

UM MODELO DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA PARA O PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DE LAVRA CONSIDERANDO O MÉTODO DE LAVRA SELETIVA

GUIDO PANTUZA JR (UFOP)

gpantuza@yahoo.com.br

MARCONE JAMILSON FREITAS SOUZA (UFOP)

marcone@iceb.ufop.br

Resumo: ESTE TRABALHO APRESENTA UM NOVO MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR POR METAS PARA O PROBLEMA DE PLANEJAMENTO OPERACIONAL DE LAVRA (POLAD), CONSIDERANDO O MÉTODO DE LAVRA SELETIVA. NESTE PROBLEMA, CADA FRENTE PODE SER CONSTITUÍDA OU POR MINÉRIO, OU POR ESTÉRIL OU POR AMBOS. ALÉM DA QUALIDADE DIFERENTE A CADA FRENTE, O RITMO DE LAVRA DEVE SER REALIZADO DE FORMA PROPORCIONAL, DE FORMA A GERAR UMA ALIMENTAÇÃO QUE ATENDA AS METAS DE QUALIDADE E PRODUÇÃO PRÉ-ESTABELECIDAS. O MODELO DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA DESENVOLVIDO FOI IMPLEMENTADO NO MODELADOR E OTIMIZADOR LINGO 10.0, INTERFACEANDO COM PLANILHAS DO EXCEL, POSSIBILITANDO A UTILIZAÇÃO E EXPORTAÇÃO DE DADOS EM UM AMBIENTE FAMILIAR ÀS EMPRESAS DE MINERAÇÃO. O MODELO DESENVOLVIDO FOI VALIDADO UTILIZANDO-SE DADOS DE OUTROS TRABALHOS ENCONTRADOS NA LITERATURA. OS RESULTADOS ENCONTRADOS MOSTRAM QUE É POSSÍVEL POSSÍVEL OTIMIZAR AS METAS REQUERIDAS, AS OPERAÇÕES DE TRANSPORTE E CARREGAMENTO, POSSIBILITANDO ÀS EMPRESAS DE MINERAÇÃO UMA MELHOR UTILIZAÇÃO DE SEUS RECURSOS.

Palavras-chaves: PLANEJAMENTO DE LAVRA; PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA; PROGRAMAÇÃO LINEAR POR METAS; LAVRA SELETIVA.

A MATHEMATICAL PROGRAMMING MODEL FOR THE PROBLEM OPEN-PIT- MINING PLANNING WHEREAS SELECTIVE MINING METHOD

Abstract: *THIS PAPER PRESENTS A NEW MODEL OF GOAL PROGRAMMING TO THE PROBLEM OF OPEN PIT MINING PLANNING (POLAD) CONSIDERING THE SELECTIVE MINING METHOD. IN THIS PROBLEM, IT IS KNOWN THAT EACH PIT HAS DIFFERENT CHARACTERISTICS OF QUALITY AND THE EXPLOITATION MUST BE DONE PROPORTIONALLY, CREATING A FEED THAT MEETS QUALITY GOALS AND PRODUCTION PRESET. THE MATHEMATICAL PROGRAMMING MODEL DEVELOPED WAS IMPLEMENTED IN MODELER AND OPTIMIZER LINGO 10.0, INTERFACING WITH EXCEL SPREADSHEETS, ALLOWING THE USE AND EXPORT DATA IN A FAMILIAR ENVIRONMENT FOR MINING COMPANIES. THE SYSTEM WAS VALIDATED USING DATA FROM OTHER STUDIES IN THE LITERATURE. THEREFORE THIS PAPER PROPOSES A NEW FORMULATION FOR SOLVING THE PROBLEM POSED BY DEMONSTRATING THAT IT IS POSSIBLE TO OPTIMIZE THE GOALS REQUIRED IN THE TRANSPORT AND LOADING, ALLOWING MINING COMPANIES TO BETTER USE ITS RESOURCES.*

Keyword: *OPEN-PIT-MINING PLANNING; MATHEMATICAL PROGRAMMING; GOAL PROGRAMMING; SELECTIVE MINING.*

1. Introdução

Em um cenário competitivo, as empresas necessitam otimizar seus processos produtivos e gerenciar, eficientemente, seus recursos. Isto é necessário para assegurar a qualidade final dos produtos e a saúde financeira da empresa garantindo assim a sua sobrevivência.

Segundo Slack *et al.* (2002), uma forma de garantir a eficácia e a eficiência dos processos e a conformidade dos produtos de acordo com os requerimentos dos clientes é por meio do planejamento operacional, ou planejamento de curto prazo, da produção.

Segundo Tubino (2009), com um planejamento operacional eficiente é possível otimizar o uso de recursos e minimizar os gastos operacionais.

