Pesquisa Operacional Aplicada à Mineração

Módulo de Otimização – Parte I

Prof. Marcone J. F. Souza
Prof. Túlio A. M. Toffolo

marcone.freitas@yahoo.com.br | tulio@toffolo.com.br

Departamento de Computação
Universidade Federal de Ouro Preto

- **Prof. Marcone Jamilson Freitas Souza**
  Departamento de Computação
  Universidade Federal de Ouro Preto
  www.decom.ufop.br/prof/marcone
  marcone.freitas@yahoo.com.br

- **Prof. Túlio Ângelo Machado Toffolo**
  Departamento de Computação
  Universidade Federal de Ouro Preto
  www.decom.ufop.br/toffolo
  tulio@toffolo.com.br

Roteiro

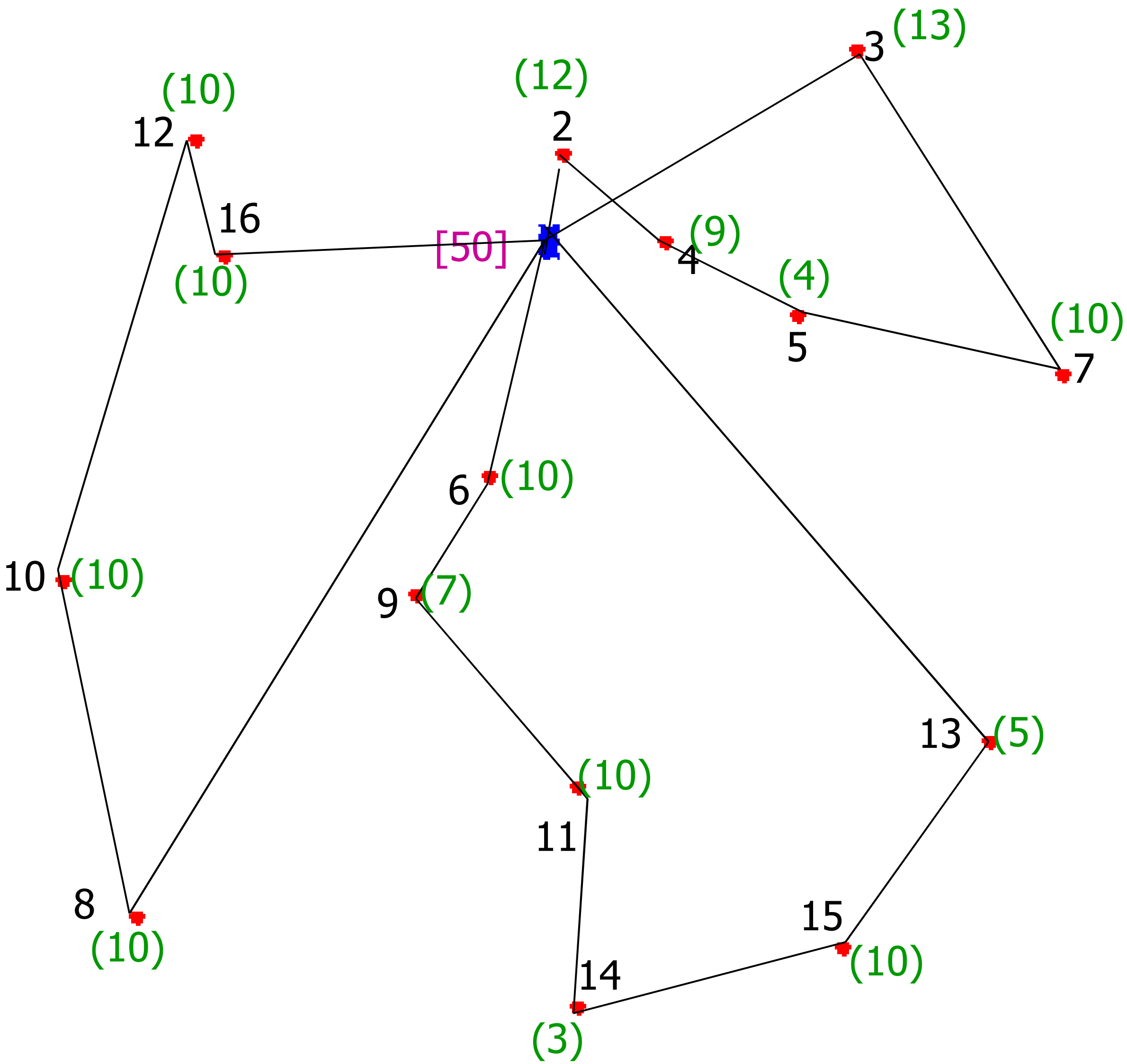
- Introdução
- Motivação
- Software de Otimização LINGO
- Modelagem em Programação Matemática
- Programação Linear: princípios básicos
- Programação Linear por Metas (Goal programming)
- Programação Inteira: princípios básicos

Otimização

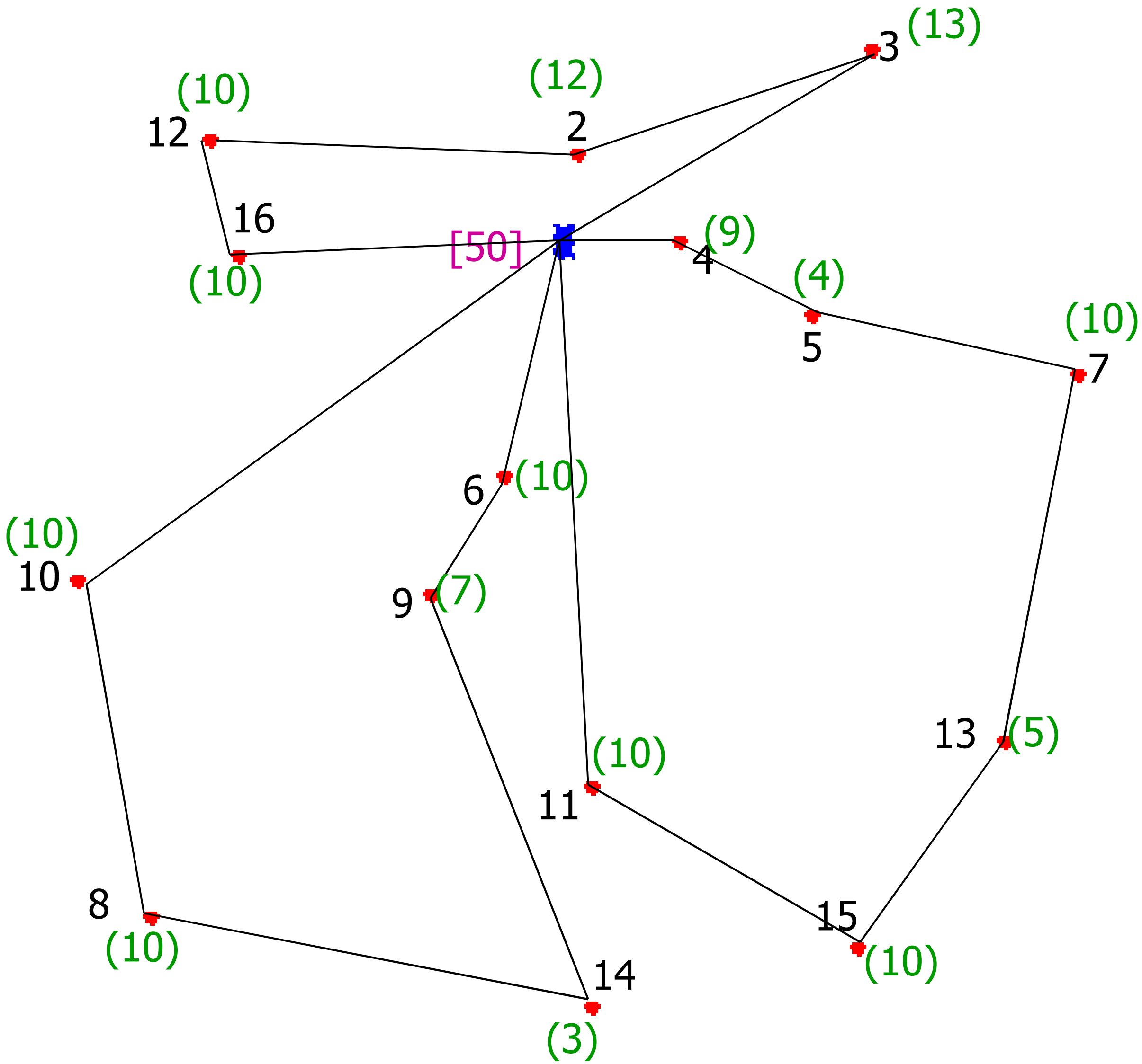
- Área da Pesquisa Operacional que utiliza o método científico para apoiar a tomada de decisões, procurando determinar como melhor projetar e operar um sistema, usualmente sob condições que requerem a alocação de recursos escassos.
- Trabalha com modelos determinísticos
  - As informações relevantes são assumidas como conhecidas (sem incertezas)
- Aplicações típicas:
  - Mistura de minérios
  - Planejamento da produção
  - Roteirização
  - Escala de pessoal

