PESQUISA OPERACIONAL
APLICADA À
MINERAÇÃO

Marcone Jamilson Freitas Souza
Alexandre Xavier Martins
Tatiana Alves Costa
Frederico Augusto C. Guimarães
José Maria do Carmo Bento Alves

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

Sumário

I OTIMIZADOR LINGO **4**

1 Introdução **4**

2 Restrições Lineares **4**

3 Introdução à Linguagem de Modelagem do LINGO **5**
3.1 Função Objetivo 5
3.2 Restrições 6

4 Adicionando Características à Linguagem de Modelagem **6**
4.1 Rotulando as Restrições 6
4.2 Intitulando o Modelo 6
4.3 Inserindo comentários 7

5 Operadores e Funções do LINGO **7**
5.1 Operadores Aritméticos 7
5.2 Operadores Lógicos 7
5.3 Operadores Relacionais 8
5.4 Nível de prioridade dos operadores 8
5.5 Funções matemáticas 8
5.6 Funções de probabilidade 9
5.7 Funções de domínio 9

6 Um modelo completo **9**

7 SETS (Conjuntos) **10**
7.1 Porque SETS? 10
7.2 O que são SETS? 10
7.3 Seção sets 11
7.4 Definindo Conjuntos Primitivos 11
7.5 Definindo conjuntos derivados 12
7.6 Funções sobre conjuntos 14
7.7 Funções de manipulação de conjuntos 15

8 Seção DATA **16**
8.1 Introdução à seção DATA 16
8.2 Parâmetros 17
8.3 Análise "E se..." 18
8.4 Inicializando um atributo com um simples valor 18
8.5 Omitindo valores na seção DATA 19

9 Utilizando Arquivos-texto **19**
9.1 Importando dados de um arquivo texto com @FILE 19
9.2 Exportando dados para um arquivo com @TEXT 21

10 Utilizando planilhas do EXCEL **22**
10.1 Função @OLE 22
10.2 Importando dados do EXCEL com @OLE 22
10.3 Definindo nomes no EXCEL 24
10.4 Excluindo um nome definido no EXCEL 26
10.5 Exportando dados para EXCEL com @OLE 26
10.6 Algumas considerações sobre @OLE 28

11 Embutindo Modelos LINGO no EXCEL **28**

12 Embutindo planilhas do EXCEL no LINGO **30**

13 Utilizando links OLE automatizados no EXCEL **32**
13.1 Comando SET 36

II Modelagem de Problemas de Programação Linear **37**

Parte I
OTIMIZADOR LINGO

1 Introdução

O LINGO é uma ferramenta de modelagem e otimização destinada à resolução de problemas lineares e não-lineares. O processo de otimização consiste em tentar encontrar a melhor solução possível para um dado problema de forma a atingir o maior benefício/lucro ou gerar o menor custo/desperdício. Problemas de otimização são classificados como lineares ou não-lineares, dependendo se os relacionamentos entre as variáveis do problema são lineares ou não.

2 Restrições Lineares

Se todos os termos das variáveis são de primeira ordem, a restrição é dita linear. Isto significa que a restrição não contém uma variável quadrática, cúbica, ou elevada a qualquer potência, um termo dividido por uma variável, ou uma variável multiplicada por outra. Além disso, deve existir proporcionalidade, ou seja, para cada unidade adicionada ou retirada de uma variável, o valor da restrição aumentará ou reduzirá em uma quantidade fixada.