No caso de empresas que desenvolvem atividades no setor da mineração, e em especial, lavra a céu aberto, o problema de planejamento operacional da produção – conhecido como planejamento operacional de lavra – consiste em determinar o ritmo de lavra de cada frente de produção (lavra), as restrições operacionais da mina, as especificações de qualidade e a meta de produção para o produto requerido utilizando o menor número de caminhões possível.

Em todos os trabalhos encontrados na literatura, o material lavrado em cada frente é de somente um tipo, isto é, de minério ou de estéril (material sem valor comercial). Entretanto, é comum encontrar-se em uma frente, tanto minério quanto estéril. Nessas situações, o planejador de produção muitas vezes classifica o material encontrado em apenas um tipo, isto é, ou somente minério ou somente estéril. Essa classificação depende do percentual encontrado do parâmetro químico que define o minério. Se a média ponderada desse parâmetro na mistura envolvendo minério e estéril for inferior a um dado valor, o material encontrado na frente é classificado apenas como estéril, caso contrário, é considerado minério. Entretanto, para não haver perda de material com material comercial, o ideal é lavar (produzir ou explorar) tanto minério quanto estéril em uma mesma frente. Esse é o chamado método de lavra seletiva.

A resolução manual deste problema é impraticável em situações reais, dada a complexidade do mesmo e a necessidade de tomada de decisão em tempo hábil. Para apoiar a tomada de decisão do planejador na otimização desse processo produtivo, são indicadas técnicas de pesquisa operacional. Segundo Arenales *et al.* (2007), a pesquisa operacional envolve a aplicação de métodos científicos a problemas complexos para auxiliar no processo de tomada de decisões, tais como planejar e operar sistemas que requerem alocações eficientes de recursos escassos.

Para os problemas que envolvem múltiplos objetivos destaca-se a programação linear por metas (PLM), ou *goal programming*. Segundo Moraes *et al.* (2006), uma das diferenças significativas entre a PLM e a programação linear clássica (PL) está na função objetivo. A PL demanda que o modelo persiga apenas um único objetivo a ser otimizado. Na PLM, por outro lado, não se busca somente otimizar a função objetivo diretamente; mas, também, a minimização dos desvios no alcance das metas. Para esse fim, são utilizadas as chamadas variáveis de desvio, as quais medem a “distância” entre os objetivos estabelecidos.

Neste trabalho, contribui-se com a formulação de um modelo de programação linear por metas que leva em consideração o método de lavra seletiva para o planejamento de lavra.

O modelo proposto é baseado em programação linear por metas (PLM), ou *goal programming*. Isso se deve ao fato de que o problema tratado envolve múltiplos objetivos, no caso, a minimização dos desvios de produção e de qualidade, bem como a quantidade de caminhões utilizados no processo.

O restante deste trabalho está organizado como segue. A seção 2 apresenta os trabalhos relacionados encontrados na literatura. Na seção 3 é descrito o problema em estudo. O modelo proposto para tratar o problema é apresentado na seção 4. Na seção 5 são apresentadas as instâncias utilizadas bem como os resultados encontrados. Na última seção são apresentadas as conclusões.

2. Trabalhos Relacionados

Devido à importância e à complexidade do planejamento de lavra, segundo Crawford e Hustrulid (1979), o desafio de otimização deste processo tornou-se um dos grandes problemas enfrentados pelas empresas do setor mineral. Inúmeros trabalhos tratando desse problema podem ser encontrados na literatura, dentre os quais apontamos: White *et al.* (1982), White e Olson (1986), Chanda e Dagdelen (1995), Pinto e Merschmann (2001), Merschmann (2002), Pinto *et al.* (2003), Costa *et al.* (2005), Costa *et al.* (2004), Guimarães *et al.* (2007) e Pantuza e Souza (2009).

O trabalho proposto inicialmente por White *et al.* (1982) apresenta um modelo de programação linear para minimizar o número de caminhões necessários através de restrições relacionadas à continuidade do fluxo de material pelos pontos de carga e descarga e às respectivas capacidades produtivas.

No trabalho de White e Olson (1986) é apresentado um modelo de programação linear, o qual pode ser dividido em duas partes. Na primeira parte do modelo, realiza-se uma otimização do problema da mistura de minérios. O objetivo é a minimização dos custos relacionados à qualidade, transporte e estocagem do material. Ele considera o ritmo de lavra, o atendimento às taxas de alimentação da usina de beneficiamento e de qualidade da mistura. A segunda parte é semelhante ao modelo de White *et al.* (1982), diferenciando-se por utilizar como variável de decisão a quantidade de material transportado por hora, ao invés do número de caminhões por hora, que utilizam uma rota, além da presença de pilhas de estocagem.

Em Chanda e Dagdelen (1995) é apresentado um modelo de programação linear por metas, no qual se deseja minimizar os desvios em relação às metas de produção e qualidade. Segundo os autores, esta técnica é mais adequada à realidade das minerações, pois seu objetivo é fazer com que a solução ótima seja a mais próxima possível das metas de produção e qualidade requeridas.