ROTEAMENTO DE VEÍCULOS

Problema de Roteamento de Veículos



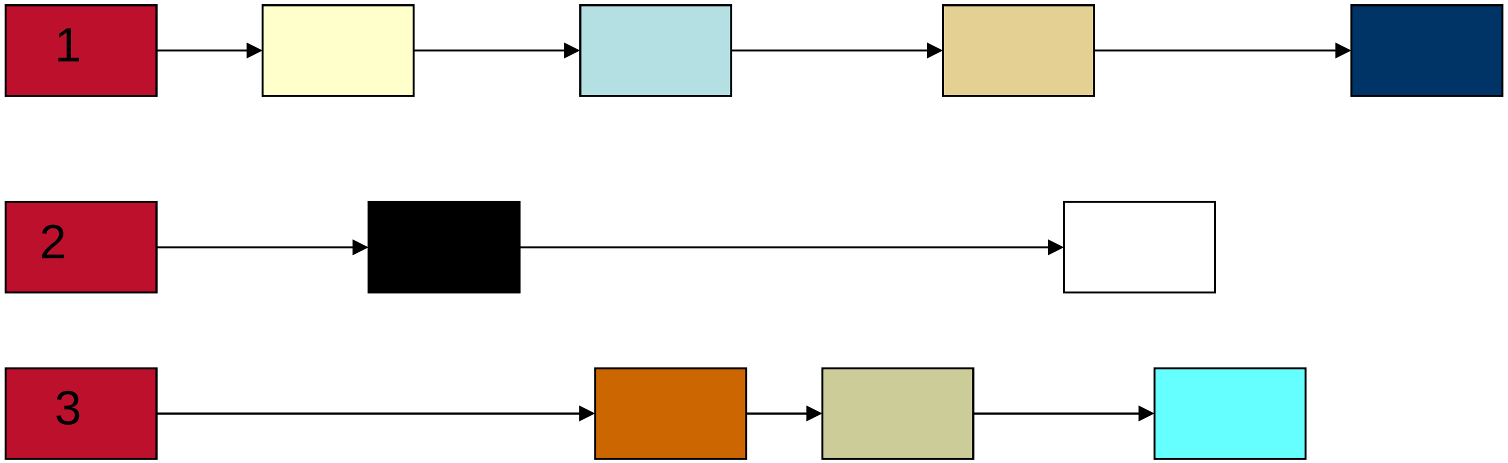
Problema de Roteamento de Veículos



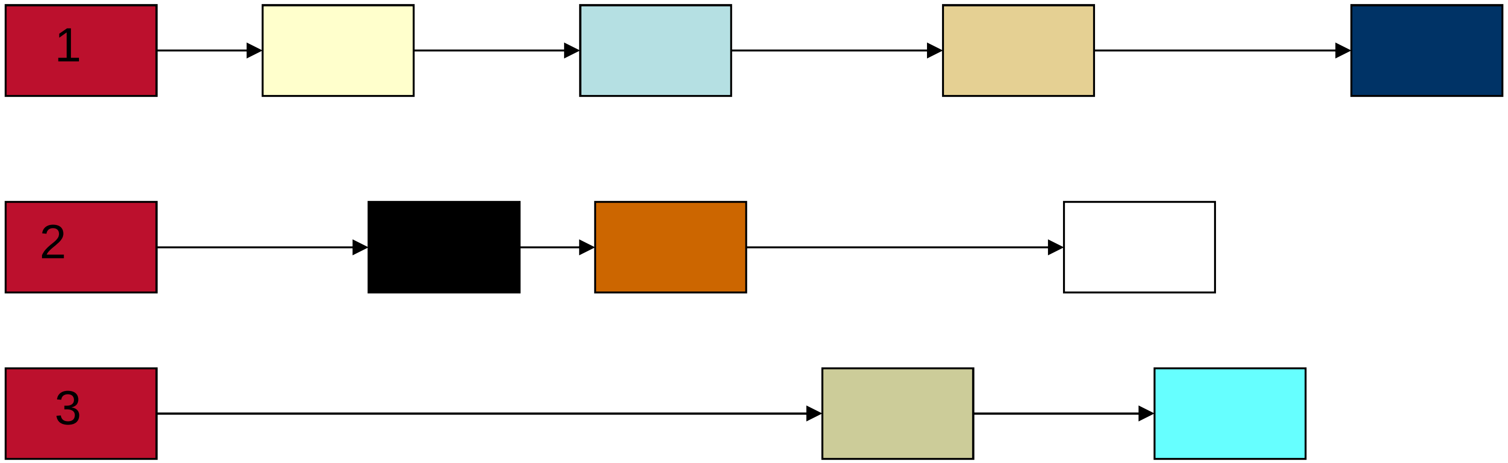
Dentre todas as possíveis roteirizações, determine aquela que minimiza a distância total percorrida

ESCALA DE MOTORISTAS

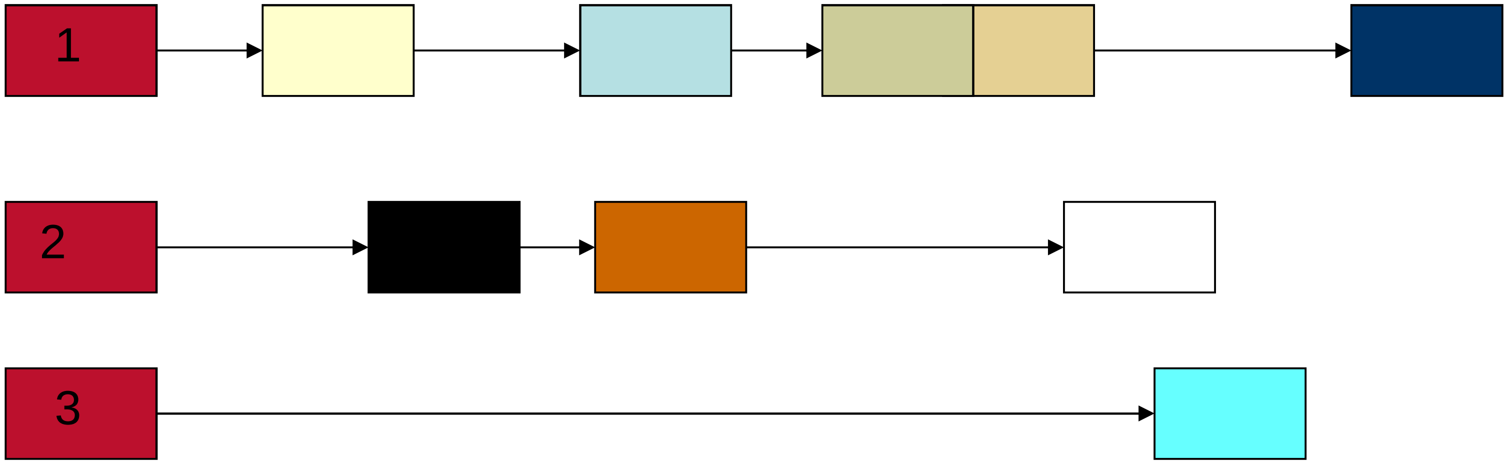
Escala de Motoristas (Crew Scheduling)



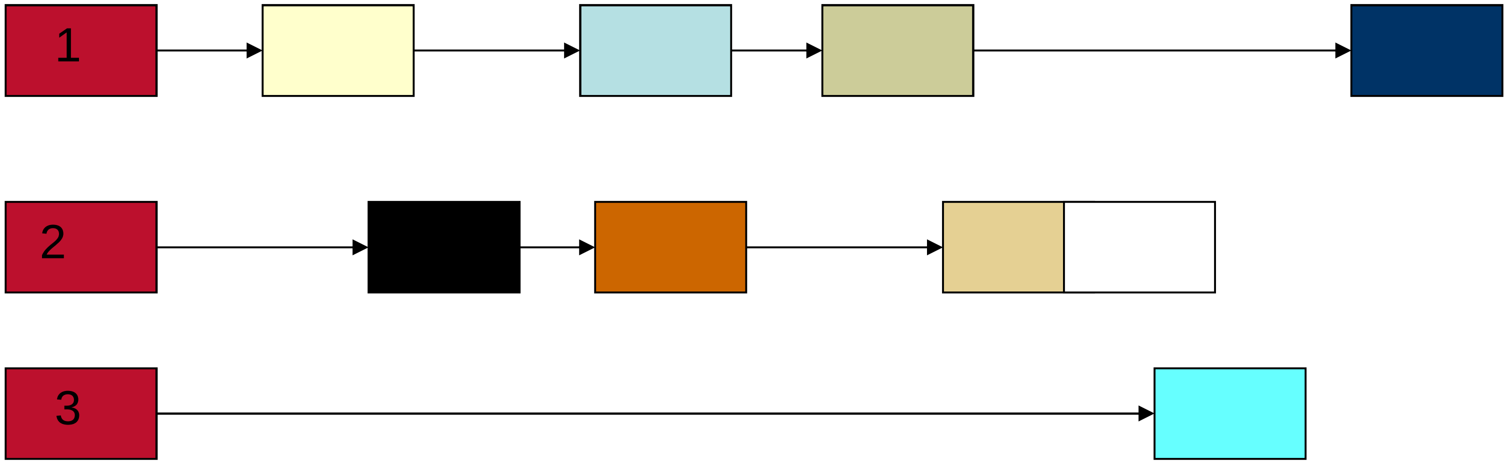
Escala de Motoristas (Crew Scheduling)



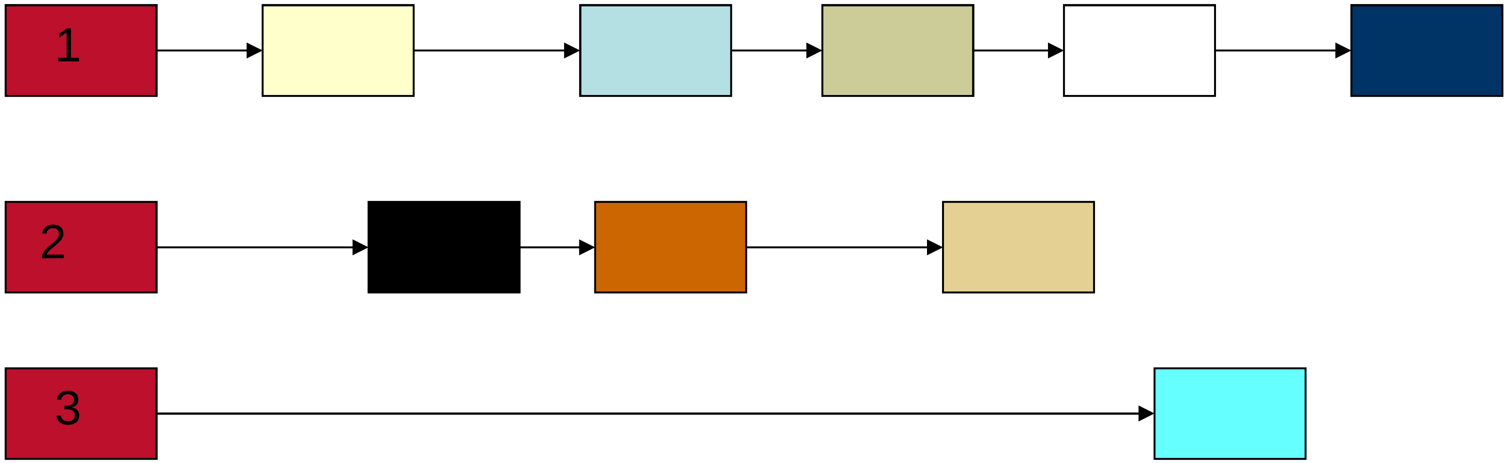
Escala de Motoristas (Crew Scheduling)



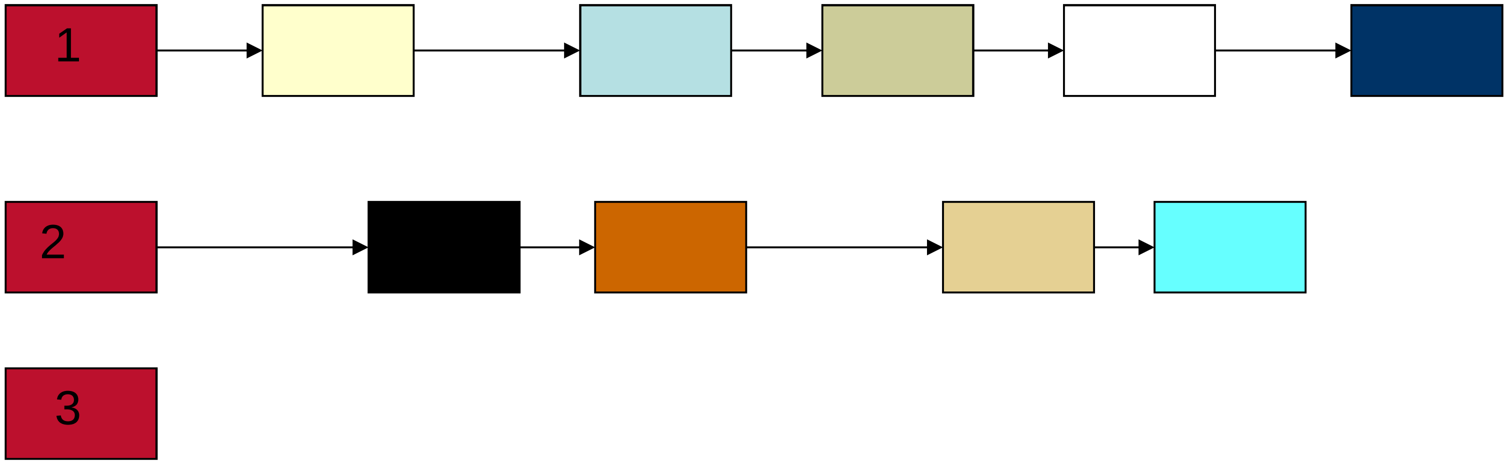
Escala de Motoristas (Crew Scheduling)



Escala de Motoristas (Crew Scheduling)



Escala de Motoristas (Crew Scheduling)



Redução de um tripulante!