Fórmulas lineares são relações que podem ser graficamente representadas por uma linha reta. Sua forma básica pode ser escrita como:

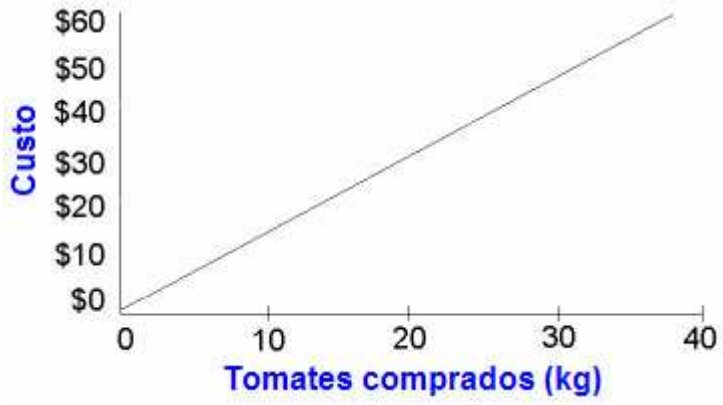
$$y = \mathrm{m}x + \mathrm{b}$$

onde m e b são constantes.

Suponha, por exemplo, que um quilo de tomate custe R$ 1,50. A expressão ou função usada para calcular o custo (c) em termos da quantidade de tomate comprada (t) é:

$$c = 1.5 * t$$

Como esperado, o gráfico da função de custo é uma linha reta:



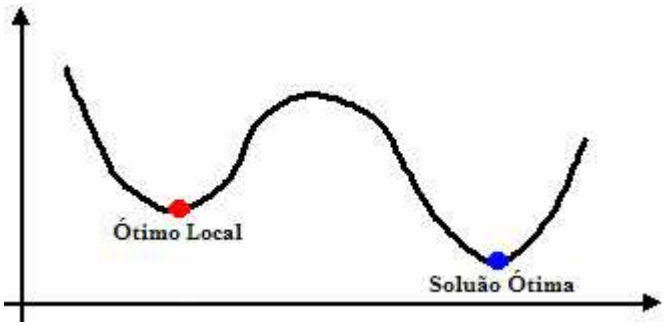
Expressões lineares podem ter múltiplos valores, como por exemplo, se forem acrescentados à função acima o custo de batatas (b) a R$ 0,75 e maçãs (m) a R$ 1,25, teríamos:

$$c = 1.5 * t + 0.75 * b + 1.25 * m$$

Esta nova expressão de custo formada continua sendo linear. Pode-se dizer que ela e a soma de três expressões lineares simples.

Como os modelos lineares podem ser resolvidos de forma mais rápida em ordens de magnitude e com maior precisão do que os modelos não-lineares, é preferível que os modelos sejam formulados usando expressões lineares sempre que possível.

Para problemas representados por modelos lineares, quando completamente resolvidos pelo LINGO (sem serem interrompidos), tem-se a garantia que o valor da função objetivo encontrado é ótimo, ou seja, é o melhor valor possível para o problema em questão. Tal garantia não ocorre no caso de modelos não-lineares, já que os mesmos podem ficar presos em ótimos locais, como mostra a figura abaixo.



Algumas expressões não-lineares podem ser facilmente convertidas em lineares. Considere a restrição abaixo:

$$x/y = 10;$$

Da forma como está escrita, essa restrição é não-linear porque x está sendo dividido por y. Simplesmente multiplicando ambos os lados por y, temos a restrição linear equivalente:

$$x = 10 * y;$$

3 Introdução à Linguagem de Modelagem do LINGO

3.1 Função Objetivo

A linguagem de modelagem do LINGO permite expressar a função objetivo de forma simples e de fácil compreensão.

Considerando os exemplos a seguir, onde $i \in fabricas$, $j \in armazens$ e o par $(i, j) \in rotas$:

$$\text{minimizar} \sum_{i \in fabricas} \sum_{j \in armazens} custo_{ij} * qtdEnviada_{ij}$$

$$\text{maximizar} \sum_{i \in fabricas} \sum_{j \in armazens} lucro_{ij} * qtdEnviada_{ij}$$

tem-se, no LINGO:

```
MIN = @SUM(fabricas(i): @SUM(armazens(j): custo(i,j)*qtdEnviada(i,j)));
MAX = @SUM(fabricas(i): @SUM(armazens(j): lucro(i,j)*qtdEnviada(i,j)));
```

ou, equivalentemente:

```
MIN = @SUM(rotas(i,j): custo(i,j)*qtdEnviada (i,j));
MAX = @SUM(rotas(i,j): lucro(i,j)*qtdEnviada(i,j));
```

3.2 Restrições

Assim como na função objetivo, podemos usar a linguagem de modelagem do LINGO para representar as restrições do problema de forma simples e direta.