O modelo não linear de Pinto e Merschmann (2001), o qual busca maximizar o ritmo de lavra, contempla o problema da mistura e a alocação de equipamentos de carga e o atendimento da relação estéril/minério mínima. Ele aborda o problema utilizando o sistema de alocação estática de caminhões.

Merschmann (2002) aborda o problema de forma semelhante à Pinto e Merschmann (2001), porém também consideram o sistema de alocação dinâmica de caminhões.

Pinto *et al.* (2003) contemplam o problema da mistura e a alocação de equipamentos de carga, a alocação dinâmica de caminhões e o atendimento da relação estéril/minério mínima. Ele apresenta um modelo para o problema da mistura no qual opera um equipamento de carga. Assim, a quantidade de minério a ser retirada de cada pilha deve ser múltipla da capacidade da caçamba do equipamento de carga.

Costa *et al.* (2005) desenvolvem um modelo de programação linear por metas, cujo objetivo é determinar o ritmo de lavra de cada frente, considerando a alocação de equipamentos de carga e transporte, de modo a fornecer à usina de beneficiamento uma alimentação adequada. Ele adotou o sistema de alocação estática de caminhões, por ser geralmente utilizado em minerações de pequeno e médio porte, devido à simplificação das operações e ao alto custo de implantação de um sistema de despacho eletrônico de caminhões.

Costa *et al.* (2004) apresentam um modelo de programação linear por metas, o qual busca a minimização dos desvios em relação às metas de produção e qualidade. O ritmo de lavra de cada frente é determinado considerando-se a alocação dinâmica de caminhões, a qual é feita de forma a reduzir a formação de filas.

Em Guimarães *et al.* (2007), um modelo de programação linear por metas baseado em Costa *et al.* (2004), é apresentado considerando uma frota de caminhões heterogênea, ou seja, com diferentes capacidades. A capacidade de transporte de um mesmo caminhão também varia de acordo com o material transportado (minério ou estéril).

No trabalho de Pantuza e Souza (2009), um modelo de programação linear baseado em Guimarães *et al.* (2007) é proposto. Nesse trabalho uma abordagem multiobjetivo é utilizada para a resolução do problema. Ele considera dois pontos de descarga para o material lavrado; o tempo de ciclo dos caminhões como uma variável que depende da frente de lavra, do tipo de equipamento, e do tipo de material transportado. Isto porque cada modelo de caminhão normalmente leva um tempo diferente para percorrer um mesmo trajeto e este tempo também é influenciado pelo tipo de carga (minério ou estéril). Os autores também utilizaram modelos de otimização em redes para a alocação dinâmica dos caminhões.

3. Problema em estudo

O problema em estudo trata do problema de planejamento operacional de lavra de uma mina a céu aberto, considerando alocação dinâmica de caminhões (POLAD). Nesse problema deseja-se determinar o ritmo de lavra de cada frente, ou seja, o número de viagens a serem realizadas por cada tipo de caminhão em cada frente em uma empresa do setor de mineração.

Este ritmo deve atender algumas especificações químicas e/ou físicas, tais como a percentagem de determinados elementos químicos e a granulometria do minério, bem como a quantidade de minério a ser lavrado, além da determinação da quantidade e tipo de caminhões que deverão ser carregados em cada frente de lavra.

Tais especificações variam de acordo com cada frente de lavra. Logo, o planejamento de lavra também envolve o gerenciamento dos equipamentos de carga e transporte. Ou seja, é necessário, também, determinar a frente de minério em que certo equipamento de carga

deverá ser alocado, assim como determinar o número de viagens por frente de lavra de cada equipamento de transporte.

Como este gerenciamento de equipamentos deve respeitar as restrições operacionais da mina, as metas de qualidade e de produção, a quantidade de caminhões e qual frente de lavra utilizar serão tratados como um problema de programação linear por metas para se atingir um resultado

Neste trabalho considera-se dois pontos de descarga para o material lavrado, sendo o britador primário para descarga de minério e a pilha de estéril para descarga de estéril. Porém, ao contrário de outros trabalhos (como White *et al.* (1982), White e Olson (1986), Chanda e Dagdelen (1995), Pinto e Merschmann (2001), Merschmann (2002), Pinto *et al.* (2003), Costa *et al.* (2005), Costa *et al.* (2004) e Guimarães *et al.* (2007)), considera-se o tempo de ciclo dos equipamentos como uma variável que depende do tipo de material transportado (minério ou estéril), do modelo do equipamento de transporte, da frente de origem e do ponto de descarga.

Isso se deve ao fato de que, além de cada modelo de caminhão levar um tempo diferente para percorrer um mesmo trajeto e esse tempo também ser influenciado pelo tipo de carga (minério ou estéril), uma mesma mina pode possuir diferentes pontos de descarga para minério e estéril.