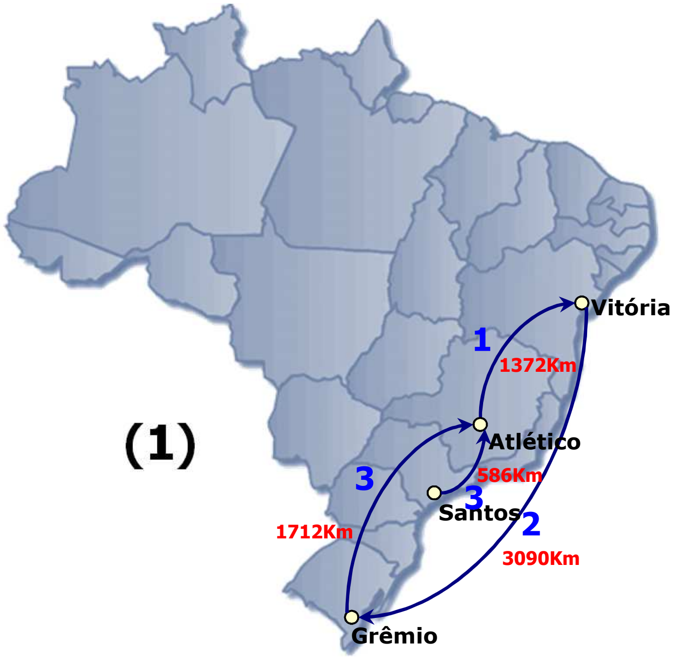
PROGRAMAÇÃO DE JOGOS PARA COMPETIÇÕES ESPORTIVAS

Programação de jogos de competições esportivas

INTRODUÇÃO

- ✓ Montar uma tabela de jogos entre os times participantes de uma competição esportiva
- ✓ Satisfazer as restrições da competição
- ✓ Minimizar os custos relativos ao deslocamento dos times

INTRODUÇÃO



(1)

Vitória x Atlético | Grêmio x Atlético | Atlético x Santos

Distância total percorrida: 6760 Km

(2)

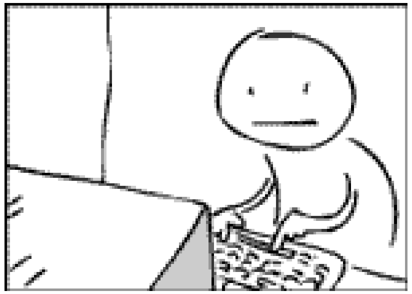
Atlético x Vitória | Grêmio x Atlético | Atlético x Santos

Distância total percorrida: 5382 Km

Economia = 1378 Km

Programação de jogos de competições esportivas

JUSTIFICATIVA DO TRABALHO



- Gastos com deslocamento
- Influência no desempenho dos times
- Enquadra-se na classe de problemas NP-difíceis
- Número de tabelas possíveis para uma competição envolvendo *n* times confrontando-se entre si em turnos completos (Concílio & Zuben (2002)):

$$(n-1)!(n-3)!(n-5)!\ldots(n-(n-1))!\times 2^{(n-1)\times\frac{n}{2}}$$

- Competição com 20 participantes: 2,9062x10^{130} tabelas possíveis (aprox. 10^{114} anos para analisar todas as tabelas em um computador que analisa uma tabela em 10^{-8} segundos)

Programação de jogos de competições esportivas

PROBLEMA ABORDADO

- 1ª Divisão do Campeonato Brasileiro de Futebol 2004, 2005 e 2006
- 2ª Divisão do Campeonato Brasileiro de Futebol 2006
- Competições realizadas em dois turnos completos e espelhados
- Restrições do problema

1. Dois times jogam entre si duas vezes, uma no turno e a outra no returno, alternando-se o mando de campo entre os mesmos
2. Nas duas primeiras rodadas de cada turno, cada time alternará seus jogos, sendo um em casa e o outro na casa do adversário. Por ex.: 1ª fora, 2ª em casa
3. As duas últimas rodadas de cada turno devem ter a configuração inversa das duas primeiras rodadas de cada turno com relação ao mando de campo. Ex.: Penúltima em casa, Última fora
4. Não pode haver jogos entre times do mesmo estado na última rodada
5. A diferença entre os jogos feitos em cada turno em casa e fora de casa de um time não pode ser maior que uma unidade
6. Um time não pode jogar mais que duas vezes consecutivas dentro ou fora de casa

Programação de jogos de competições esportivas

RESULTADOS COMPUTACIONAIS

- *Melhores soluções obtidas pelos métodos*

Instâncias	CBF		Biajoli *et al*. (2004)		ILS-MRD			
	DIST	*DIF*	*DIST*	*DIF*	*DIST*	*DIF*	*%MDIST*	*%MDIF*
bssp2004	905316	86610	789480	53309	754935	51199	16,61	40,89
bssp2005	838464	70655	-	-	696800	46821	16,90	33,73
bssp2006-A	658195	50769	-	-	562886	37628	14,48	25,88
bssp2006-B	998675	61454	-	-	967374	23848	3,13	61,19

Economia possível:

- Considerando o custo do quilômetro aéreo a R$0,70
- Delegação de 20 pessoas
- Campeonatos 2004 e 2005, Série A: Aprox. R$ 2 milhões
- Campeonato 2006, Série A: Aprox. R$ 1 milhão
- Campeonato 2006, Série B: Aprox. R$ 500 mil

CONTROLE DE PÁTIO DE MINÉRIOS

Controle de Pátio de Minérios

- Aplicação na mina Cauê, Itabira (MG), da CVRD
- 3 pátios de estocagem de minérios
- Minérios empilhados em balizas
- Pilhas formadas por subprodutos com composição química e granulométrica diferentes
- Objetivo é compor um lote de vagões (± 80), atendendo às metas de qualidade e produção de um dado produto
- Exemplos de algumas restrições operacionais:
  - Retomar uma pilha toda sempre que possível
  - Concentrar retomada
  - Retomar minério da esquerda para a direita e de cima para baixo

Controle de Pátio de Minérios

Pátio de Estocagem Cauê

Controle de Pátio de Minérios

Equipamentos de empilhamento e recuperação

Recuperadora (Bucket Wheel)

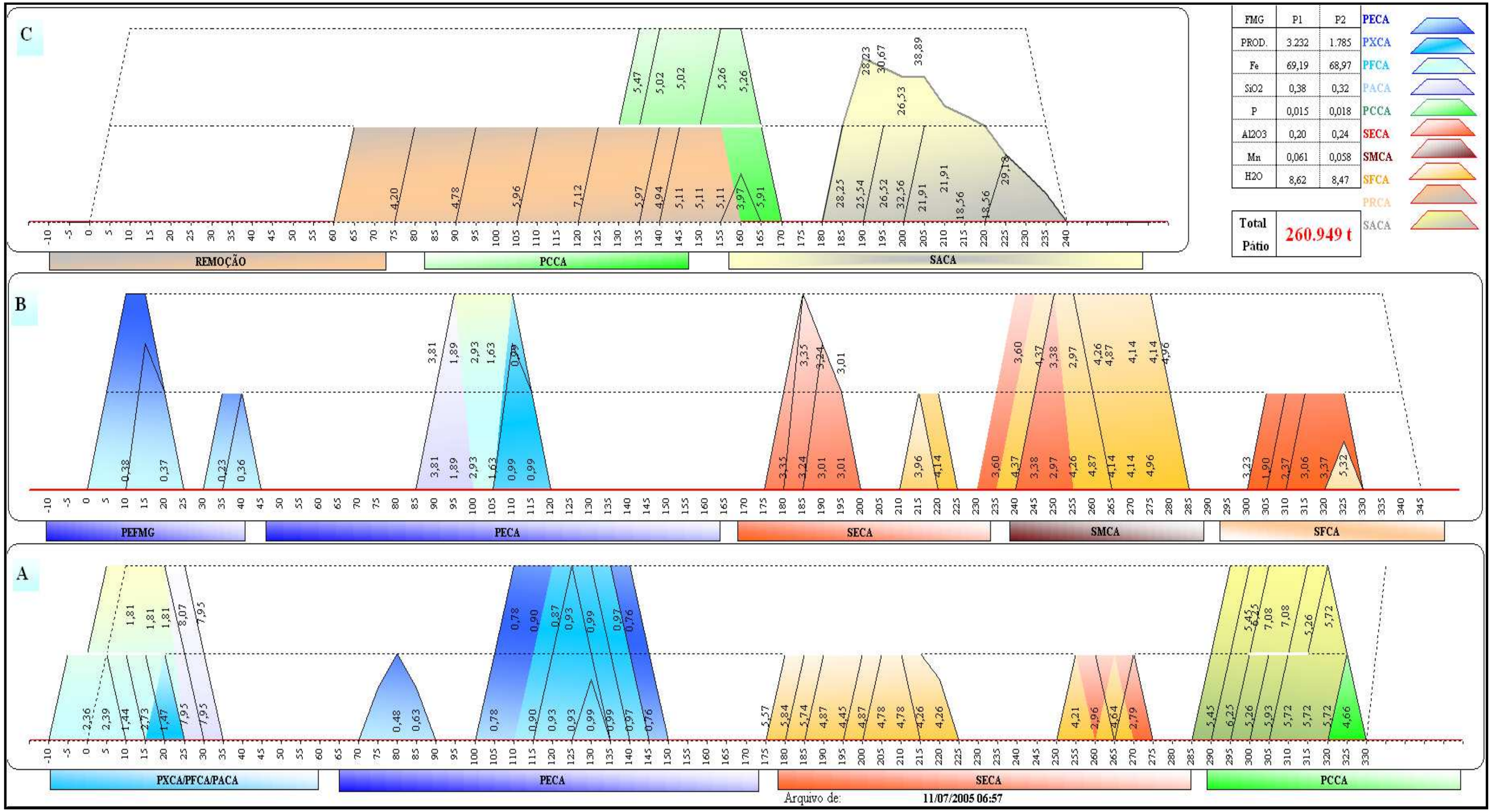
Recuperadora Tambor (Drum)

Empilhadeira (Stacker)

