos Matemáticos. In: Artigo publicado na revista REM:R. Esc. Minas, Ouro Preto, 54(3): 211-214, jul. set. 2001.