A totalidade dos trabalhos encontrados na literatura considera a existência apenas de dois tipos de frentes de produção. Essas frentes podem ser de minério ou de estéril. Isso significa que todo o material retirado da frente de minério será transportado para o britador (ponto de descarga do minério) e que todo o material retirado das frentes de estéril será depositado na pilha de estéril (ponto de descarga do material sem valor comercial). Quando em uma frente existe mais de um tipo de material, ela é classificada em frente de minério ou de estéril de acordo com o teor médio do parâmetro químico que define o minério. Com essa metodologia, a empresa perde produção ao classificar como estéril um material que contém minério. Entretanto, com o avanço tecnológico, as empresas do setor mineral passaram a adotar o método de lavra seletiva.

Este método de lavra consiste na retirada de minério e estéril de uma mesma frente de produção. Ou seja, a frente de produção pode conter minério e estéril ao mesmo tempo. Nesse caso, para retirar o material que se encontra na parte inferior, antes é necessário retirar todo o material da parte superior. Por exemplo, para retirar o minério que se encontra na parte inferior de uma frente mista, antes é necessário retirar todo o estéril que cobre o minério.

O presente trabalho difere dos demais, uma vez que prevê o método de lavra seletivo. Com isso, contribui-se para o aumento da produtividade das empresas do setor mineral, além de diminuir a quantidade de rejeito.

4. Modelo de programação matemática proposto

Nesta seção é estendido o modelo de programação matemática para o POLAD, proposto em Pantuza e Souza (2009). São incluídas restrições que permitem o método de lavra seletiva, bem como o tempo de ciclo relacionado com o material transportado, tipo do caminhão, a distância entre a origem e o destino da viagem realizada e dois pontos de descarga (britador e pilha de estéril).

4.1 Parâmetros do modelo

Para este modelo, sejam os seguintes parâmetros de entrada:

M	: Conjunto de frentes de minério;
E	: Conjunto de frentes de estéril;
ME	: Conjunto de frentes de minério/estéril;
EM	: Conjunto de frentes de estéril/minério;
F	: Conjunto de frentes formado por $M \cup E$
S	: Conjunto de parâmetros de qualidade analisados no minério;
C	: Conjunto de equipamentos de carga;
V	: Conjunto de equipamentos de transporte;
T	: Conjunto de tipo de material a ser lavrado;
N	: Conjunto de nós formado pelo conjunto F mais os nós $b, p, início$ e fim ;
B	: Nó que representa o britador primário (ponto de descarga de minério);
P	: Nó que representa a pilha de estéril (ponto de descarga de estéril);
$início$: Nó fictício que representa o nó origem inicial;
fim	: Nó fictício que representa o nó destino final;
m	: Representa o tipo de material minério;
e	: Representa o tipo de material estéril;
Pr	: Ritmo de lavra recomendado (t/h);
Pl	: Ritmo de lavra mínimo (t/h);
Pu	: Ritmo de lavra máximo (t/h);
α^-	: Penalidade por desvio negativo da produção;
α^+	: Penalidade por desvio positivo da produção;
β_j^-	: Penalidade por desvio negativo para o parâmetro j na mistura;
β_j^+	: Penalidade por desvio positivo para o parâmetro j na mistura;
λ_j^-	: Penalidade por desvio negativo para o parâmetro j na mistura em relação ao limite mínimo;
λ_j^+	: Penalidade por desvio positivo para o parâmetro j na mistura em relação ao limite máximo;
ω_l	: Penalidade por caminhão utilizado;
t_{ij}	: Teor do parâmetro j na frente i (%);
tr_j	: Teor recomendado para o parâmetro j na mistura (%);
tl_j	: Teor mínimo admissível para o parâmetro j na mistura (%);
tu_j	: Teor máximo admissível para o parâmetro j na mistura (%);
Qum_i	: Ritmo de lavra máximo de minério para a frente i (t/h);
Que_i	: Ritmo de lavra máximo de estéril para a frente i (t/h);
Rem	: Relação estéril/minério requerida;
Clm_k	: Produção mínima de minério do equipamento de carga k (t/h);

- Cum_k : Produção máxima de minério do equipamento de carga k (t/h);
 Cle_k : Produção mínima de estéril do equipamento de carga k (t/h);
 Cue_k : Produção máxima de estéril do equipamento de carga k (t/h);
 $capml$: Capacidade do caminhão l transportando minério (t);
 $capel$: Capacidade do caminhão l transportando estéril (t);
 Tx : Taxa máxima permitida de utilização do caminhão l (%);
 $capm_l$: Capacidade de minério dos caminhões l ;
 $capel_l$: Capacidade de estéril dos caminhões l ;
 $Tv_{i,l,o,d}$: Tempo de viagem do caminhão l do nó de origem o até o nó de destino d ;
 Tc_l : Tempo de ciclo total do caminhão l para todas as viagens para ele alocadas;
 g_{lk} : 1 se o caminhão l é compatível com a carregadeira k e 0, caso contrário.