Controle de Pátio de Minérios

Silos de embarque

Programação/Simulação



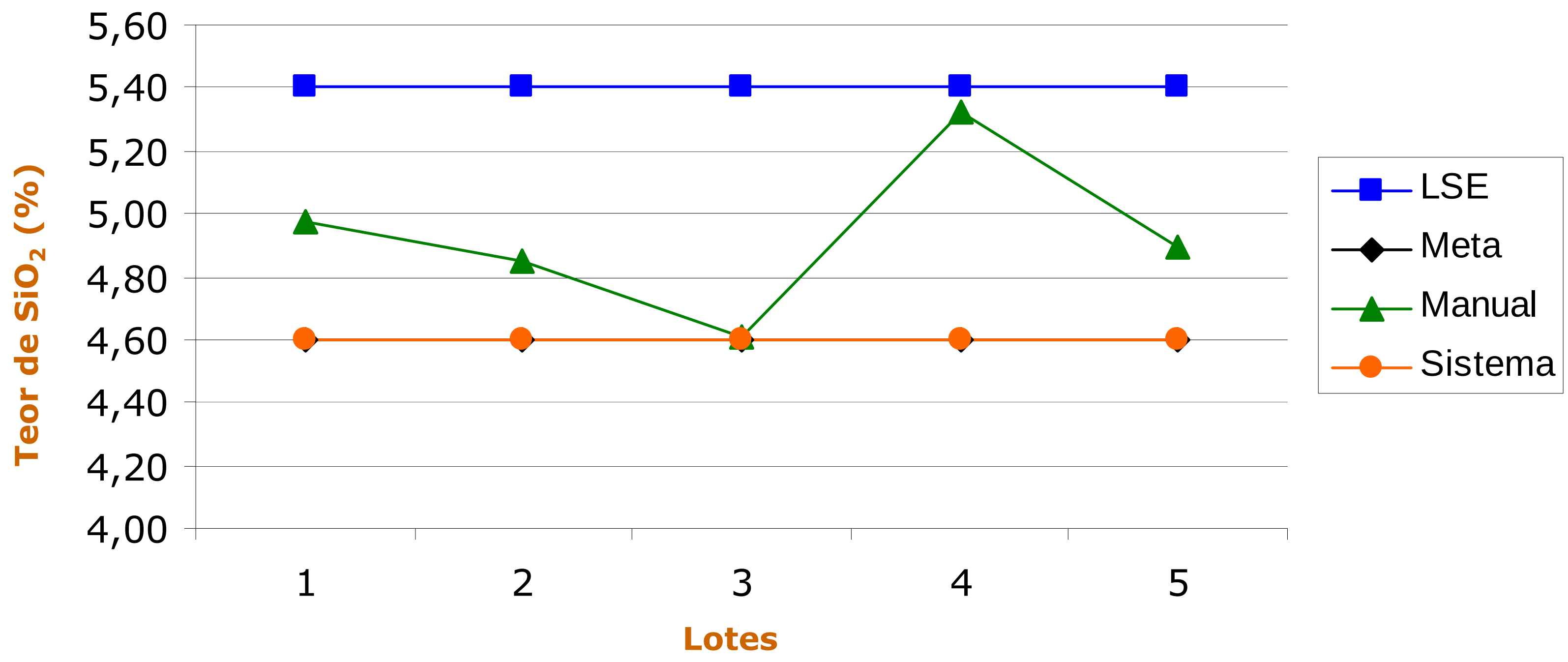
Controle de Pátio de Minérios

SECA	Fe	SiO_2	P	Al_2O_3	Mn	MgO	H2O	+6,3	+1,0	-0,15
LSG	-	4,35	0,040	1,00	0,600	-	-	11,00	-	37,00
LSE	-	3,85	0,028	0,80	0,300	-	6,50	8,00	-	27,00
META	-	3,60	0,022	0,70	0,150	-	-	6,50	61,00	22,00
LIE	-	-	-	-	-	-	-	-	58,00	-
LIG	-	-	-	-	-	-	-	-	52,00	-
CRIT.	-	CR	CR	CR	-	-	-	-	-	CR

SFCA	Fe	SiO_2	P	Al_2O_3	Mn	MgO	H2O	+6,3	+1,0	-0,15
LSG	-	5,10	0,059	1,80	-	-	7,50	-	-	44,00
LSE	-	4,50	0,043	1,40	-	-	6,50	-	-	36,00
META	-	4,20	0,035	1,20	0,170	-	6,00	-	53,00	32,00
LIE	65,00	3,70	-	-	-	-	-	-	-	-
LIG	-	2,70	-	-	-	-	-	-	-	-
CRIT.	-	CR	MI	CR	-	-	MI	-	-	CR

