

## Modelagem de problemas de programação linear inteira

Marcone Jamilson Freitas Souza, Departamento de Computação, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, 35400-000 Ouro Preto, MG, Brasil. Homepage: <http://www.decom.ufop.br/prof/marcone> E-mail: [marcone@iceb.ufop.br](mailto:marcone@iceb.ufop.br)

- (1) Uma empresa siderúrgica possui 3 usinas e cada uma delas requer uma quantidade mensal mínima de minério para operar. A empresa adquire minério de 3 minas diferentes. Cada uma das minas tem uma capacidade máxima de produção mensal estabelecida. Por imposições contratuais, o custo do minério para a empresa é composto por um custo fixo mensal para cada mina (este valor é pago em caso de haver produção na mina), mais um custo de transporte (\$/t) que varia de acordo com a distância entre as minas e usinas (cada par mina/usina tem um custo diferente). Os dados são mostrados na tabela abaixo:

	Mina 1 (\$/t)	Mina 2 (\$/t)	Mina 3 (\$/t)	Requisições de minério (t/mês)
Usina 1	10	8	13	12300
Usina 2	7	9	16	15400
Usina 3	6,5	10,8	12,6	13300
Cap. máx. das minas	11500	16500	13000	-
Custo fixo (\$)	50000	40000	30000	-

Construir um modelo de otimização para determinar a quantidade de minério a ser comprada de cada mina e levada a cada usina de forma a minimizar o custo total de compra de minério.

- (2) Uma cadeia de lojas deseja planejar sua política de compras de um determinado material para um período de 6 meses. O consumo diário previsto para os seis meses é o apresentado na tabela a seguir:

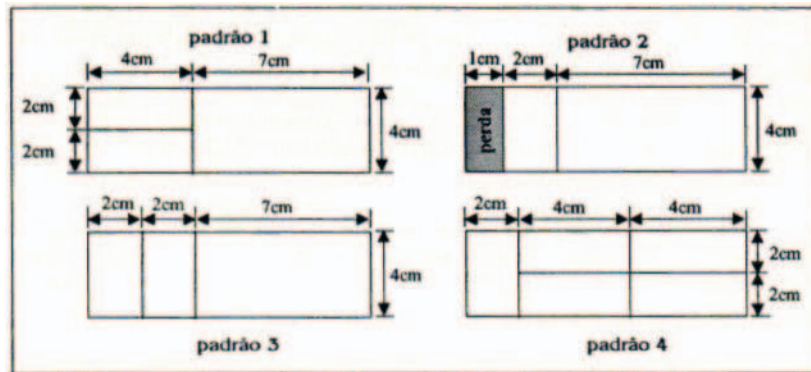
Mês	1	2	3	4	5	6
Consumo diário (t)	2	3	3	4	5	3

Mensalmente é feito um pedido do material à fábrica, que faz a entrega no início do primeiro dia de cada mês. Esse material é estocado. No início de cada dia, um caminhão passa pelo estoque, apanha a quantidade a ser consumida naquele dia e faz a distribuição pelas diversas lojas. Os custos de estocagem são de \$200,00 por tonelada e por dia, e são calculados levando-se em conta a quantidade estocada durante o dia. A capacidade de estocagem é de 150 toneladas. O custo do material varia de mês para mês segundo a seguinte tabela:

Mês	1	2	3	4	5	6
Custo por tonelada (\$)	90000	80000	88000	87000	96000	93000

Determinar a política de compras de modo a minimizar custos de estocagem e de compra do material, considerando o mês de 30 dias.

- (3) Uma serralheria dispõe de barras de 6 metros de comprimento que devem ser cortadas para obter barras menores nos seguintes tamanhos: 50 barras de 2 metros, 60 barras de 3 metros e 90 barras de 4 metros. Elabore um modelo de programação linear inteira que minimize as perdas com os cortes.
- (4) Um fabricante de tiras metálicas recebeu um pedido para produzir 2000 tiras de tamanho  $2\text{ cm} \times 4\text{ cm}$  e 1000 tiras de  $4\text{ cm} \times 7\text{ cm}$ . As tiras podem ser produzidas a partir de chapas maiores disponíveis nos tamanhos de  $10\text{ cm} \times 3000\text{ cm}$  e  $11\text{ cm} \times 2000\text{ cm}$ . O departamento técnico encarregado de planejar o atendimento ao pedido decidiu que os padrões de corte mostrados na figura a seguir são adequados para produzir as tiras encomendadas. Formule um modelo de programação linear que permita minimizar o material usado (ou minimizar as perdas) no atendimento à encomenda.