Usando a notação matemática para as seguintes restrições, temos:

$$\sum_{j \in armazens} (qtdEnviada_{ij}) <= capacidade_i \qquad \forall i \in fabricas$$

$$\sum_{i \in fabricas} (qtdEnviada_{ij}) = demanda_j \qquad \forall j \in armazens$$

No LINGO, essas restrições assim são escritas:

```
@FOR(fabricas(i): @SUM(armazens(j): qtdEnviada(i,j)) <= capacidade(i));
@FOR(armazens(j): @SUM(fabricas(i): qtdEnviada(i,j)) = demanda(j));
```

Obs: Toda restrição do tipo ∀ é escrita no LINGO começando com a função @FOR.

4 Adicionando Características à Linguagem de Modelagem

4.1 Rotulando as Restrições

O LINGO permite que as restrições sejam rotuladas com nomes. Este recurso é útil por duas razões:

- Os nomes são usados nos relatórios das soluções geradas para torná-los mais fáceis de serem interpretados.
- Muitas das mensagens de erro do LINGO referem-se aos nomes dados às restrições. Caso as restrições não sejam rotuladas, localizar a fonte desses erros pode ser bastante difícil.

Rotular restrições é extremamente simples. Basta inserir um nome entre colchetes no início da restrição. O nome deve obedecer aos requisitos padrões do LINGO, a saber: todo nome deve começar com um caracter alfabético (A-Z); caracteres subseqüentes devem ser alfabéticos, numéricos (0-9), ou o 'underscore' (_); os nomes não podem ter mais que 32 caracteres. Abaixo são mostrados alguns exemplos:

```
[FO] MIN = @SUM(rotas(i,j): custo(i,j)*qtdEnviada(i,j));

@FOR(armazens(j):
   [Dem_Armazem] @SUM(fabricas(i): qtdEnviada(i,j)) = demanda(j));
```

4.2 Intitulando o Modelo

Um título pode ser inserido para um modelo. Se um título for incluído, ele será exibido no topo do relatório da solução gerada.

No exemplo a seguir, o modelo foi intitulado de "Problema de Transporte".

```
MODEL:
TITLE: Problema de Transporte;
```

4.3 Inserindo comentários

Um comentário pode ser definido utilizando um sinal de exclamação (!) e um ponto e vírgula (;), os quais determinam respectivamente o seu inicio e fim.

Um exemplo de comentário é exibido a seguir:

```
! As capacidades das fábricas não podem ser ultrapassadas;
@FOR(fabricas(i): @SUM(armazens(j): qtdEnviada(i,j)) <= capacidade(i));
```

5 Operadores e Funções do LINGO

Os operadores podem ser: binários, quando requererem dois argumentos - um imediatamente à esquerda do operador e outro imediatamente à direita; ou unários, quando requererem apenas um argumento.

5.1 Operadores Aritméticos

Operadores aritméticos são aqueles que trabalham com valores numéricos. O LINGO possui cinco operadores aritméticos binários, como mostrado a seguir:

Operador	Descrição
^	Exponenciação
*	Multiplicação
/	Divisão
+	Adição
-	Subtração

O único operador aritmético unário é o de negação (-) que, neste caso, é aplicado ao operando imediatamente à direita do sinal de negação.

5.2 Operadores Lógicos

No LINGO, os operadores lógicos são principalmente usados em expressões condicionais, definidas nas funções sobre conjuntos, para controlar quais dos seus membros serão incluídos ou excluído na função. Eles também possuem um importante papel na construção dos membros de um conjunto. Esses recursos serão mostrados mais adiante neste capítulo.

Operadores lógicos retornam TRUE ou FALSE como resultado. O LINGO usa o valor 1 para representar TRUE e o valor 0 para representar FALSE.