4.2 Variáveis de decisão

O modelo proposto considera as seguintes variáveis de decisão:

- x_{it} : Ritmo de lavra da frente i do material t (t/h);
 y_{ik} : $\begin{cases} 1 & \text{se o equipamento de carga } k \text{ opera na frente } i; \\ 0 & \text{caso contrário;} \end{cases}$
 n_{iil} : Número de viagens que um caminhão l realiza à frente i carregando o material do tipo t ;
 P^- : Desvio negativo do ritmo de lavra em relação ao recomendado (t/h);
 P^+ : Desvio positivo do ritmo de lavra em relação ao recomendado (t/h);
 de_j^- : Desvio negativo do parâmetro j na mistura em relação ao limite mínimo (t/h);
 de_j^+ : Desvio positivo do parâmetro j na mistura em relação ao limite máximo (t/h);
 A : $\begin{cases} 1 & \text{se o caminhão } l \text{ começa carregando estéril;} \\ -1 & \text{se o caminhão } l \text{ começa carregando minério;} \end{cases}$
 d_j^- : Desvio negativo do parâmetro j na mistura (t/h);
 d_j^+ : Desvio positivo do parâmetro j na mistura (t/h);
 $z_{l,o,d}$: Número de vezes que o caminhão l irá percorrer o arco (o,d) ;
 u_l : $\begin{cases} 1 & \text{se veículo } l \text{ é usado;} \\ 0 & \text{caso contrário;} \end{cases}$
 v_{it} : $\begin{cases} 1 & \text{se o material do tipo } t \text{ pode ser lavrado na frente } i; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

4.3 Função objetivo

A Eq. (4.1) visa minimizar os desvios de produção e qualidade em relação às metas de produção e qualidade, bem como o número de caminhões e de equipamentos de carga utilizados.

$$\min (\alpha^- P^- + \alpha^+ P^+) + \sum_{j \in S} (\beta_j^- d_j^- + \beta_j^+ d_j^+ + \lambda_j^- de_j^- + \lambda_j^+ de_j^+) + \sum_{l \in V} \omega_l u_l + \sum_{i \in F} \sum_{t \in T} v_{it} \quad (4.1)$$

4.4 Restrições de controle da qualidade

As restrições (4.2) e (4.3) definem limites máximos e mínimos para os parâmetros de controle, com permissão para extrapolação de tais limites, por meio das variáveis de desvio negativo e positivo de especificação. Pelo conjunto de restrições (4.4) objetiva-se alcançar a meta de teor dos parâmetros de controle.

$$\sum_{i \in M} (t_{ij} - tu_j) x_{i,m} - de_j^+ \leq 0 \quad \forall j \in S \quad (4.2)$$

$$\sum_{i \in M} (t_{ij} - tl_j) x_{i,m} + de_j^- \geq 0 \quad \forall j \in S \quad (4.3)$$

$$\sum_{i \in M} (t_{ij} - tr_j) x_{i,m} + d_j^- - d_j^+ = 0 \quad \forall j \in S \quad (4.4)$$

4.5 Restrições de ritmo de produção

As restrições (4.5) impedem que o ritmo de lavra seja maior que a capacidade de armazenamento da mina. Pela equação (4.6) visa-se alcançar o ritmo de lavra recomendado. As restrições (4.7) e (4.8) asseguram que o ritmo de lavra em cada frente não supera a quantidade de material disponível para a frente. A restrição (4.9) assegura o atendimento à relação estéril / minério recomendada.

$$\sum_{i \notin E} x_{i,m} \leq Pu \quad (4.5)$$

$$\sum_{i \notin E} x_{i,m} + dp^- - dp^+ = Pr \quad (4.6)$$

$$x_{i,m} \leq Qum_i \quad \forall i \in F \quad (4.7)$$

$$x_{i,e} \leq Que_i \quad \forall i \in F \quad (4.8)$$

$$\sum_{i \notin M} x_{i,e} - rem \sum_{i \notin E} x_{i,m} \geq 0 \quad (4.9)$$

4.6 Restrições operacionais das carregadeiras

O conjunto de restrições (4.10) define que em cada frente há um único equipamento de carga, enquanto que (4.11) define que cada equipamento de carga opera no máximo em uma única frente. As restrições (4.12) e (4.13) impedem que o ritmo de lavra em cada frente seja maior que a produtividade da carregadeira nela alocada. As restrições (4.14) e (4.15) asseguram que uma carregadeira só pode ser alocada a uma frente se sua produtividade mínima for satisfeita. As restrições (4.16) referem-se às compatibilidades dos caminhões com os equipamentos de cargas alocados às frentes.