- (5) Uma determinada empresa está interessada em maximizar o lucro mensal proveniente de quatro de seus produtos, designados por I, II, III e IV. Para fabricar esses produtos, ela utiliza dois tipos de máquinas (M1 e M2) e dois tipos de mão-de-obra (MO1 e MO2), que têm as seguintes disponibilidades:

Máquinas	Disponibilidades (máquina-hora/mês)
M1	80
M2	20

Mão-de-obra	Disponibilidade (homem-hora/mês)
MO1	60
MO2	40

O setor técnico da empresa fornece os seguintes coeficientes, que especificam o total de horas de máquina e horas de mão-de-obra necessárias para a produção de uma unidade de cada produto:

Máquinas	Produtos			
	I	II	III	IV
M1	5	4	8	9
M2	2	6	-	8

Mão-de-obra	Produtos			
	I	II	III	IV
MO1	2	4	2	8
MO2	7	3	-	7

O setor comercial da empresa fornece as seguintes informações:

Produtos	Potencial de vendas (unidades/mês)	Lucro Unitário (R\$/mês)
I	70	10,00
II	60	8,00
III	40	9,00
IV	20	7,00

Deseja-se planejar a produção mensal da empresa que maximize o lucro.

- (6) Uma fábrica tem dois tipos de inspetores, I e II, responsáveis pelo controle de qualidade. Há necessidade de que pelo menos 1800 peças sejam inspecionadas em 8 horas por dia. Os inspetores do tipo I podem inspecionar peças numa taxa de 25 por hora, com uma confiabilidade de 95%. Já os inspetores do tipo II inspecionam 15 peças por hora com um confiabilidade de 95%. Os salários são de R\$4,00/hora para o inspetor I e de R\$3,00/hora para o inspetor II. Cada erro de qualquer dos inspetores custa à fábrica R\$2,00. Há disponíveis 8 inspetores tipo I e 10 do tipo II. Determinar o número ótimo de inspetores que minimizam o custo total de inspeção.
- (7) Uma firma estabelece um contrato com um cliente para fornecer 500 unidades do produto A e 700 unidades do produto B ao final de 2 meses. Os custos de produção (R\$/mês) variam de acordo com o mês, conforme a tabela a seguir.

Produto	Mês	
	1	2
A	52	23
B	100	60

A entrega ao cliente será realizada de uma única vez no final do segundo mês. Os itens fabricados no primeiro mês serão estocados até a entrega. Os custos unitários de armazenamento são respectivamente R\$0,10 e R\$0,20 para os produtos A e B. Além disso, a matéria-prima deixada de um mês para o outro custa R\$0,01 por Kg para ser estocada. Considere que a matéria-prima que sobre ao final do segundo mês já está computada no custo de fabricação e que a mão-de-obra excedente pode ser aproveitada em outras atividades. O consumo de matéria-prima e mão-de-obra por unidade de produto fabricado bem como as disponibilidades da firma são mostrados na tabela a seguir:

Item	Produtos		Disp/Mês	
	A	B	1	2
Mão-de-obra (h)	0,5	0,8	350	500
Matéria prima (Kg)	10	7	6000	4000

Planeje o processo produtivo da empresa para cumprir o contrato a custo total mínimo.

- (8) O diretor de um hospital deve escolher um esquema de designação de leitos e quartos em uma nova ala que será construída. Existem 3 tipos de quartos possíveis:
- Com um leito
  - Com dois leitos
  - Com três leitos

O total de quartos a construir não pode ultrapassar 70. Por imposições de demanda, deverão ser oferecidos pelo menos mais 120 leitos. A percentagem de quartos de um leito deve ser restrita entre 15 a 30% do total de quartos. A necessidade em área construída é de:

- 10 m<sup>2</sup> por quarto com um leito
- 14 m<sup>2</sup> por quarto com dois leitos
- 17 m<sup>2</sup> por quarto com três leitos