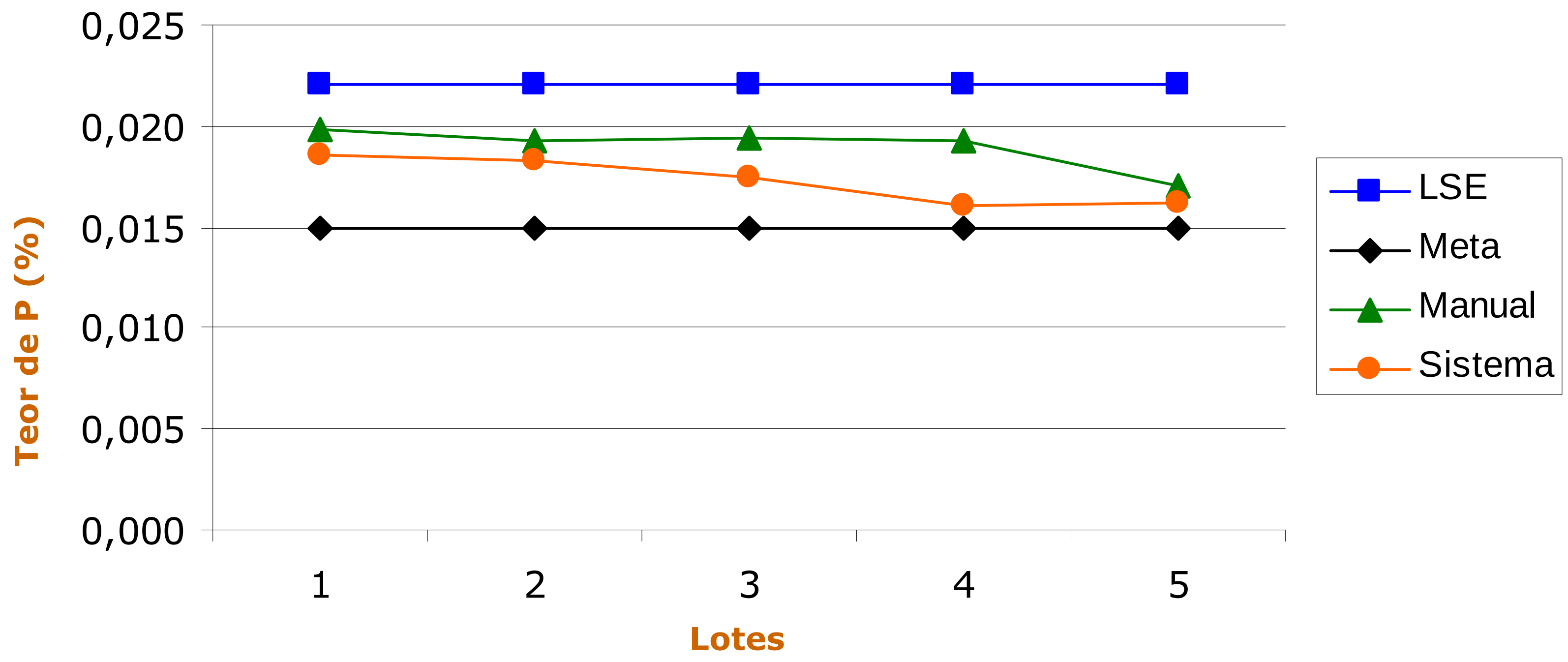
Controle de Pátio de Minérios

PCCA



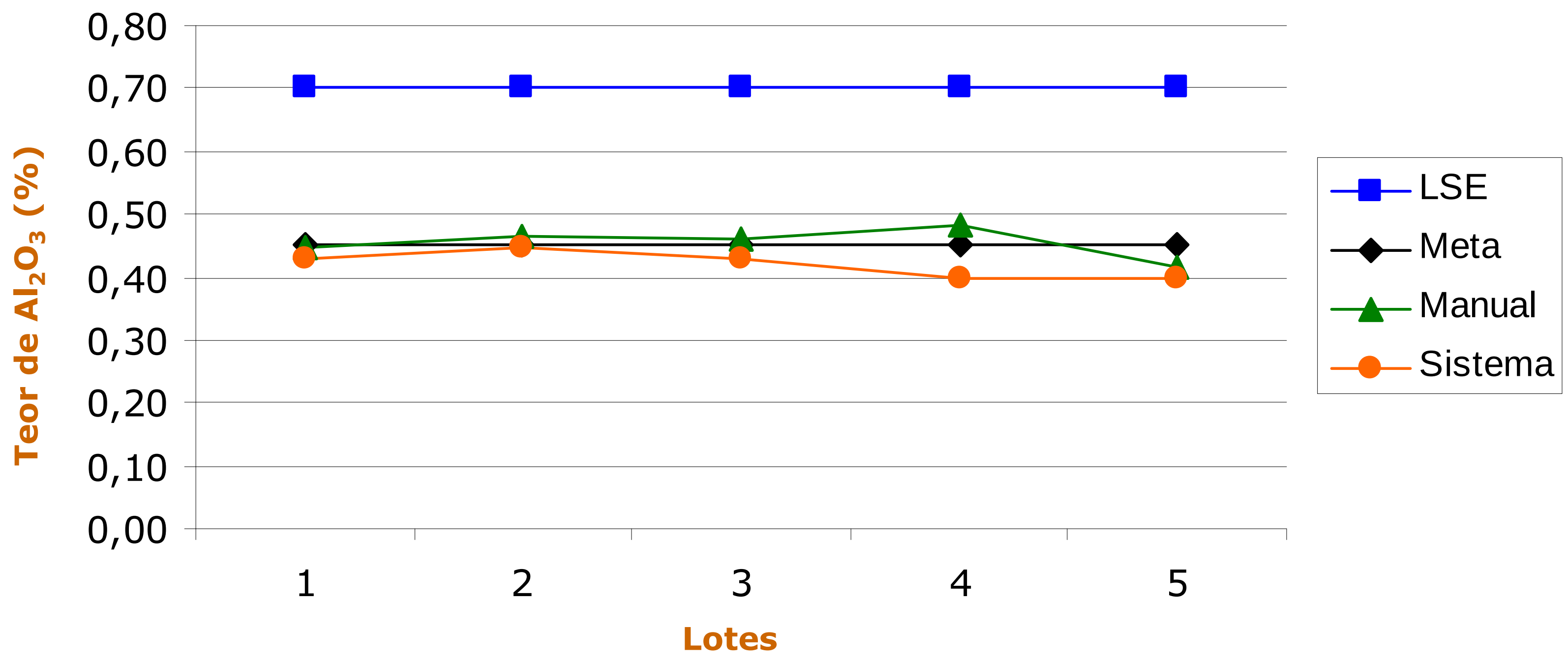
Controle de Pátio de Minérios

PCCA



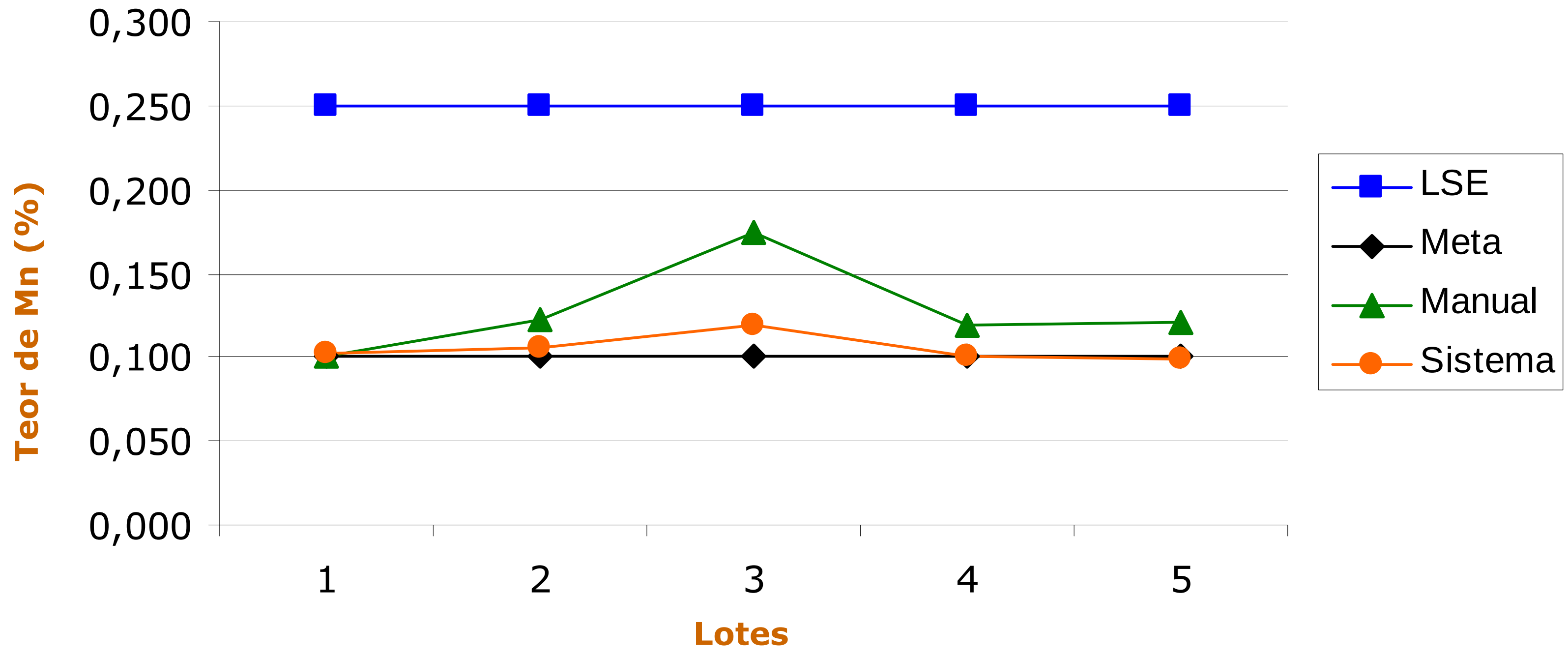
Controle de Pátio de Minérios

PCCA



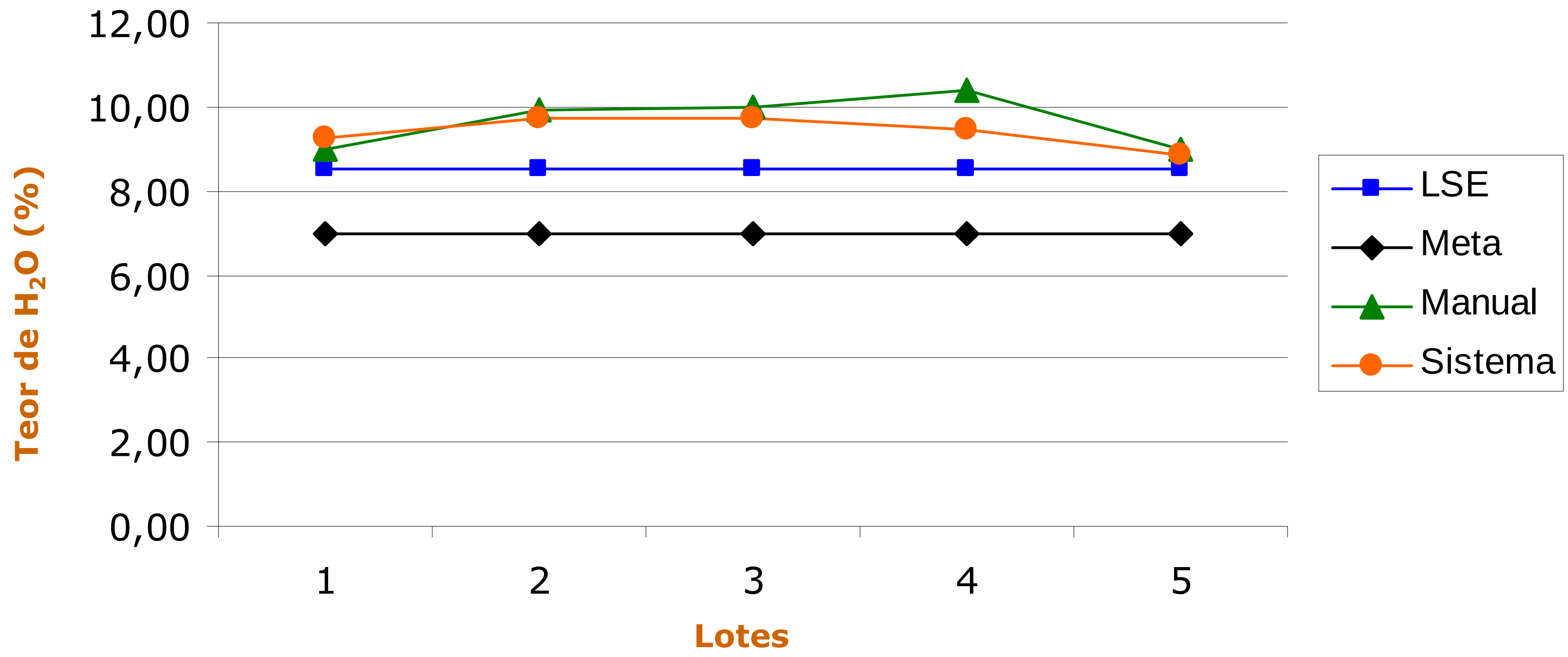
Controle de Pátio de Minérios

PCCA



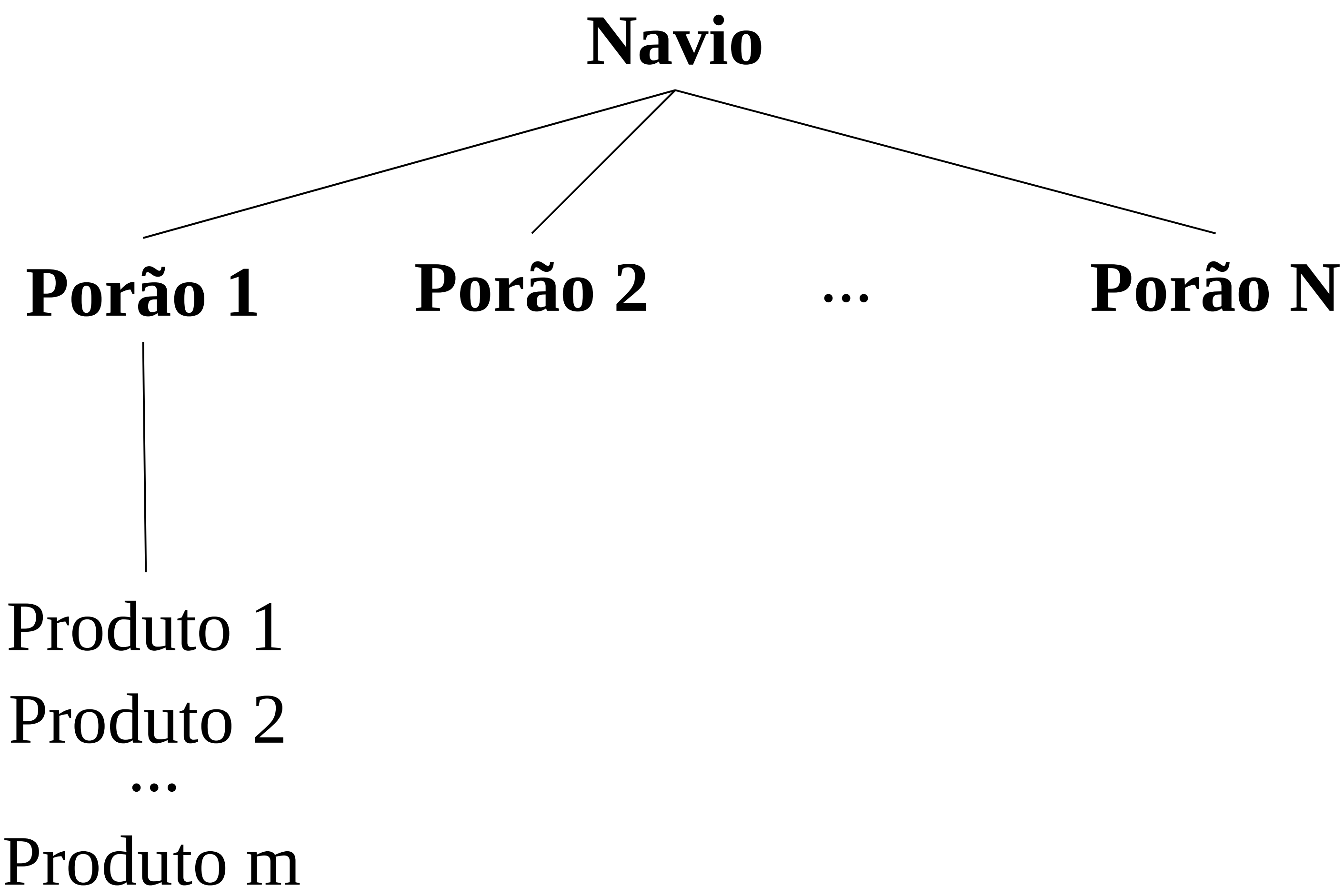
Controle de Pátio de Minérios

PCCA



CARREGAMENTO DE PRODUTOS EM NAVIOS

Carregamento de produtos em Navios



Carregamento de produtos em Navios

- Turnos de 6 horas de trabalho:
  - 7h-13h
  - 13h-19h
  - 19h-1h
  - 1h-7h
- 8 tipos de turnos:
  - Dia útil (horários normal e noturno)
  - Sábado (horários normal e noturno)
  - Domingo (horários normal e noturno)
  - Feriado (horários normal e noturno)
- Terno: equipe de trabalho em um porão durante um turno

Carregamento de produtos em Navios

- Existe um certo número de máquinas disponíveis para fazer o carregamento do navio:
  - CN, CG e GB.
- Cada máquina possui uma produtividade diferente para cada tipo de produto.

Carregamento de produtos em Navios

- Produtos carregados em uma ordem preestabelecida.
- As equipes são remuneradas de acordo com a produção (ton.).
- Os custos variam de acordo com o produto carregado e o tipo do turno em que ocorre o terno.
- O custo total é dado pelo somatório dos custos com docas, encarregados, guincheiros, conferentes, estivadores e equipamento utilizado.