$$\sum_{k \in C} y_{ik} \leq 1 \quad \forall i \in F \quad (4.10)$$

$$\sum_{i \in F} y_{ik} \leq 1 \quad \forall i \in F \quad (4.11)$$

$$x_{i,m} - \sum_{k \in C} Cum_k y_{ik} \leq 0 \quad \forall i \notin E \quad (4.12)$$

$$x_{i,e} - \sum_{k \in C} Cue_k y_{ik} \leq 0 \quad \forall i \notin M \quad (4.13)$$

$$x_{i,m} - \sum_{k \in C} Clm_k y_{ik} \geq 0 \quad \forall i \notin E \quad (4.14)$$

$$x_{i,e} - \sum_{k \in C} Cle_k y_{ik} \geq 0 \quad \forall i \notin M \quad (4.15)$$

$$Tc_l - 60 \sum_{k \in C, g_{ik}=1} y_{ik} \leq 0 \quad \forall l \in V, i \in F \quad (4.16)$$

4.7 Restrições operacionais dos caminhões

As restrições (4.17) asseguram que o número de viagens de cada caminhão l à cada frente i carregando minério é igual à produção de minério. Já as restrições (4.18) asseguram o mesmo, porém para a produção de estéril. As restrições (4.19) definem que o ritmo de lavra em cada frente de minério é dado pela soma do número de viagens àquela frente feita por todos os caminhões carregando minério. As restrições (4.20) têm função semelhante à das restrições anteriores, porém com caminhões carregando estéril. As restrições (4.21) asseguram que a taxa máxima de utilização do caminhão l é respeitada. As restrições (4.22) asseguram que se um caminhão é usado para fazer algum carregamento, então a variável de decisão u_l assume o valor unitário. O tempo de ciclo total do caminhão l para todas as viagens a ele alocadas (Tc_l), em minutos, é calculado pela Eq. (4.23).

$$n_{m,i,l} - z_{l,o,b} = 0 \quad \forall l \in V, i \notin E, o \notin E \quad (4.17)$$

$$n_{e,i,l} - z_{l,o,p} = 0 \quad \forall l \in V, i \notin M, o \notin M \quad (4.18)$$

$$x_{i,m} - \sum_{l \in C} z_{l,o,b} capm_l = 0 \quad \forall i \notin E, o \notin E \quad (4.19)$$

$$x_{i,e} - \sum_{l \in C} z_{l,o,p} cape_l = 0 \quad \forall i \notin M, o \notin M \quad (4.20)$$

$$\frac{Tc_l}{60} \leq Tx \quad \forall l \in V \quad (4.21)$$

$$\frac{Tc_l}{60} \leq u_l \quad \forall l \in V \quad (4.22)$$

$$Tc_l = \sum_{d \in M} (z_{l,b,d} Tv_{l,b,d} + z_{l,d,b} Tv_{l,d,b} + z_{l,p,d} Tv_{l,p,d} + z_{l,d,p} Tv_{l,d,p}) \quad \forall l \in V \quad (4.23)$$

4.8 Restrições de sequenciamento horizontal

As restrições (4.24) e (4.25) definem que todos os caminhões, obrigatoriamente, devem começar a realizar todas as viagens para ele alocadas primeiramente da pilha de estéril p ou do britador primário b e alternando as frentes. Isto é, se o caminhão tiver que realizar 3 viagens carregando minério a partir da frente $F1$ e 2 carregando estéril a partir da frente $F2$, então ele começa carregando estéril ou minério, e a cada viagem ele visitará uma frente diferente alternando entre $F1$ e $F2$.

$$\sum_{d \in F} (z_{l,b,d}) - z_{l,b, fim} = A \quad \forall l \in V \quad (4.24)$$

$$\sum_{d \in F} (z_{l,p,d}) - z_{l,p, fim} = -A \quad \forall l \in V \quad (4.25)$$

4.9 Restrições de balanceamento

As restrições (4.26) a (4.31) asseguram o balanceamento dos arcos para a abordagem utilizando fluxo em redes.

$$z_{l,o,d} - \sum_{o \in F} z_{l,b,o} = 0 \quad \forall l \in V, o \in F, d \in F \quad (4.26)$$

$$z_{l,o,d} - \sum_{o \in F} z_{l,p,o} = 0 \quad \forall l \in V, o \in F, d \in F \quad (4.27)$$

$$(z_{l,b,d} + z_{l,p,d}) - z_{l,o,b} = 0 \quad \forall l \in V, o \in M \quad (4.28)$$

$$(z_{l,b,d} + z_{l,p,d}) - z_{l,o,p} = 0 \quad \forall l \in V, o \in E \quad (4.29)$$

$$z_{l,b, fim} - \sum_{o \notin E} z_{l,o,b} = 0 \quad \forall l \in V \quad (4.30)$$

$$z_{l,b, fim} - \sum_{o \notin M} z_{l,o,p} = 0 \quad \forall l \in V \quad (4.31)$$

4.10 Restrições de sequenciamento vertical

As restrições (4.32) a (4.35) definem que só se pode retirar material da parte inferior de uma frente i , se o material da parte superior da mesma frente i já tiver sido retirado.