Os pacientes dos quartos com dois e três leitos exigem apenas 80% da mão-de-obra que os do quarto individual. O que o hospital recebe por cada paciente internado é inversamente proporcional à capacidade do número de pessoas do quarto em que ele está internado. Considerando o hospital sempre lotado, formule o problema de forma a:

- (a) Minimizar o esforço da mão-de-obra em apoio médico e administrativo
  - (b) Maximizar a arredação global
  - (c) Maximizar o número de leitos
  - (d) Minimizar o espaço necessário para a nova ala
- (9) A companhia Coelho S.A. fabrica motores para brinquedos e pequenos aparelhos. O departamento de marketing está prevendo vendas de 6100 unidades do motor Roncam no próximo semestre. Esta é uma nova demanda e a companhia terá que testar sua capacidade produtiva. O motor Roncam é montado a partir de três componentes: o corpo, a base e a blindagem. Alguns destes componentes podem ser comprados de outros fornecedores, se houver limitações da Coelho S.A. Os custos de produção e os custos de aquisição em R\$/unidade estão resumidos na tabela a seguir.

Componente	Custo de Aquisição (em R\$)	Custo de Produção (em R\$)
Corpo	10	8
Base	20	20
Blindagem	16	10

A fábrica da Companhia Coelho S.A. tem três departamentos. O requisito de tempo em minutos que cada componente consome em cada departamento está resumido na próxima tabela. O tempo disponível na companhia para cada componente está listado na última linha.

Componente	Tempo de Preparação (em minutos)	Tempo de molde (em minutos)	Tempo de fabricação (em minutos)
Corpo	2	4	2
Base	5	2	4
Blindagem	4	5	5
Disponibilidade	49200	49200	49200

Elabore um modelo, baseado em programação linear, que otimize o custo envolvido no atendimento ao pedido de vendas dos brinquedos.

Sugestão:

Seja  $x_{ij}$  a quantidade de componentes  $i = \begin{cases} 1 & \text{Se o componente for o Corpo,} \\ 2 & \text{Se o componente for a Base,} \\ 2 & \text{Se o componente for a Blindagem.} \end{cases}$  a serem utilizados no modo  $j = \begin{cases} A & \text{Se o componente for adquirido,} \\ F & \text{Se o componente for fabricado.} \end{cases}$

- (10) O administrador de um hospital deseja determinar o escalonamento dos enfermeiros. Para isso ele organiza um sistema de plantão dividindo o dia em 8 períodos de 3 horas. A tabela seguinte mostra o número mínimo de enfermeiros que devem estar presentes em cada horário.

Horário	24-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24
# enfermeiros	30	20	40	50	60	50	40	40

Cada enfermeiro cumpre um plantão normal de 6 horas, que pode começar apenas no início de um destes períodos. Alguns enfermeiros podem ser solicitados para estender o plantão por mais 3 horas seguidas. A hora-extra custa 50% mais caro. Em cada plantão, não mais que 40% dos enfermeiros podem estar cumprindo hora-extra. Como o administrador deve escalar os enfermeiros, minimizando o custo?

- (11) Há um conjunto de  $m$  mochilas, cada qual com uma capacidade  $b_i$  em peso, e uma lista de  $n$  objetos. Sabendo-se que existe uma única unidade de cada objeto  $j$ , que cada um deles traz um retorno  $p_j$  e pesa  $w_j$  unidades, formule um modelo que maximize o retorno dos objetos a serem alocados às mochilas.
- (12) A LCL Motores recebeu recentemente \$90.000,00 em pedidos de seus 3 tipos de motores. Cada motor necessita de um determinado número de horas de trabalho no setor de montagem e de acabamento. A LCL pode terceirizar parte de sua produção. A tabela a seguir resume esses dados:

Modelo	1	2	3	Total
Demanda	3000 unid.	2500 unid.	500 unid.	6000 unid.
Montagem	1 h/unid.	2 h/unid.	0,5 h/unid.	6000 h
Acabamento	2,5 h/unid.	1 h/unid.	4 h/unid.	10000 h
Custo de produção	\$50	\$90	\$120	-
Terceirizado	\$65	\$92	\$140	-

A LCL Motores deseja determinar quantos motores devem ser produzidos em sua fábrica e quantos devem ser terceirizados de forma a atender à demanda de pedidos.