A linguagem de modelagem do LINGO inclui nove operadores lógicos, sendo todos binários, a exceção do operador unário #NOT#.

Operador	Valor de Retorno
#NOT#	TRUE se o operando imediatamente a direita é FALSE
#EQ#	TRUE se os operandos são iguais
#NE#	TRUE se os operandos não são iguais
#GE#	TRUE se o operando da esquerda é maior ou igual ao operando da direita
#GT#	TRUE se o operando da esquerda é estritamente maior que o operando da direita
#LE#	TRUE se o operando da esquerda é menor ou igual ao operando da direita
#LT#	TRUE se o operando da esquerda é estritamente menor que o operando da direita
#AND#	TRUE se ambos os operandos possuem valor TRUE
#OR#	FALSE se ambos os operandos possuem valor FALSE

5.3 Operadores Relacionais

No LINGO, operadores relacionais são usados no modelo para especificar se o lado à esquerda de uma expressão deve ser igual, menor igual ou maior igual ao lado direito. Eles são usados para formar as restrições que compõem o modelo.

O LINGO faz uso de três operadores relacionais:

Operador	Descrição
=	A expressão à esquerda deve ser igual a expressão à direita
<=	A expressão à esquerda deve ser menor ou igual a expressão à direita
>=	A expressão à esquerda deve ser maior ou igual a expressão à direita

O LINGO considera menor (<) como sendo menor ou igual (<=) e maior (>) como sendo maior ou igual (>=). Portanto, caso seja útil usar A < B, a expressão deve ser convertida em $A + e <= B$, onde e é uma pequena constante no qual o valor depende do quanto A é menor do que B. Para definir A < 10, com A inteiro, faça A <= 9.

5.4 Nível de prioridade dos operadores

Alto #NOT# -(negação)

↓ ^

* /

\+ -

#EQ# #NE# #GT# #GE# #LT# #LE#

#AND# #OR#

Baixo <= = >=

5.5 Funções matemáticas

O LINGO oferece um conjunto de funções matemáticas padrão. Algumas destas funções são listadas a seguir:

Função	Retorno
@ABS(X)	Retorna o valor absoluto de X
@COS(X)	Retorna o cosseno de X, onde X é um ângulo em radianos
@SIN(X)	Retorna o seno de X, onde X é um ângulo em radianos
@TAN(X)	Retorna a tangente de X, onde X é um ângulo em radianos
@FLOOR(X)	Retorna o menor inteiro mais próximo de X
@SMIN(X1,X2,...,XN)	Retorna o mínimo valor de X1, X2, ..., e XN
@SMAX(X1,X2,...,XN)	Retorna o máximo valor de X1, X2, ..., e XN

5.6 Funções de probabilidade

O LINGO possui uma serie de funções relacionadas à probabilidade. Apenas @RAND é apresentada aqui.

Função	Retorno
@RAND(SEED)	Retorna um número randômico entre 0 e 1, 'deterministicamente' dependente da semente (SEED) definida

5.7 Funções de domínio

Por *default*, o LINGO assume que as variáveis são contínuas e maiores que 0. As funções de domínio impõem restrições adicionais às variáveis, determinado quais valores elas podem assumir. Essas funções e seus efeitos são descritas a seguir:

Função	Descrição
@BIN(variável)	Permite que a variável assuma apenas valores binários (0 ou 1).
@BND(inferior,variável,superior)	Limita a variável a assumir valores entre os números "inferior" e "superior" (inferior $\leq$ variável $\leq$ superior).
@FREE(variável)	Permite que a variável assuma valores negativos.
@GIN(variável)	Restringe que a variável assuma apenas valores inteiros.

