Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas – ICEB

PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO DE VEÍCULOS[1]

(*Vehicle Scheduling Problem*)

Cássio Roberto de Araújo

cassio@em.ufop.br

Elva Oliveira do Couto

elvacouto@hotmail.com

Ricarlo Martins dos Reis

ricarlomr@bol.com.br

1. Introdução

O Problema de Programação de Veículos (PPV) consiste em gerar uma programação para uma frota tendo como dados de entrada as viagens descritas por uma tabela de horários. O modelo pode ser visto como um Problema de Programação Inteira ou como um Problema de Fluxos em Redes. O objetivo do problema consiste em determinar o número mínimo de veículos necessários para se realizar um dado conjunto de viagens e definir a seqüência de viagens a ser executada por cada veículo da frota mínima, tal que o custo da operação seja minimizado.

A forma básica do PPV se apresenta quando o problema trata de uma **única garagem** e um **único tipo de veículo** (PPVUG ou simplesmente PPV). Situações mais complexas surgem quando existem mais de uma garagem, diferentes tipos de veículos (frota mista), número limitado de veículos, tempo limitado de operação, dentre outros. A forma básica do PPV é fundamental na resolução de outros problemas mais complicados, por isso chamado de *Problema Básico de Programação de Veículos*.

[1] Trabalho da disciplina "Otimização Combinatória" (CIC370), oferecida no segundo semestre letivo de 2002 pelo Prof. Marcone Jamilson Freitas Souza (marcone@iceb.ufop.br).

Uma empresa de transporte público pode ter várias garagens, mas com áreas de atuação que não se interceptam (cada linha está associada a uma garagem). Assim, um PPV com várias garagens pode ser resolvido como um conjunto de sub-problemas com uma única garagem. Este é um problema da classe *NP-difícil*, devendo ser resolvido por métodos heurísticos.

Outra situação importante ocorre quando o PPV tem frota mista. Como por exemplo, mini-ônibus, ônibus padrão e articulados, ou seja, veículos com capacidades diferentes. Este problema é definido pela literatura como *Problema de Programação de Veículos de Diferentes Tipos* (ou *com Frota Mista*). O objetivo é encontrar uma solução que minimize o custo operacional da frota, associando a cada viagem um veículo com capacidade adequada e respeitando a limitação do número total de veículos disponível por tipo. Este é, assim como o PPV com várias garagens, um problema da classe *NP-difícil*.

Neste trabalho será abordado o PPV na sua forma básica, isto é, com uma única garagem e um único tipo de veículo. A seguir serão apresentados o PPV e suas características, bem como seus principais métodos de resolução.

2. A Representação básica do PPV

Para representar o PPV utiliza-se uma rede onde cada nó representa uma viagem e os arcos são as ligações possíveis entre elas. Além disso, representa-se a garagem por dois nós: um para a partida e outro para o retorno à garagem. O nó de partida da garagem está ligado a cada um dos nós que representam as viagens e estas ligadas ao nó de retorno à garagem. Isto se faz necessário para permitir que qualquer viagem seja o início ou o término de um bloco de viagens a ser executada por um determinado veículo. Como solução inicial, temos que cada viagem é executada por um veículo, portanto o nó de partida da garagem deve ter oferta de fluxo igual ao total de viagens e o nó de retorno à garagem uma demanda de fluxo com o mesmo valor. Além disso, deve ser introduzido um arco ligando os nós partida e retorno à garagem para manter a factibilidade do problema, isto é, para não haver excesso de oferta no nó de partida da garagem e carência no nó de retorno à garagem, caso o número mínimo de veículos seja menor que o número de viagens. Em termos de fluxos em redes, o PPV pode ser definido como:

- $V = \{1,2,3...,n\}$ conjunto de n viagens;
- b_i o ponto inicial da viagem i;
- e_i o ponto final da viagem i;
- d_i o horário de partida de b_i; e,
- a_i o horário de chegada em e_i.