Carregamento de produtos em Navios

- Custo do carregamento dado pelo somatório dos custos dos ternos
- Carregamento concluído depois da data prevista em contrato:
  - Demurrage (multa por dia de atraso)
- Carregamento concluído antes da data prevista em contrato:
  - Prêmio (metade da multa)
- Objetivo é reduzir os custos com a mão-de-obra

MODELOS DE OTIMIZAÇÃO

Modelos de Otimização

- Podem ser divididos em duas classes:
  - Modelos de Programação matemática
  - Modelos **Heurísticos**

- **Programação matemática:**
  - Fundamentados na matemática
  - Métodos exatos: garantem a geração da solução ótima
  - Método mais difundido: Programação Linear (PL)
  - Desvantagens:
    - Modelagem mais complexa
    - Em problemas combinatórios, podem exigir um tempo proibitivo para encontrar a solução ótima

Modelos de Otimização

- **Heurísticos:**
  - Fundamentados na Inteligência Artificial
  - Inspirados na forma humana de resolver o problema, em processos biológicos, em processos físicos, em processos químicos, no comportamento social de um bando de pássaros, etc.
  - Métodos aproximados: Não garantem a otimalidade da solução final
  - Vantagens:
    - De fácil modelagem
    - Em geral, produzem boas soluções rapidamente

MODELOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Modelos de Programação Linear

- Formulação algébrica:

otimizar $$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$ Função objetivo

sujeito a $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} b_i \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n$$ Condições de não-negatividade

Restrições

Modelos de Programação Linear

1. As restrições representam limitações de recursos disponíveis (mão-de-obra, capital, recursos minerais ou fatores de produção) ou então, exigências e condições que devem ser cumpridas
2. x_j é uma variável de decisão, que quantifica o nível de operação da atividade j
3. b_i representa a quantidade do i-ésimo recurso disponível ou a exigência que deve ser cumprida

Modelos de Programação Linear

4. c_j representa o custo associado à j-ésima atividade
5. a_{ij} é a quantidade do recurso i (exigido ou disponível) em uma unidade da atividade j
6. otimizar = maximizar **<u>ou</u>** minimizar

Terminologia

- Solução:

  Qualquer especificação de valores para as variáveis de decisão

- Solução viável:

  Solução que satisfaz a todas as restrições

- Solução ótima:

  Solução viável que tem o valor mais favorável da função objetivo

Hipóteses assumidas em um modelo de PL

- Proporcionalidade
  - O custo de cada atividade é proporcional ao nível de operação da atividade
  - A quantidade de recursos consumidos por uma atividade é proporcional ao nível dessa atividade
- Divisibilidade
  - As atividades podem ser divididas em qualquer nível fracionário

Hipóteses assumidas em um modelo de PL

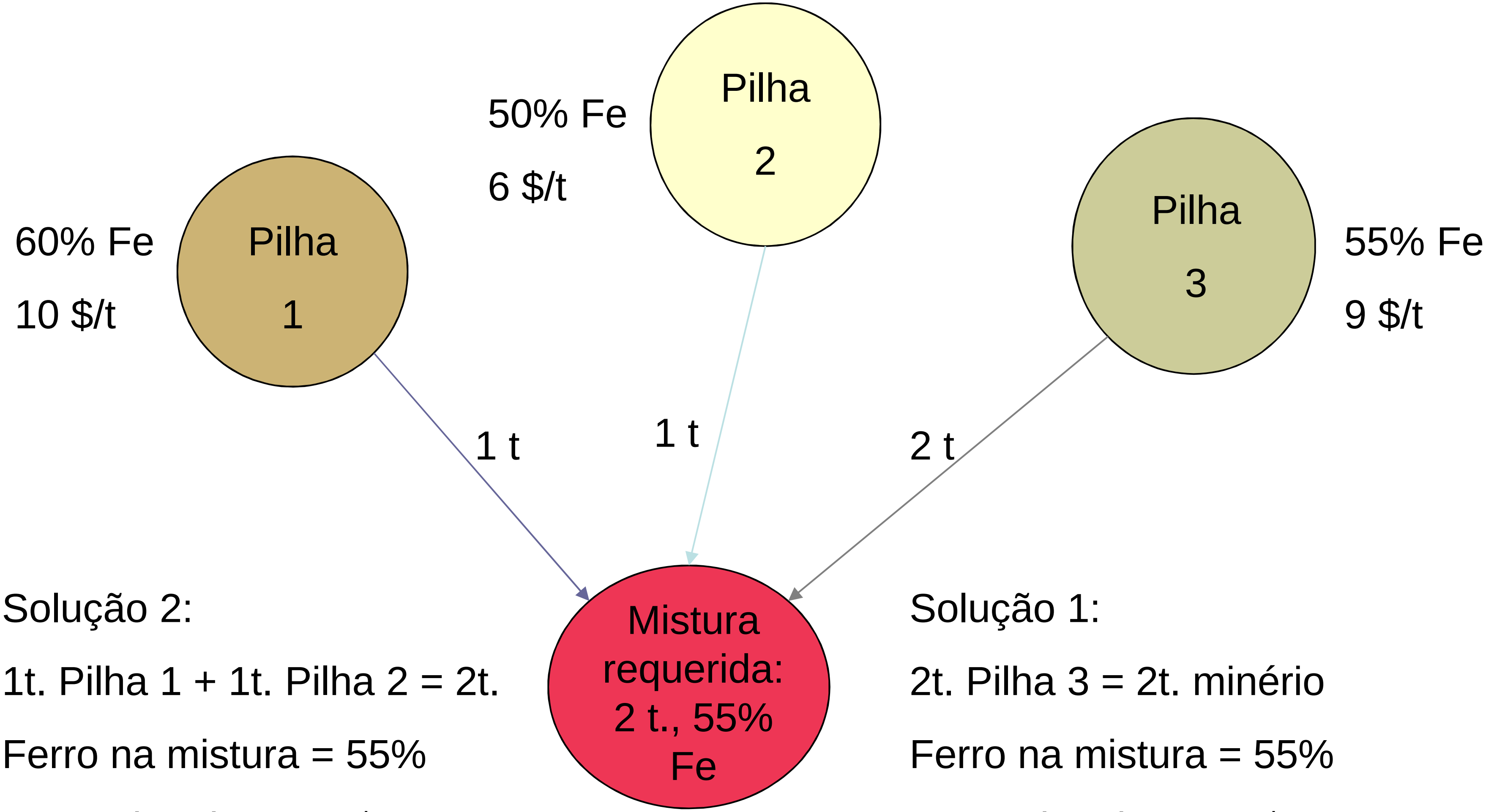
- Aditividade
  - O custo total é a soma das parcelas associadas a cada atividade
- Certeza
  - Assume-se que todos os parâmetros do modelo são constantes conhecidas

PROBLEMA DA MISTURA DE MINÉRIOS

Problema da Mistura de Minérios

- Há um conjunto de pilhas de minério
- Em cada pilha há uma composição química e granulométrica diferente (% de Fe, SiO2, Al2O3 etc.)
- A cada pilha está associado um custo
- É necessário formar uma mistura com uma certa especificação
- Dentre as possíveis misturas que atendem a especificação requerida, o objetivo é encontrar aquela que seja de custo mínimo

Problema da Mistura de Minérios



Solução 2:

1t. Pilha 1 + 1t. Pilha 2 = 2t.

Ferro na mistura = 55%

Custo da mistura = $ 16

Solução 1:

2t. Pilha 3 = 2t. minério

Ferro na mistura = 55%

Custo da mistura = $ 18

Modelo de PL – Problema da Mistura de Minérios

<u>Dados de entrada:</u>

- Pilhas = Conjunto de pilhas
- Parametros = Conjunto dos parâmetros de controle (Teores, Granulometria)
- t_{ij} = % do parâmetro de controle j em uma tonelada da pilha i
- tl_j = % mínimo admissível para o parâmetro j
- tu_j = % máximo admissível para o parâmetro j
- Qu_i = Quantidade máxima de minério, em toneladas, existente na pilha i
- c_i = Custo, em $, de uma tonelada de minério da pilha i
- p = quantidade, em toneladas, da mistura a ser formada

Modelo de PL – Problema da Mistura de Minérios

Variáveis de decisão:

- x_i = Quantidade de minério a ser retirado da pilha i

Modelo de PL – Problema da Mistura de Minérios

- Função objetivo: minimizar o custo

$$\min \sum_{i \in Pilhas} c_i x_i$$

Modelo de PL – Problema da Mistura de Minérios

- % do parâmetro *j* na mistura não pode superar o valor máximo permitido

$$\frac{\sum_{i \in Pilhas} t_{ij} x_i}{\sum_{i \in Pilhas} x_i} \leq tu_j \quad \forall j \in Parametros$$

linearização

$$\boxed{\sum_{i \in Pilhas} \left(t_{ij} - tu_j\right) x_i \leq 0 \quad \forall j \in Parametros}$$

Modelo de PL – Problema da Mistura de Minérios

- % do parâmetro *j* na mistura não pode ser inferior ao valor mínimo permitido

$$\frac{\sum\limits_{i \in Pilhas} t_{ij} x_i}{\sum\limits_{i \in Pilhas} x_i} \geq tl_j \quad \forall j \in Parametros$$

linearização

$$\sum_{i \in Pilhas} \left(t_{ij} - tl_j\right) x_i \geq 0 \quad \forall j \in Parametros$$

Modelo de PL – Problema da Mistura de Minérios

- A quantidade a ser retomada em cada pilha *i* está limitada à Qu_i

$$x_i \leq Qu_i \quad \forall i \in Pilhas$$

Modelo de PL – Problema da Mistura de Minérios

- A mistura deve ter peso total p

$$\sum_{i \in Pilhas} x_i = p$$

- Restrições de não-negatividade

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in Pilhas$$

Modelo de PL – Problema da Mistura de Minérios

$$\min \sum_{i \in Pilhas} c_i x_i$$

$$\sum_{i \in Pilhas} (t_{ij} - tu_j) x_i \leq 0 \quad \forall j \in Parametros$$

Valor do parâmetro *j* na mistura não pode superar o valor máximo permitido

$$\sum_{i \in Pilhas} (t_{ij} - tl_j) x_i \geq 0 \quad \forall j \in Parametros$$

Valor do parâmetro *j* na mistura não pode ser inferior ao valor mínimo permitido

$$x_i \leq Qu_i \quad \forall i \in Pilhas$$

A quantidade a ser retomada em cada pilha i está limitada à Qu_i

$$\sum_{i \in Pilhas} x_i = p$$

A mistura deve ter peso total *p*

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in Pilhas$$

Não-negatividade

Modelo de PL – Problema da Mistura de Minérios

- Problemas dessa modelagem de programação linear:
  - Restrições são rígidas
  - Na prática, pode não haver solução
  - Nesse caso, o *otimizador* aplicado ao modelo retorna que não há solução viável
  - Qual a "melhor" solução inviável?