A função @FOR pode ser usada para aplicar as funções de domínio sobre todos os membros de um atributo. Esse recurso pode ser aplicado ao modelo "Produção das Fabricas" para indicar que a quantidade enviada de uma determinada fábrica para um armazém qualquer, deve ser um valor inteiro:

@FOR(rotas(i,j): @GIN(qtdEnviada(i,j));

6 Um modelo completo

A função objetivo e as restrições apresentadas nas seções 3.1 e 3.2 formam o modelo linear referente ao problema de transporte. A descrição deste problema é apresentada a seguir:

Dada um conjunto de fontes de produção (fábricas), a rede de caminhos possíveis de transporte (rotas) e os mercados (armazéns) para os quais os produtos devem se dirigir, o objetivo da problema é determinar o carregamento que minimiza o custo total do transporte, de modo que as capacidades das fontes não sejam ultrapassadas e demandas dos mercados sejam atendidas.

O modelo completo é apresentado abaixo, em que se considera a quantidade ofertada pelas fábricas maior que a soma das demandas dos armazéns.

```
MODEL:
TITLE: Problema de Transporte

[FO] MIN = @SUM(rotas(i,j): custo(i,j)*qtdEnviada(i,j));

! As capacidades das fábricas não podem ser ultrapassadas;
@FOR(fabricas(i): @SUM(armazens(j): qtdEnviada(i,j)) <= capacidade(i));

! As demandas dos armazéns devem ser atendidas;
@FOR(armazens(j): @SUM(fabricas(i): qtdEnviada(i,j)) = demanda(j));

@FOR(rotas(i,j): @GIN(qtdEnviada(i,j));

END
```

Falta, porém, a entrada de dados do modelo. Isto é feito através das seções SET e DATA, explicadas a seguir.

7 SETS (Conjuntos)

7.1 Porque SETS?

SETS são a base da linguagem de modelagem do LINGO. Eles permitem escrever uma série de restrições similares através de uma simples instrução. Também é possível representar expressões longas e fórmulas complexas de maneira concisa.

7.2 O que são SETS?

SETS (conjuntos) são grupos de objetos relacionados. Um conjunto pode ser uma lista de produtos, caminhões, ou empregados. Cada membro de um conjunto pode ter associado a si, uma ou mais características. Os valores dos atributos podem ser previamente conhecidos ou desconhecidos pelo LINGO. Por exemplo, cada produto em um conjunto *produtos* pode ter um atributo listando o seu preço, assim como cada caminhão em um conjunto *caminhoes* pode ter um atributo de capacidade de carga.

O LINGO reconhece dois tipos de conjuntos: primitivo e derivado.

Um conjunto primitivo é aquele formado somente por objetos que não podem ser reduzidos posteriormente. No modelo "Problema de Transporte" mostrado na seção 6, o conjunto *fabricas*, assim como o conjunto *armazens*, é um conjunto primitivo.

Um conjunto derivado é formado por um ou mais diferentes conjuntos. O conceito chave é que ele deriva seus membros de um outro conjunto pré-existente. Novamente considerando o modelo "Problema de Transporte", o conjunto *rotas* é composto do conjunto de *fabricas* e do conjunto de *armazens*. Um conjunto derivado pode também ser composto por outros conjuntos derivados.

7.3 Seção sets

Conjuntos são definidos em uma seção opcional do modelo LINGO, chamada de seção sets (seção de conjuntos). Antes de usar um conjunto em um modelo LINGO, é necessário listá-lo nesta seção. A seção de conjuntos é iniciada com a palavra-chave SETS: (incluindo os dois pontos), e termina com a palavra chave ENDSETS. Um modelo pode não ter uma seção SETS ou então, ter uma única ou múltiplas seções SETS. A única limitação com relação ao uso dessas seções é a necessidade de definir um conjunto e seus atributos antes deles serem referenciados nas restrições do modelo.

7.4 Definindo Conjuntos Primitivos

Para definir um conjunto primitivo em uma seção SETS, devem ser especificados:

- o nome do conjunto;
- opcionalmente, seus membros (objetos contidos no conjunto); e
- opcionalmente, qualquer atributo que os membros dos conjuntos devam ter.

A definição de um conjunto primitivo tem a seguinte sintaxe:

nome [/lista_de_membros/] [: lista_de_atributos];

O uso dos colchetes indica que os itens 'lista de membros' e 'lista de atributos' são ambos opcionais.