O arco (i,j) representa a ligação da viagem i com a viagem j, t_{ij} representa o *tempo de viagem em trânsito ou viagem morta* de e_i até b_j. A garagem é representada pelos nós r (partida da garagem) e s (retorno à garagem). Um par de viagens (i, j) é *compatível* se:

$$d_j - a_i \geq t_{ij} \qquad (1)$$

onde o custo deste arco é dado por:

$$c_{ij} = K_1\, t_{ij} + K_2\, (tempo\ de\ espera) \qquad (2)$$

onde K_1 e K_2 são constantes associadas aos custos operacionais do veículo, e o *tempo de espera* é dado por d_j - a_i - t_{ij}. Os valores destas constantes são definidos pelo usuário e variam de acordo com a situação operacional. Com o objetivo de minimizar o número de veículos, um Custo Fixo é atribuído à primeira viagem e à última viagem de cada veículo. O custo de cada arco (r,i) bem como o custo dos arcos (i,s) é dado por

$$c_{ij} = K_1\, t_{ij} + Custo\ Fixo/2 \qquad \text{se } i = r \text{ ou } j = s \qquad (3)$$

Para ilustrar a representação mencionada acima considere uma tabela de viagens dada pela tabela 1. Nesta tabela temos para cada viagem o horário e local de partida e horário e local de chegada. Quando um veículo termina uma viagem deve-se considerar quais viagens ele pode executar, além de considerar o retorno à garagem. Por exemplo, após executar a viagem 1, um veículo pode executar as viagens 3 ou 4 ou 5. Dessa forma, são incluídos os arcos (1,3), (1,4) e (1,5) com tempos de espera no terminal de 25 minutos, 55 minutos e 1 hora e 25 minutos respectivamente. Assim, incluímos na rede os arcos de todas as viagens compatíveis bem como os arcos que ligam a partida da garagem a cada viagem e os arcos que ligam cada viagem ao nó que representa o retorno à garagem. A figura 1 ilustra graficamente a rede para as viagens da tabela 1.

Viagem	Partida	Local	Chegada	Local
1	06:00	Terminal 1	06:35	Terminal 1
2	06:30	Terminal 1	07:05	Terminal 1
3	07:00	Terminal 1	07:35	Terminal 1
4	07:30	Terminal 1	08:05	Terminal 1
5	08:00	Terminal 1	08:35	Terminal 1

tabela 1 – Conjunto de 5 viagens com horários e locais de partida e chegada

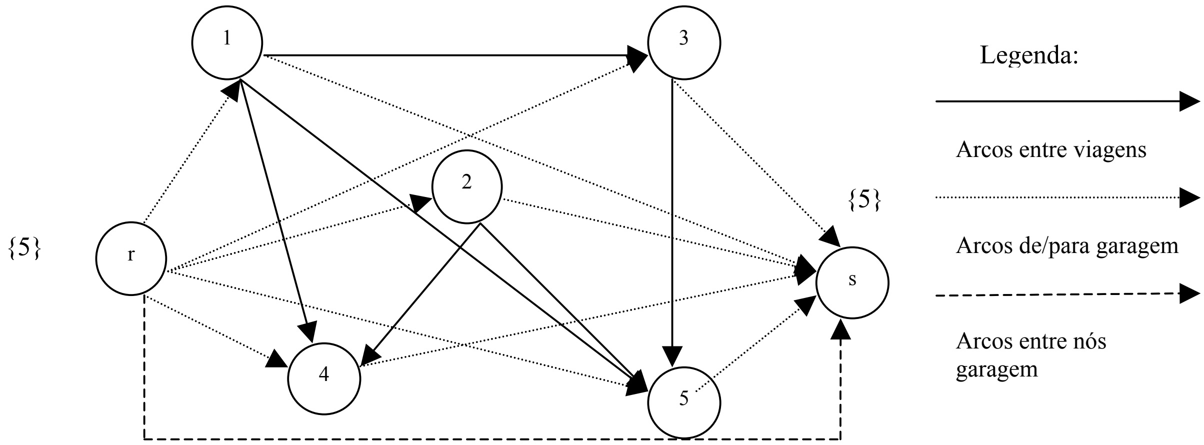

figura 1 – Rede genérica para o PPV da tabela 1.