$$x_{i,m} - Qum_i v_{i,e} \geq 0 \quad \forall i \in \{M, ME\} \quad (4.32)$$

$$x_{i,e} - Que_i v_{i,m} \geq 0 \quad \forall i \in \{E, EM\} \quad (4.33)$$

$$x_{i,m} - Qum_i v_{i,m} \leq 0 \quad \forall i \in F \quad (4.34)$$

$$x_{i,e} - Que_i v_{i,e} \leq 0 \quad \forall i \in F \quad (4.35)$$

4.11 Restrições de domínio das variáveis

As restrições (4.36) a (4.45) asseguram o domínio das variáveis de decisão.

$$x_{it} \geq 0 \quad \forall i \in F, t \in T \quad (4.36)$$

$$y_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in F, k \in C \quad (4.37)$$

$$n_{il} \in Z^+ \quad \forall i \in F, t \in T, l \in V \quad (4.38)$$

$$z_{l,o,d} \in Z^+ \quad \forall l \in V, o \in N, d \in N \quad (4.39)$$

$$d_j^-, d_j^+ \geq 0 \quad \forall j \in S \quad (4.40)$$

$$P^-, P^+ \geq 0 \quad (4.41)$$

$$u_l \in \{0, 1\} \quad \forall l \in V \quad (4.42)$$

$$de_j^-, de_j^+ \geq 0 \quad \forall j \in S \quad (4.43)$$

$$A \in \{-1, 1\} \quad (4.44)$$

$$v_{it} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in F, t \in T \quad (4.45)$$

5. Resultados

O modelo de programação matemática desenvolvido, apresentado na seção 4, foi implementado no aplicativo de otimização LINGO 10.0 da Lindo Systems Inc., interfaceando com planilhas do EXCEL.

Para este modelo foram utilizados os seguintes parâmetros de entrada: $\beta_j^+ = 1$, $\beta_j^- = 1$, $\lambda_j^+ = 10$, $\lambda_j^- = 10$, $\alpha^- = 100$; $\alpha^+ = 100$ e $\omega_l = 10$. Dado o fato de que o problema é da classe NP-difícil (Costa, 2005), a solução do modelo foi obtida depois de decorridos 600 segundos de execução em um microcomputador com processador Intel Core 2 Duo 2.0 GHz com 4 GB de RAM.

Os cenários utilizados para os testes foram adaptados daqueles encontrados em www.iceb.ufop.br/decom/prof/marcone/projects/mining.html. A Tabela 1 descreve algumas das características desses cenários. As colunas *Par* e *Frentes* indicam o número de parâmetros de controle e frentes de produção consideradas. Já as colunas *Carga* e *Cam* apresentam o número de carregadeiras e caminhões disponíveis.

A adaptação em tais cenários consistiu em considerar o tempo de ciclo dependente do material a ser transportado (se for estéril, o trajeto é frente à pilha de estéril; se for minério, o trajeto é frente a britador); da capacidade do caminhão, que depende do material transportado e do modelo do caminhão; bem como se a frente contém parte de minério e parte de estéril. Neste caso, os tempos de viagem dos caminhões foram os mesmos de Pantuza e Souza (2009), assim como a capacidade de transporte. Os valores da quantidade de material disponível para as frentes mistas foram estipulados em 500 t para o material da parte superior e 2000 t para o da parte inferior, seja ele estéril ou minério.

TABELA 1 – Características dos cenários.

<i>Inst.</i>	<i>Par.</i>	<i>Frentes</i>	<i>Cam</i>	<i>Carga</i>
<i>Mina1</i>	10	17	30	8
<i>Mina2</i>	10	17	30	7
<i>Mina3</i>	5	17	30	8

A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos. A coluna *FO* apresenta o valor da função objetivo, a coluna *Prod* apresenta o desvio em relação à meta de produção encontrado (em percentagem). A coluna *Teor* apresenta o desvio médio, em percentagem, na mistura final para os parâmetros de controle. A coluna *Ncam* apresenta o número de caminhões utilizados.

TABELA 2 – Resultados.

<i>Inst.</i>	<i>FO</i>	<i>Gap</i>	<i>LI</i>	<i>Prod (%)</i>	<i>Teor (%)</i>	<i>Ncam</i>
<i>Mina 1</i>	119337	5,10255	19555,2	20	0,02	18
<i>Mina 2</i>	135365	0,73623	77964,7	23	0,02	15
<i>Mina 3</i>	182321	9,22466	17831,5	31	0,03	20

A coluna *LI* apresenta o limite inferior para a função objetivo, calculado pelo Lingo após 600 segundos de processamento. A coluna *Gap*, calculada segundo a Eq. (5.1), representa quanto o valor da coluna *FO* está perto desse limite inferior, ou seja, quanto mais próximo de zero, mais próximo do ótimo a solução está.

$$Gap = \frac{Fo - LI}{LI} \quad (5.1)$$

6. Conclusões

Apresentou-se neste trabalho um novo modelo de programação linear por metas aplicado ao problema de planejamento operacional de lavra de uma mina a céu aberto, considerando alocação dinâmica de caminhões, cuja principal decisão é determinar o ritmo de lavra de cada frente de modo a fornecer à usina de beneficiamento uma alimentação adequada.