- (13) A LCL Equipamentos produz 3 tipos de furadeiras que necessitam de tempos diferentes na linha de montagem. Para que cada tipo de furadeira seja fabricada, um custo de preparação da fábrica é incorrido (ajustes que devem ser feitos na linha de montagem). Suponha que todas as furadeiras do mesmo tipo serão produzidas de uma só vez (apenas uma preparação por tipo). Os dados relevantes à análise do problema encontram-se na tabela a seguir. Encontre as quantidades a serem fabricadas para maximizar o lucro do próximo mês.

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Total disponível
Montagem	2 h	3 h	2,5 h	600 h
Pintura	3 h	2 h	2,5 h	500 h
Lucro unitário	\$50	\$60	\$65	-
Preparação	\$5000	\$4000	\$3000	-

- (14) Há um conjunto de  $m$  possíveis localidades para instalar uma fábrica. Há também um conjunto de  $n$  clientes a serem atendidos pelas fábricas. Para cada possível fábrica  $i$  é dado o custo fixo de produção  $f_i$ , sua capacidade de produção  $p_i$  e o custo de transporte  $c_{ij}$  de uma unidade do produto da fábrica  $i$  para o cliente  $j$ . Para cada cliente  $j$  é dada a demanda  $d_j$ . Em quais localidades deve-se instalar as fábricas de forma a atender à demanda requerida no menor custo?
- (15) Há um conjunto de  $n$  cidades e uma matriz de distâncias  $d_{ij}$  entre as cidades. O Problema do Caixeiro Viajante (PCV) consiste em um caixeiro partir de uma cidade, denominada origem, passar por todas as demais  $n - 1$  cidades uma única vez e retornar à cidade origem percorrendo a menor distância possível. Construa o modelo de programação inteira para o PCV.
- (16) Há um depósito para distribuir produtos e um conjunto de  $n - 1$  clientes que devem ser atendidos. Cada cliente  $i$  tem uma demanda  $q_i$  por esses produtos. No depósito há uma frota de veículos de mesma capacidade  $Q$ . É conhecida a matriz de distâncias  $d_{ij}$  entre o depósito e os clientes e entre cada par de clientes. Formule um modelo que faça o roteamento dos veículos, de forma que os clientes sejam atendidos com os veículos percorrendo a menor distância possível.
- (17) Os esgotos de 3 cidades A, B e C, depois de sofrerem um tratamento, são descarregados num rio. O esgoto de cada uma das 3 cidades produz uma quantidade diária de poluentes expressa por  $P_A$ ,  $P_B$  e  $P_C$  toneladas. O tratamento do esgoto pode reduzir a quantidade de poluente até um máximo de 90%. Esta redução é denominada de ‘eficiência da estação de tratamento’ e o custo da estação  $i$  é diretamente proporcional à sua eficiência ( $k \times \text{eficiência}$ ).

Por outro lado, devido à ação bioquímica (aeração, etc.), no final de cada trecho AB e BC do rio, a quantidade de poluentes é reduzida em 10% e 20%, respectivamente, da poluição existente no início de cada trecho. Formule um modelo que determine a eficiência que devem ter as estações de tratamento de modo que, para qualquer ponto do rio, a quantidade de poluentes medida em um dia não ultrapasse  $P$  toneladas e de modo a minimizar o custo das estações de tratamento?

- (18) A administração municipal de uma cidade industrializada pretende instalar uma estação de tratamento para despoluir o rio que passa pela cidade. Estudos preliminares mostram que o rio apresenta quatro índices em desacordo com as recomendações da Organização Mundial de Saúde, conforme tabela a seguir:

Índice	Valor observado ( $g/m^3$ )	Valor recomendado ( $g/m^3$ )
A	26	20 máx
B	72	13 máx
C	54	10 máx
D	8	25 min

Como primeiro passo foi aberta concorrência pública para construção da estação de tratamento com capacidade para  $100m^3/h$ . Uma das firmas participantes da concorrência concluiu que a estação de tratamento poderia utilizar até cinco processos em combinação. As unidades de processo são definidas em  $m^3/h$ . A qualidade da água, obtida nos diversos processos, está na tabela abaixo, onde os índices estão em  $g/m^3$ .