Para que a representação da rede fique mais adequada é necessário dividir cada nó que representa as viagens em dois nós: um para representar o início da viagem e outro para representar o final dela. Isto é necessário porque cada nó viagem exige que exatamente uma unidade de fluxo passe por ele, isto é, cada viagem deve ser executada por exatamente um veículo. Assim, cada nó que representa a viagem *i* é divido em dois nós: *i'* para o início da viagem e *i"* para o final da viagem. Para que cada viagem esteja associada com uma unidade de fluxo introduz-se o arco (*i'*, *i"*) com custo nulo e limites inferior e superior iguais a um. Além disso, o nó que representa a partida da garagem é ligado a cada nó que representa o início da viagem e cada nó que representa o final da viagem é ligado ao nó que representa o retorno à garagem. Existem duas possibilidades para o arco que ligam os nós que representam a garagem: se o arco estiver no sentido (*r*,*s*), então estes nós devem apresentar oferta e demanda iguais ao número de viagens; se o arco estiver no sentido (*s*,*r*) a rede se torna cíclica e este arco é dito *arco de retorno*. Dessa forma, esta formulação do PPV se torna um Problema de Circulação. A rede que representa o PPV como Problema de Circulação é dada pela figura 2.

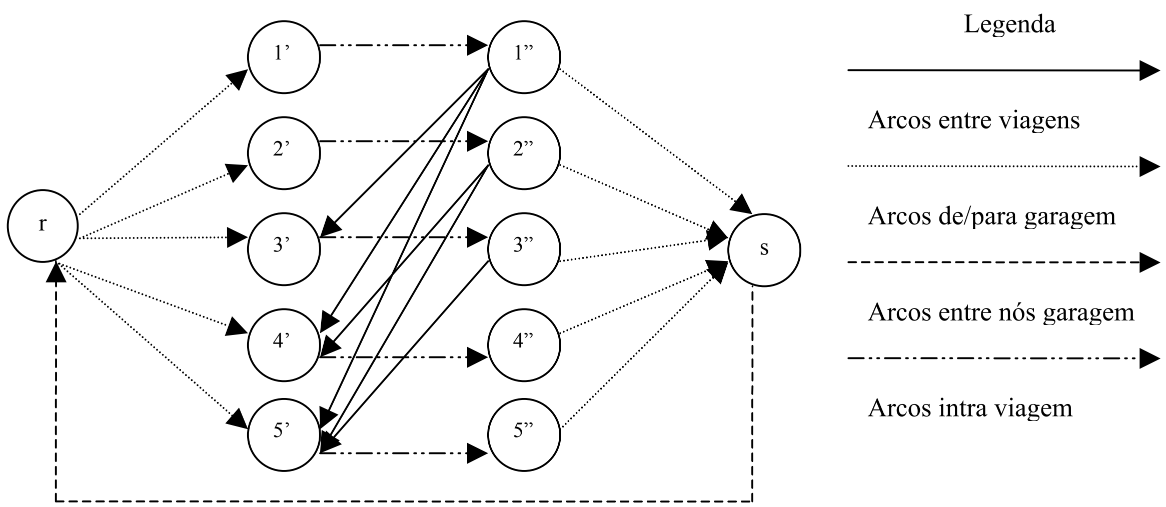

figura 2 – Representação do PPV como Problema de Circulação

A formulação matemática do Problema de Circulação para o PPV é dada por:

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} f_{ij} \qquad (4)$$

sujeito a

$$\sum_{j \in N} f_{ij} - \sum_{j \in N} f_{ji} = 0 \qquad \forall i \in N \qquad (5)$$

$$f_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in A - (s,r) \qquad (6)$$

onde $N = \{r,s\} \cup \{i', i'' \ \ \forall i \in V\}$ e $A = \{(i', i''), (r,i'), (i'',s), \ \forall i \in V\} \cup \{(i'', j'), \ \ \forall (i,j)$ par de viagens compatíveis$\} \cup \{(s,r)\}$. Neste sentido, se $f_{ij} = 1$ a viagem j é executada logo após a viagem i e $f_{ij} = 0$ caso contrário. A expressão (4) minimiza o custo total, a expressão (5) diz respeito ao princípio da conservação de fluxo e a expressão (6) diz respeito aos valores que o fluxo pode receber para os arcos de viagens compatíveis.