PROGRAMAÇÃO LINEAR POR METAS

(GOAL PROGRAMMING)

Programação linear por metas (goal programming)

- Permite trabalhar com restrições relaxadas
- É mais flexível
- Cria variáveis de desvio para cada restrição que pode ser relaxada
- Cada variável de desvio mensura a “distância de viabilidade” e é colocada na função objetivo, para ser minimizada
- O valor mínimo da variável de desvio representa a “meta” a ser atingida

Programação linear por metas (goal programming)

- Restrições do tipo ≤

$$x_1 + x_2 \leq 10 \Rightarrow \begin{cases} \min dp \\ x_1 + x_2 - dp \leq 10 \end{cases}$$

Desvio positivo (*dp*):
Mede o quanto se ultrapassou de 10

Desvio positivo = desvio para cima

Programação linear por metas (goal programming)

- Restrições do tipo ≥

$$x_1 + x_2 \geq 10 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \min dn \\ x_1 + x_2 + dn \geq 10 \end{cases}$$

Desvio negativo (*dn*):
Mede o quanto faltou
para chegar em 10

Desvio negativo = desvio para baixo

Programação linear por metas (goal programming)

- Restrições do tipo **=**

$$x_1 + x_2 = 10 \Rightarrow \begin{cases} \min dp + dn \\ x_1 + x_2 - dp + dn = 10 \end{cases}$$

Mede o que supera 10

Mede o que falta para chegar a 10

Programação linear por metas (goal programming)

- Dois métodos de solução são normalmente utilizados:
  - Método dos pesos
  - Método hierárquico

- Método dos pesos:
  - Forma-se uma única função objetivo com o somatório ponderado das variáveis de desvio
  - A cada variável de desvio é associado um peso, que reflete a importância relativa da restrição relaxada

Programação linear por metas (goal programming)

- Método hierárquico (ou método ε-restrito):
  - É estabelecida, inicialmente, a hierarquia (prioridade) das metas
  - Resolve-se o problema com a meta de maior prioridade (isto é, apenas a variável de desvio mais prioritária)
  - Resolve-se, a seguir, o problema tendo como função objetivo uma meta de prioridade mais baixa que a anterior, mas atribuindo o valor ótimo da meta anterior à variável de desvio correspondente, isto é, tratando a meta anterior como restrição do modelo
  - O procedimento é executado de modo que a solução obtida de uma meta de prioridade mais baixa nunca degrade qualquer solução de prioridade mais alta

PROGRAMAÇÃO LINEAR POR METAS PARA O PROBLEMA DA MISTURA DE MINÉRIOS

Modelo com relaxação dos limites de especificação

Dados de entrada:

- Pilhas = Conjunto de pilhas
- Parametros = Conjunto dos parâmetros de controle
- t_{ij} = % do parâmetro de controle j em uma tonelada da pilha i
- tl_j = % mínimo admissível para o parâmetro j
- tu_j = % máximo admissível para o parâmetro j
- Qu_i = Quantidade máxima de minério, em toneladas, existente na pilha i
- p = quantidade, em toneladas, da mistura a ser formada
- wne_j = Peso para o desvio negativo de especificação do parâmetro j na mistura
- wpe_j = Peso para o desvio positivo de especificação do parâmetro j na mistura

Modelo com relaxação dos limites de especificação

Variáveis de decisão:

- x_i = Quantidade de minério a ser retirado da pilha i
- dne_j = Desvio negativo de especificação, em toneladas, do parâmetro j na mistura
- dpe_j = Desvio positivo de especificação, em toneladas, do parâmetro j na mistura

Modelo com relaxação dos limites de especificação

- Função objetivo: minimizar os desvios

$$\min \sum_{j \in Parametros} wpe_j dpe_j + \sum_{j \in Parametros} wne_j dne_j$$

Peso associado ao desvio <u>positivo</u> do parâmetro j

Peso associado ao desvio <u>negativo</u> do parâmetro j

Modelo com relaxação dos limites de especificação

- Admite-se que a quantidade do parâmetro *j* na mistura supere a quantidade máxima permitida em ***dpe$_j$*** ton.

$$\sum_{i \in Pilhas} (t_{ij} - tu_j) x_i - dpe_j \leq 0 \quad \forall j \in Parametros$$

- Admite-se que a quantidade do parâmetro *j* na mistura seja inferior à quantidade mínima permitida em ***dne$_j$*** ton.

$$\sum_{i \in Pilhas} (t_{ij} - tl_j) x_i + dne_j \geq 0 \quad \forall j \in Parametros$$

Modelo com relaxação dos limites de especificação

- A quantidade a ser retomada em cada pilha *i* está limitada à Qu_i

$$x_i \leq Qu_i \quad \forall i \in Pilhas$$

Modelo com relaxação dos limites de especificação

- A mistura deve ter peso total p

$$\sum_{i \in Pilhas} x_i = p$$

- Restrições de não-negatividade

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in Pilhas$$

$$dne_j, dpe_j \geq 0 \quad \forall j \in Parametros$$

Modelo com relaxação dos limites de especificação

$$\min \sum_{j \in Parametros} wpe_j dpe_j + \sum_{j \in Parametros} wne_j dne_j$$

$$\sum_{i \in Pilhas} (t_{ij} - tu_j) x_i - dpe_j \leq 0 \quad \forall j \in Parametros$$

Restrição relaxada do parâmetro *j* na mistura não superar o valor máximo

$$\sum_{i \in Pilhas} (t_{ij} - tl_j) x_i + dne_j \geq 0 \quad \forall j \in Parametros$$

Restrição relaxada do parâmetro *j* na mistura não ser inferior ao valor mínimo

$$x_i \leq Qu_i \quad \forall i \in Pilhas$$

Limite (Qu_i) na quantidade a ser retomada em cada pilha i

$$\sum_{i \in Pilhas} x_i = p$$

A mistura deve ter peso total *p*

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in Pilhas$$

$$dne_j, dpe_j \geq 0 \quad \forall j \in Parametros$$

Não-negatividade

PROBLEMA DA MISTURA COM METAS

Modelo relaxado com metas de qualidade

Problema da Mistura de Minérios com metas de qualidade e relaxação dos limites de especificação:

- Há um conjunto de 15 pilhas de minério
- Em cada pilha há uma composição química diferente (% de Fe, Al2O3 etc.)
- É necessário formar 6000 toneladas de um produto com uma certa especificação
- Para cada parâmetro de controle são dados os limites inferior e superior de especificação, bem como as metas de qualidade para o produto formado

Modelo relaxado com metas de qualidade

Problema da Mistura de Minérios com metas de qualidade e relaxação dos limites de especificação:

- Cada parâmetro de controle é classificado em 5 critérios: irrelevante, importante, muito importante, crítico e muito crítico
- O peso de desvio de meta é igual ao produto do peso critério pelo peso de comparação
- O peso de comparação serve para colocar cada parâmetro de controle em uma mesma ordem de grandeza
- Dentre as possíveis misturas que atendem a especificação requerida, o objetivo é encontrar aquela que esteja o mais próximo possível das metas de qualidade

Modelo relaxado com metas de qualidade

	Fe	Al2O3	P	PPC	He
Limite Superior	49,50%	0,17%	0,043%	2,65%	50%
Meta	**47,00%**	**0,15%**	**0,040%**	**2,35%**	**40%**
Limite Inferior	44,50%	0,12%	0,035%	2,05%	38%
Peso Critério	5	1	100	10	1
Peso Comparação	1	100	1000	10	1
Peso Desvio da Meta	5	100	100000	100	1

Critérios	Pesos
Irrelevante	0
Importante	1
Muito Importante	5
Crítico	10
Muito Crítico	100

	Massa (t)	Fe (%)	Al2O3 (%)	P (%)	PPC (%)	He (%)
Pilha 1	1500	52,64%	0,52%	0,084%	4,48%	45%
Pilha 2	2000	39,92%	0,18%	0,029%	0,65%	97%
Pilha 3	1700	47,19%	0,50%	0,050%	2,52%	52%
Pilha 4	1450	49,36%	0,22%	0,039%	1,74%	78%
Pilha 5	1250	43,94%	0,46%	0,032%	2,36%	41%
Pilha 6	1890	48,97%	0,54%	0,057%	4,34%	90%
Pilha 7	1640	47,46%	0,20%	0,047%	5,07%	90%
Pilha 8	1124	46,52%	0,32%	0,039%	3,51%	40%
Pilha 9	1990	56,09%	0,95%	0,059%	4,10%	80%
Pilha 10	900	46,00%	0,26%	0,031%	2,51%	21%
Pilha 11	1540	49,09%	0,22%	0,040%	4,20%	12%
Pilha 12	1630	49,77%	0,20%	0,047%	4,81%	12%
Pilha 13	1320	53,03%	0,24%	0,047%	4,17%	1%
Pilha 14	1245	52,96%	0,29%	0,052%	4,81%	1%
Pilha 15	1859	42,09%	0,17%	0,031%	1,38%	47%

Modelo relaxado com metas de qualidade

Dados de entrada:

- Pilhas = Conjunto de pilhas
- Parametros = Conjunto dos parâmetros de controle
- t_{ij} = % do parâmetro de controle j em uma tonelada da pilha i
- tl_j = % mínimo admissível para o parâmetro j
- tu_j = % máximo admissível para o parâmetro j
- tr_j = % recomendada para o parâmetro j
- Qu_i = Quantidade máxima de minério, em toneladas, existente na pilha i
- p = quantidade, em toneladas, da mistura a ser formada
- wnm_j = Peso para o desvio negativo (de meta) do parâmetro j na mistura
- wpm_j = Peso para o desvio positivo (de meta) do parâmetro j na mistura
- wne_j = Peso para o desvio negativo (de especificação) do parâmetro j na mistura
- wpe_j = Peso para o desvio positivo (de especificação) do parâmetro j na mistura

Modelo relaxado com metas de qualidade

Variáveis de decisão:

- x_i = Quantidade de minério a ser retirado da pilha i
- dnm_j = Desvio negativo (de meta), em toneladas, do parâmetro j na mistura
- dpm_j = Desvio positivo (de meta), em toneladas, do parâmetro j na mistura
- dne_j = Desvio negativo (de especificação), em toneladas, do parâmetro j na mistura
- dpe_j = Desvio positivo (de especificação), em toneladas, do parâmetro j na mistura

Modelo relaxado com metas de qualidade

- Função objetivo: minimizar os desvios

$$\min \sum_{j \in Parametros} (\underbrace{wpe_j dpe_j + wne_j dne_j}_{\text{Desvio e pesos em relação aos limites de especificação}} + \underbrace{wpm_j dpm_j + wnm_j dnm_j}_{\text{Desvio e pesos em relação às metas}})$$

Modelo relaxado com metas de qualidade

- Restrições relaxadas para atendimento às metas de qualidade
  - Admite-se que haja excesso (dpm_j) ou falta (dnm_j) no parâmetro j na mistura em relação à meta de qualidade

$$\sum_{i \in Pilhas} (t_{ij} - tr_j) x_i + dnm_j - dpm_j = 0 \quad \forall j \in Parametros$$

Desvio <u>negativo</u> sobre a meta do parâmetro j

Desvio <u>positivo</u> sobre a meta do parâmetro j

Modelo relaxado com metas de qualidade

$$\min \sum_{j \in Parametros} (wpe_j dpe_j + wne_j dne_j + wpm_j dpm_j + wnm_j dnm_j)$$

$$\sum_{i \in Pilhas} (t_{ij} - tu_j) x_i - dpe_j \leq 0 \quad \forall j \in Parametros$$

Restrição relaxada do parâmetro *j* na mistura não superar o valor máximo

$$\sum_{i \in Pilhas} (t_{ij} - tl_j) x_i + dne_j \geq 0 \quad \forall j \in Parametros$$

Restrição relaxada do parâmetro *j* na mistura não ser inferior ao valor mínimo

$$\sum_{i \in Pilhas} (t_{ij} - tr_j) x_i + dnm_j - dpm_j = 0 \quad \forall j \in Parametros$$

Admite-se que haja excesso (dpm_j) ou falta (dnm_j) no parâmetro j na mistura em relação à meta de qualidade

...