Índice	Processos				
	1	2	3	4	5
A	10 $g/m^3$	8	19	21	20
B	16	6	14	13	45
C	12	15	7	9	16
D	29	20	26	24	30
Custo do tratamento ( $\$/m^3$ )	5,50	6,10	7,90	7,01	4,82

A água tratada pelos diversos processos é reunida, formando um produto cuja qualidade depende linearmente dos índices obtidos nos diversos tratamentos possíveis (inclusive de uma eventual fração de água não tratada que mantém os índices originais). Para elaborar sua proposta, a firma interessada deve determinar os fluxos destinados aos diversos processos de modo a obter um produto final de acordo com o padrão da OMS e pelo menor custo possível. Estabeleça um modelo de programação linear para auxiliar nessa tarefa.

Sugestões: 1) Represente por  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, 5$ , o volume de água poluída, em  $m^3/h$ , destinado a tratamento pelo processo  $j$ . 2) Represente por  $x_6$  o volume de água que não recebe nenhum tipo de tratamento.

- (19) Um avião de transporte possui quatro compartimentos para carga, a saber: compartimento frontal, compartimento central, compartimento da cauda e porão de granel. Os três primeiros compartimentos só podem receber carga em *containers*, enquanto o porão recebe o material em granel. A tabela a seguir resume a capacidade do aparelho:

Compartimento	Peso máximo (t)	Espaço máximo ( $m^3$ )
Frontal	5	35
Central	7	55
Cauda	6	30
Porão	7	30

Objetivando o equilíbrio de vôo, é indispensável que a distribuição da carga seja proporcional entre os compartimentos. Para carregar o avião, existem três tipos de *containers* e duas cargas em granel. Os dois tipos de carga em granel podem ser facilmente transportados conjuntamente, por isso essa carga é aceita em qualquer quantidade.

Carga Tipo	Peso por <i>Container</i> ou por $m^3$ - (t)	Volume por <i>Container</i> ( $m^3$ )	Lucro ( $\$/t$ )
1 ( <i>Container</i> )	0,7 t	0,5	200
2 ( <i>Container</i> )	0,9 t	1	220
3 ( <i>Container</i> )	0,2 t	0,25	175
4 (Granel)	1,2 $t/m^3$	-	235
5 (Granel)	0,7 $t/m^3$	-	180

Elaborar o problema de programação linear que otimize a distribuição da carga de forma a maximizar o lucro do vôo do cargueiro.

- (20) A Capitão Caverna S.A., localizada em Pedra Lascada, aluga 3 tipos de barcos para passeios marítimos: jangadas, supercanoas e arcas com cabine. A companhia fornece juntamente com o barco um capitão para navegá-lo e uma tripulação, que varia de acordo com a embarcação: 1 para jangadas, 2 para supercanoas e 3 para arcas. A companhia tem 4 jangadas, 8 supercanoas e 3 arcas e, em seu corpo de funcionários, 10 capitães e 18 tripulantes. O aluguel é por diárias e a Capitão Caverna lucra \$50 por jangada, \$70 por supercanoas e \$100 por arca. Qual é o esquema de aluguel que maximiza o lucro da firma?
- (21) Há um conjunto de  $m$  professores,  $n$  turmas e  $p$  horários semanais (de segunda à sexta) para a realização das aulas. Diariamente são realizadas  $h$  aulas. Cada turma tem  $p$  aulas semanais. Cada professor  $i$  leciona  $ch_{ij}$  aulas semanais para a turma  $j$  e não pode dar mais do que 2 aulas diárias para cada turma. Cada professor  $i$  tem uma preferência  $c_{ik}$  para dar aula em um dado horário  $k$ . Faça um modelo de PLI que aloque os professores às turmas maximizando a preferência dos professores.
- (22) A LCL Equipamentos produz 3 tipos de furadeiras que necessitam de tempos diferentes na linha de montagem. Para que cada tipo de furadeira seja fabricada, um custo de preparação da fábrica pe incorrido (ajustes que devem ser feitos na linha de montagem). Suponha que todas as furadeiras do mesmo tipo serão produzidas de uma só vez (apenas uma preparação por tipo). Os dados relevantes à análise do problema encontram-se na tabela seguinte. Encontre as quantidades a serem fabricadas para a maximização do lucro do próximo mês.

Modelo	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Total disponível
Montagem	2 h	3 h	2,5 h	600 h
Pintura	3 h	2 h	2,5 h	500 h
Preparação	\$5000	\$4000	\$3000	-
Lucro unitário	\$50	\$60	\$65	-