O PPV pode ser, também, formulado como um Problema de Designação, mas neste trabalho utilizaremos a representação do PPV como um Problema de Circulação.

3. Metodologia de resolução do PPV

3.1 O PPV como Problema de Circulação

Com a abordagem do PPV como Problema de Fluxos em Redes, neste caso, representando-o como um Problema de Circulação, diversos algoritmos podem ser aplicados. Estes algoritmos resolvem eficientemente problemas de Fluxo com Custo Mínimo. Dentre os diversos algoritmos de Fluxo com Custo Mínimo os principais são o Simplex para Redes e o Out-of-Kilter. Neste trabalho será modelado matematicamente o PPV como Problema de Circulação, cujo modelo será resolvido pelo software LINGO.

O Problema de Fluxo com Custo Mínimo (PFCM) é o problema mais geral de Fluxos em Redes. Dessa forma, outros problemas como o Problema de Caminho Mínimo, Problema de Fluxo Máximo, Problema de Designação, Problema de Transporte e o Problema de Circulação são derivados do PFCM. A formulação matemática (matricial) do PFCM é dada por:

$$\text{Min } \boldsymbol{cx} \qquad (7)$$

sujeito a

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \qquad (8)$$

$$\boldsymbol{l} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u} \qquad (9)$$

onde $\boldsymbol{c}$ é o vetor de custos, $\boldsymbol{x}$ é o vetor de fluxos, $\boldsymbol{b}$ é o vetor de demanda nos nós, $\boldsymbol{A}$ é a matriz de coeficientes das restrições, $\boldsymbol{l}$ e $\boldsymbol{u}$ é o vetor de limites inferiores e superiores dos arcos respectivamente. A expressão (7) minimiza o custo total, a expressão (8) diz respeito ao princípio da conservação de fluxo e a expressão (9) diz respeito aos valores que o fluxo pode receber para os arcos. A matriz $\boldsymbol{A}$ é dita *matriz de incidência*, cujo número de linhas corresponde ao número de nós e o número de colunas corresponde ao número de arcos da rede. Para representarmos um dado arco (i,j), a coluna a_{ij} tem (+1) na linha i e (-1) na linha j e os demais elementos da coluna são iguais a zero.

O Problema de Circulação é um PFCM quando é nula a demanda de todos os nós, isto é, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

3.2 Exemplo de uma aplicação

A rede gerada pela tabela de viagens (tabela 1) é dada pela figura 3, onde:

Os nós foram numerados tal que:

a) cada nó que representa o início de viagem (i') possui o número correspondente da viagem;

b) cada nó que representa o final de viagem (i") possui o número igual ao número de i' + Total de Viagens;

c) o nó que representa o início de viagem (r) possui o número 2*Total Viagens +1;

d) o nó que representa o início de viagem (r) possui o número 2*Total Viagens +2;