O modelo de otimização utilizado é uma extensão dos modelos encontrados na literatura, no qual se incluiu o tempo de ciclo dos caminhões dependente do tipo de material carregado, do caminhão, e dos pontos de descarga (britador e pilha de estéril), técnicas de fluxo em redes para alocação dos caminhões e o método de lavra seletiva.

A adoção do método de lavra seletiva na resolução do problema de planejamento de produção em mineração em pauta é, de nosso conhecimento, inédita. Ao utilizar este método de lavra, o modelo torna-se mais aplicável à realidade da maioria das empresas do setor mineral.

Os resultados obtidos com a aplicação do modelo desenvolvido demonstram que é possível otimizar as operações de transporte e carregamento. Esta situação muitas vezes não é alcançada em empresas de mineração brasileiras, que geralmente aplicam o método de tentativa e erro utilizando planilhas eletrônicas.

Referências

- ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R.; YANASSE, H.. *Pesquisa operacional para cursos de engenharia*. 1º ed. Rio de Janeiro: Editora Campus. 2007.
- CHANDA, E. K. C. e DAGDELEN, K.. Optimal blending of mine production using goal programming and interactive graphics systems. *International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment*, v. 9, p. 203–208, 1995.
- COSTA, F. P. . *Aplicações de técnicas de otimização a problemas de planejamento operacional de lavra em minas a céu aberto*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mineral), PPGEM - UFOP, Ouro Preto, M.G. 2005
- COSTA, F.P.; SOUZA, M.J.F.; PINTO, L.R. *Um modelo de alocação dinâmica de caminhões*. *Brasil Mineral*, v. 231, p. 26-31, 2004.
- COSTA, F. P.; SOUZA, M. J. F.; PINTO, L. R.. *Um modelo de programação matemática para alocação estática de caminhões visando ao atendimento de metas de produção e qualidade*. *Revista da Escola de Minas*, v. 58, p. 77-81, 2005.
- CRAWFORD, J. T.; HUSTRULID, W. A.. *Open pit mine planning and design*. UMI Books on Demand, New York, 1979.
- GUIMARÃES, I. F.; PANTUZA, G.; SOUZA, M. J. F. *Modelo de simulação computacional para validação dos resultados de alocação dinâmica de caminhões com atendimento de metas de qualidade e de produção em minas a céu aberto*. Anais do XIV Simpósio de Engenharia de Produção (SIMPEP), CD-ROM. Bauru, 2007.
- MERSCHMANN, L. H. C.. *Desenvolvimento de um sistema de otimização e simulação para análise de cenários de produção em minas a céu aberto*. Dissertação de mestrado, Programa de Engenharia de Produção/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2002.
- MERSCHMANN, L. H. C. e PINTO, L. R.. *Planejamento operacional da lavra de mina usando modelos matemáticos*. *Revista Escola de Minas - REM*, Ouro Preto, M.G. 2001.
- MORAES, E. F.; ALVES, J. M. C. B.; SOUZA, M. J. F.; CABRAL, I. E.; MARTINS, A. X.. *Um modelo de*

programação matemática para otimizar a composição de lotes de minério. Revista Escola de Minas – REM, Ouro Preto, v. 59(3), p. 299-306, 2006.

PANTUZA Jr., G. e SOUZA, M. J. F.. *Modelo de simulação computacional para validação dos resultados de alocação dinâmica de caminhões com atendimento de metas de qualidade e de produção em minas a céu aberto.* Anais do XVI Simpósio de Engenharia de Produção – SIMPEP, Bauru, SP, 2009.

PANTUZA JR, G.; SOUZA, M. J. F. e GUIMARÃES, I. F.. *Modelo de simulação computacional para validação dos resultados de alocação dinâmica de caminhões com atendimento de metas de qualidade e de produção em minas a céu aberto.* do XIV Simpósio de Engenharia de Produção – SIMPEP, Bauru, SP. 2007.

PINTO, L. R.; BIAJOLI, F. L. e MINE, O. M.. *Uso de otimizador em planilhas eletrônicas para auxílio ao planejamento de lavra.* Relatório técnico, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mineral, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, 2003.

SLACK, N.; CHAMBER, S.; HARLAND, C.; HARRISON, A. e JOHNSTON, R. *Administração da Produção.* São Paulo: Atlas, 2002.

TUBINO, D. F.. *Planejamento e Controle da Produção: teoria e prática.* São paulo: Campus, 2009.

WHITE, J. W. e OLSON, J. P.. *Computer-based dispatching in mines with concurrent operating objectives.* *Mining Engineering*, v. 38, n. 11, p. 1045–1054, 1986.