Modelo relaxado com metas de qualidade

$$\ldots$$

$$x_i \leq Qu_i \quad \forall i \in Pilhas$$

Limite (Qu_i) na quantidade a ser retomada em cada pilha i

$$\sum_{i \in Pilhas} x_i = p$$

A mistura deve ter peso total p

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in Pilhas$$

$$dne_j, dpe_j, dnm_j, dpm_j \geq 0 \quad \forall j \in Parametros$$

Não-negatividade

PROBLEMA DA MISTURA EXPANDIDO

Problema da Mistura expandido

Considerar no Problema da Mistura os seguintes requisitos:

- Apenas alguns parâmetros de controle podem ter seu limite superior de especificação extrapolado
- A produção a ser alcançada é uma meta a ser atingida
- Se for retirar minério de uma pilha, que a quantidade retomada seja no mínimo igual a retmin
- Se uma pilha for usada, que seja retomado todo o seu minério
- Se for retomar minério de uma pilha, a quantidade retomada deve ser múltipla de mult.
- Algumas pilhas devem ser usadas
- Algumas pilhas não podem ser usadas

Problema da Mistura expandido

- Para determinados parâmetros de controle, o limite superior de especificação pode ser extrapolado, isto é, $extrapolar_j = 1$ significa que o parâmetro de controle *j* pode ter seu limite superior relaxado)
- wpe_j = Peso para o desvio positivo (de limite superior) do parâmetro j na mistura
- Algumas pilhas não podem ser utilizadas ($desconsiderar_i = 1$ significa que a pilha *i* não pode ser usada)
- Se uma pilha for retomada, deve-se retomar no mínimo retmin toneladas
- Deve-se tirar o máximo possível de cada pilha *i*, isto é, a quantidade que restar na pilha ($dnpilha_i$) deve ser minimizada
- Algumas pilhas devem ser necessariamente retomadas, isto é, $retomar_i = 1$ significa que a pilha *i* deve ser totalmente usada

Problema da Mistura expandido

<u>Dados de entrada (1):</u>

- Pilhas = Conjunto de pilhas
- Parametros = Conjunto dos parâmetros de controle
- t_{ij} = % do parâmetro de controle j em uma tonelada da pilha i
- tl_j = % mínimo admissível para o parâmetro j
- tu_j = % máximo admissível para o parâmetro j
- tr_j = % recomendada para o parâmetro j
- Qu_i = Quantidade máxima de minério, em toneladas, existente na pilha i
- p = quantidade, em toneladas, da mistura a ser formada
- $desconsiderar_i$ = 1 se a pilha i deve ser desconsiderada ou zero c.c
- $retomar_i$ = 1 se a pilha i deve ser obrigatoria retomada ou zero c.c.

Problema da Mistura expandido

Dados de entrada (2):

- wnm_j = Peso para o desvio negativo (relativo à meta) do parâmetro j na mistura
- wpm_j = Peso para o desvio positivo (relativo à meta) do parâmetro j na mistura
- wpe_j = Peso para o desvio positivo relativo à especificação do parâmetro j na mistura
- $wnpilha_i$ = Peso para a quantidade de minério que resta na pilha i (peso relativo ao desvio negativo de pilha)
- wpp = Peso para o desvio positivo de produção
- wnp = Peso para o desvio negativo de produção
- mult = Valor, em toneladas, que indica a unidade de retomada; isto é, a quantidade de minério a ser retomado de uma pilha deve ser múltiplo de mult
- retmin = Menor quantidade que pode ser retomada de uma pilha

Problema da Mistura expandido

Variáveis de decisão:

- x_i = Quantidade de minério a ser retirado da pilha i
- dnm_j = Desvio negativo (relativo à meta), em toneladas, do parâmetro j na mistura
- dpm_j = Desvio positivo (relativo à meta), em toneladas, do parâmetro j na mistura
- dpe_j = Desvio positivo (relativo ao lim. superior de especificação), em ton, do parâmetro j na mistura
- $dnpilha_j$ = Quantidade de minério que sobra, em toneladas, na pilha i (Desvio negativo relativo à quantidade Qu_i disponível na pilha i)
- dpp = Desvio positivo de produção, em toneladas
- dnp = Desvio negativo de produção, em toneladas
- y_i = 1 se a pilha i for retomada e zero caso contrário.

Problema da Mistura expandido

Considerar no Problema da Mistura os seguintes requisitos:

- **Apenas alguns parâmetros de controle podem ter seu limite superior de especificação extrapolado**
- A produção a ser alcançada é uma meta a ser atingida
- Se for retirar minério de uma pilha, que a quantidade retomada seja no mínimo igual a retmin
- Se uma pilha for usada, que seja retomado todo o seu minério
- Se for retomar minério de uma pilha, a quantidade retomada deve ser múltipla de mult.
- Algumas pilhas devem ser usadas
- Algumas pilhas não podem ser usadas

Problema da Mistura expandido

- Apenas os parâmetros *j* em que $extrapolar_j = 1$ podem ter seus limites extrapolados:

$$\sum_{i \in Pilhas} (t_{ij} - tu_j) x_i - dpe_j \times extrapolar_j \leq 0 \forall j \in Parametros$$

$$\sum_{i \in Pilhas} (t_{ij} - tl_j) x_i + dne_j \times extrapolar_j \geq 0 \forall j \in Parametros$$

- Os desvios dpe_j e dne_j devem ser penalizados na função objetivo.

Problema da Mistura expandido

- Admite-se que haja excesso (*dpm_j*) ou falta (*dnm_j*) do parâmetro $_j$ na mistura em relação à meta de qualidade

$$\sum_{i \in Pilhas} \left(t_{ij} - tr_j\right) x_i + dnm_j - dpm_j = 0 \quad \forall j \in Parametros$$

- Os desvios *dnm_j* e *dpm_j* devem ser penalizados na função objetivo.

Problema da Mistura expandido

Considerar no Problema da Mistura os seguintes requisitos:

- Apenas alguns parâmetros de controle podem ter seu limite superior de especificação extrapolado
- **A produção a ser alcançada é uma meta a ser atingida**
- Se for retirar minério de uma pilha, que a quantidade retomada seja no mínimo igual a retmin
- Se uma pilha for usada, que seja retomado todo o seu minério
- Se for retomar minério de uma pilha, a quantidade retomada deve ser múltipla de mult.
- Algumas pilhas devem ser usadas
- Algumas pilhas não podem ser usadas

Problema da Mistura expandido

- Restrição de atendimento à demanda relaxada:
  - A produção a ser alcançada é uma meta a ser atingida

$$\sum_{i \in Pilhas} x_i - dpp + dnp = p$$

- Os desvios *dpp* e *dnp* devem ser penalizados na função objetivo.
  - Estes desvios devem ser multiplicados por um peso para que tenham a importância adequada na função objetivo.

Problema da Mistura expandido

Considerar no Problema da Mistura os seguintes requisitos:

- Apenas alguns parâmetros de controle podem ter seu limite superior de especificação extrapolado
- A produção a ser alcançada é uma meta a ser atingida
- **Se for retirar minério de uma pilha, que a quantidade retomada seja no mínimo igual a retmin**
- Se uma pilha for usada, que seja retomado todo o seu minério
- Se for retomar minério de uma pilha, a quantidade retomada deve ser múltipla de mult.
- Algumas pilhas devem ser usadas
- Algumas pilhas não podem ser usadas

Problema da Mistura expandido

- A variável y_i *será igual a 1 se a* pilha i for retomada

$$y_i \geq \frac{x_i}{Qu_i} \quad \forall i \in Pilhas \;\; | \; Qu_i \neq 0$$

- Deve-se retomar no mínimo *retmin* toneladas de uma pilha, caso esta seja usada (ou seja: caso $y_i = 1$)

$$x_i \geq \mathrm{retmin} \times y_i \quad \forall i \in Pilhas$$

Problema da Mistura expandido

Considerar no Problema da Mistura os seguintes requisitos:

- Apenas alguns parâmetros de controle podem ter seu limite superior de especificação extrapolado
- A produção a ser alcançada é uma meta a ser atingida
- Se for retirar minério de uma pilha, que a quantidade retomada seja no mínimo igual a retmin
- **Se uma pilha for usada, tentar retomar todo o seu minério**
- Se for retomar minério de uma pilha, a quantidade retomada deve ser múltipla de mult.
- Algumas pilhas devem ser usadas
- Algumas pilhas não podem ser usadas

Problema da Mistura expandido

- Se uma pilha *i* for retomada, deve-se <u>tentar</u> retomar totalmente esta pilha:

$$x_i + dnpilha_i = Qu_i y_i \quad \forall i \in Pilhas$$

- ***dnpilha$_i$*** representa a sobra da pilha, que deve ser penalizada (minimizada) na função objetivo.

Problema da Mistura expandido

Considerar no Problema da Mistura os seguintes requisitos:

- Apenas alguns parâmetros de controle podem ter seu limite superior de especificação extrapolado
- A produção a ser alcançada é uma meta a ser atingida
- Se for retirar minério de uma pilha, que a quantidade retomada seja no mínimo igual a retmin
- Se uma pilha for usada, tenta-se retomar todo o seu minério
- **Se for retomar minério de uma pilha, a quantidade retomada deve ser múltipla de mult.**
- Algumas pilhas devem ser usadas
- Algumas pilhas não podem ser usadas

Problema da Mistura expandido

- A quantidade de minério retomado de uma pilha i tem que ser múltipla de **mult**:

$$z_i = x_i \,/\, mult \quad \forall i \in Pilhas$$

$$z_i \in \mathrm{Z}^+ \; \forall i \in Pilhas$$

- Como a variável z_i é inteira, a divisão de x_i por *mult* obrigatoriamente retornará um valor inteiro.

Problema da Mistura expandido

Considerar no Problema da Mistura os seguintes requisitos:

- Apenas alguns parâmetros de controle podem ter seu limite superior de especificação extrapolado
- A produção a ser alcançada é uma meta a ser atingida
- Se for retirar minério de uma pilha, que a quantidade retomada seja no mínimo igual a retmin
- Se uma pilha for usada, tenta-se retomar todo o seu minério
- Se for retomar minério de uma pilha, a quantidade retomada deve ser múltipla de mult.
- **Algumas pilhas devem ser usadas**
- **Algumas pilhas não podem ser usadas**

Problema da Mistura expandido

- Os dados de entrada *retomar*$_i$ e *desconsiderar*$_i$ indicam se as pilhas *i* e *j* devem, respectivamente, ser ou não utilizadas.

$$x_i = Qu_i - dnpilha_i \; \forall i \in Pilhas \mid retomar_i = 1$$

$$x_i = 0 \; \forall i \in Pilhas \mid desconsiderar_i = 1$$

Problema da Mistura expandido

- Função objetivo: minimizar o não-atendimento às metas

$$\min \sum_{j \in Parametros} wpm_j dpm_j + \sum_{j \in Parametros} wnm_j dnm_j +$$

$$\sum_{j \in Parametros} wpe_j dpe_j + \sum_{j \in Parametros} wne_j dne_j +$$

$$\sum_{i \in Pilhas} wnpilha_i \times dnpilha_i + (wnp \times dnp + wpp \times dpp)$$

Problema da Mistura expandido

Considerar no Problema da Mistura o seguinte requisito adicional:

- **Algumas pilhas devem ser usadas na totalidade, independentemente de outras restrições**

Solução:

- As restrições

$$x_i = Qu_i - dnpilha_i \; \forall i \in Pilhas \mid retomar_i = 1$$

Devem ser substituídas por:

$$x_i = Qu_i \quad \forall i \in Pilhas \mid retomar_i = 1$$

Analogamente, substituir: $z_i = x_i / mult \quad \forall i \in Pilhas$

Por $z_i = x_i / mult \quad \forall i \in Pilhas \mid retomar_i = 0$

Problema da Mistura expandido

Neste caso, o problema pode se tornar inviável, porque está-se retirando todo o minério de determinadas pilhas e exigindo que a produção seja fixa e que, além disso, a quantidade retirada de cada pilha seja múltipla de *mult*. Para evitar a geração de solução inviável por causa disso, basta implementar a restrição de relaxamento da produção, isto é:

$$\sum_{i \in Pilhas} x_i - dpp + dnp = p$$

As variáveis *dpp* e *dnp* devem ser minimizadas na função objetivo.