Cada arco da rede foi numerado em ordem seqüencial

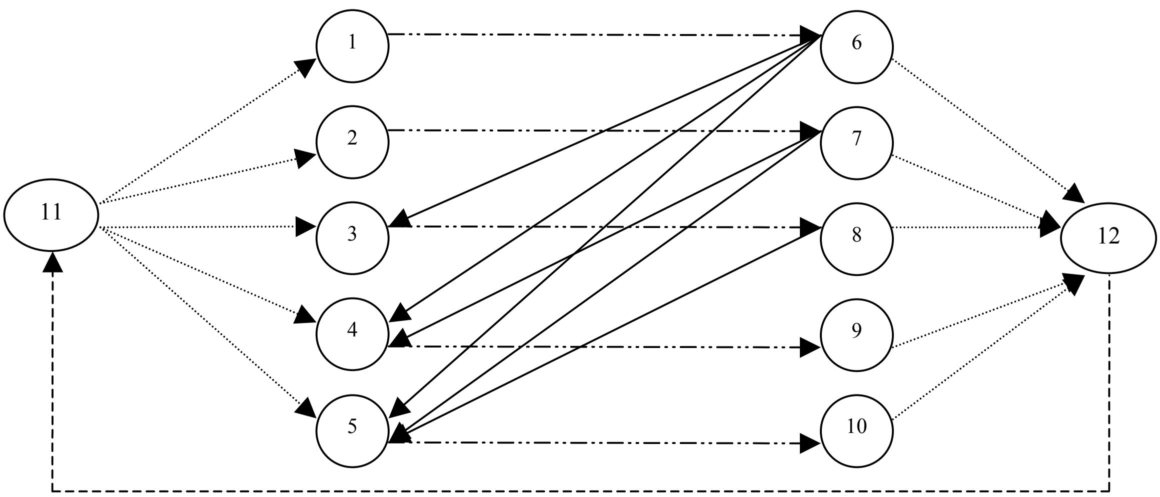

figura 3 – Rede gerada pela tabela 1

Para modelar matematicamente a rede da figura 3 tem-se que:

- Total de Viagens : 5;
- Número de nós: 12;
- Número de arcos: 22;
- *Custo Fixo* = 100;
- $\boldsymbol{K_1} = 2$ e $\boldsymbol{K_2} = 1$;
- Tempo de viagem ociosa: $t_{ij} = 0 \ \forall (i, j) \in A$, pois só existe um terminal (Terminal1) na tabela de viagens;
- O custo dos arcos garagem-início de viagem (r,i') e fim de viagem-garagem (i'',s) é dado pela expressão (3): $c_{ij} = 100 / 2 = 5$;
- Custo dos arcos intra viagem (i',i''): $c_{ij} = 0$;
- Custo dos arcos que representam viagens compatíveis é dado pela expressão (2):

  c_{ij} = *tempo de espera*, uma vez que $\boldsymbol{K_1} = 2$ e $\boldsymbol{K_2} = 1$ e $t_{ij} = 0$;
- O *tempo de espera* é dado por: $d_j - a_i - t_{ij} = d_j - a_i$;

Realizados os cálculos com a transformação dos horários de partida e chegada para minutos, os valores dos custos, de limites inferiores e de limites superiores dos arcos estão descritos na tabela 2.

N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
c	50	50	50	50	50	0	0	0	0	0	25	55	85	25	55	25	50	50	50	50	50	0
l	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5

tabela 2 – Valores dos custos, limites inferiores e superiores nos arcos.

Matriz de Incidência:

$$A = \left| \begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{matrix} \right|$$

O modelo para resolução no software LINGO em combinação com o Excel (entrada e saída de dados) é dado pela figura 4.

```
MODEL:
TITLE PROBLEMA DE PROGRAMACAO DE VEICULOS;
SETS:
      NOS: DEMANDA;
      ARCOS: X, C, LIMITE_INF, LIMITE_SUP;
      MATRIZ(NOS,ARCOS): A;
ENDSETS
DATA:
      !LE OS DADOS DO EXCEL;
      NOS, ARCOS, C, LIMITE_INF, LIMITE_SUP, DEMANDA, A =
@OLE('PPV.XLS','NOS','ARCOS','CUSTOS','LIMITES_INFERIORES',
'LIMITES_SUPERIORES',
     'DEMANDAS', 'MATRIZ_INCIDENCIA');
ENDDATA

MIN = FO;
FO = @SUM(ARCOS(k): C(k) * X(k));
@FOR(NOS(i): @SUM(ARCOS(j): A(i,j) * X(j)) = DEMANDA(i));
@FOR(ARCOS(k): @BND(LIMITE_INF(k),X(k),LIMITE_SUP(k)));

!ENVIA A SOLUCAO OTIMA PARA O EXCEL;
DATA:
      @OLE('PPV.XLS', 'FLUXOS', 'VALOR_OTIMO') = X, FO;
ENDDATA
END
```

figura 4 – Modelo para resolução do PPV no software LINGO.

Os resultados desta aplicação estão descritos abaixo :

- Valor da função objetivo: 275
- Número (mínimo) de veículos necessários: 02

A figura 5 mostra a rede apenas com os arcos que fazem parte da solução, isto é, com fluxo maior que zero. Podemos identificar através desta rede a programação ótima da frota. Assim, com dois veículos as viagens podem ser executadas tal que o veículo 01 executa as viagens 1, 3 e 5, enquanto que o veículo 02 executa as viagens 2 e 4.

N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Fluxo	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**2**

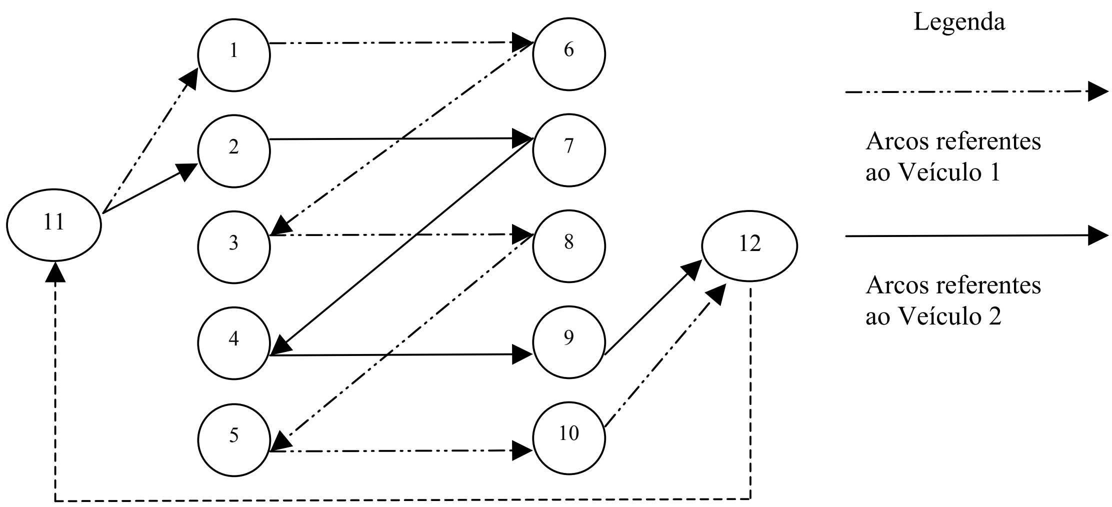

figura 5 – Rede contendo apenas arcos que fazem parte da solução.

4. Conclusões

Neste trabalho foi abordado o Problema de Programação de Veículos e como ele pode ser representado. Foi apresentado a forma básica do PPV, isto é, quando o problema trata de uma única garagem e um único tipo de veículo, e que situações mais complexas surgem quando existem mais de uma garagem, diferentes tipos de veículos, número limitado de veículos, tempo limitado de operação, etc.

Além disso, para exemplificar o método de resolução do PPV, foi apresentado uma pequena aplicação para uma tabela com cinco viagens que gerou uma rede de 12 nós e 22 arcos. Para uma tabela de horários com poucas viagens, a resolução do modelo é extremante simples. No entanto, para casos reais, a tabela de horários, como por exemplo de uma empresa de transporte público, contém muitas viagens. Nestes casos, a rede gerada pode conter milhares de nós e milhões de arcos e, portanto, devem ser aplicadas técnicas de otimização de sistemas de grande porte como a técnica de geração de colunas.