O nome escolhido designa o conjunto e deve seguir as convenções padrões do LINGO. Não há distinção entre caracteres maiúsculos e minúsculos nos nomes.

Uma lista de membros constitui os membros pertencentes ao conjunto. Se os membros são incluídos na definição do conjunto, eles podem ser listados explicitamente ou implicitamente. Caso os membros não sejam incluídos na definição do conjunto, eles devem ser definidos subseqüentemente na seção data do modelo. A seção data será descrita mais adiante neste capítulo.

Quando listados explicitamente, cada membro deve ter seu nome definido, opcionalmente separado por vírgulas. Os nomes dos membros devem respeitar as convenções padrões do LINGO. O exemplo abaixo exibe os membros do conjunto fabricas sendo explicitamente declarados:

fabricas /F1 F2 F3 F4/: capacidade;
ou
fabricas /F1, F2, F3, F4/: capacidade;

Quando listados implicitamente, não há a necessidade de declarar o nome de cada membro. O LINGO automaticamente gera os nomes de todos os membros do conjunto. Abaixo são listadas as diversas maneiras de se definir elementos de forma implícita:

```
! membros: 1, 2, 3, 4, 5;
fabricas / 1..5 /: capacidade;

! membros: cam3, cam4, cam5, cam6, cam7;
caminhoes / cam3..cam7 /: capCarga;

! membros: mon, tue, wed, thu, fri;
dias / mon..fri /: ;

! membros: oct, nov, dec, jan;
meses / oct..jan /: ;

! membros: oct2005, nov2005, dec2005, jan2006;
meses_ano / oct2005..jan2006 /: ;
```

Uma alternativa seria utilizar a seção data como exemplificado a seguir:

```
DATA:
  n = 6;
ENDDATA

SETS:
  fabricas / 1..n /: capacidade;
ENDSETS
```

Os membros dos conjuntos podem ter um ou mais atributos especificados através da lista de atributos. Um atributo é uma propriedade definida para cada membro do conjunto. Os nomes dados aos atributos devem seguir as convenções padrões impostas pelo LINGO. O exemplo abaixo declara dois atributos, *capacidades* e *localizacao*, para o conjunto *fabricas*.

```
fabricas / 1..6 /: capacidade, localizacao;
```

7.5 Definindo conjuntos derivados

Para definir um conjunto derivado é necessário especificar:

- o nome do conjunto;
- seus conjuntos pais;
- opcionalmente, seus membros; e
- opcionalmente, qualquer atributo que os membros dos conjuntos devam ter.

A lista de pais é uma lista de conjuntos previamente definida, separadas por vírgulas. Caso a lista de membros não seja especificada, o LINGO constrói todas as combinações possíveis para os membros do novo conjunto derivado, utilizando os membros dos conjuntos pai. Como exemplo, considere os conjuntos abaixo:

```
SETS:
  produtos / A B /;

  maquinas / M N /;

  semana / 1..2 /;

  permitido(produtos,maquinas,semana);
ENDSETS
```

Os membros do conjunto *permitido* são constituídos pelo LINGO, derivados dos conjuntos *produtos*, *maquinas* e *semana*. Esses membros são exibidos a seguir:

Índice	**Membro**
1	(A,M,1)
2	(A,M,2)
3	(A,N,1)
4	(A,N,2)
5	(B,M,1)
6	(B,M,2)
7	(B,N,1)
8	(B,N,2)

A lista de membros é opcional e é usada quando se deseja limitar os membros em um subconjunto de todas as combinações possíveis, derivadas dos conjuntos pais. Essa lista pode alternativamente ser especificada na seção data do modelo, descrita mais adiante.

Quando um conjunto não possui uma lista de membros e, portanto, contêm todas possíveis combinações de membros derivados de seus conjuntos pais, ele é referido como sendo um conjunto denso. Caso ele inclua uma lista de membros que o limita em um subconjunto da sua forma densa, ele é dito conjunto esparso.

Uma lista de membros de um conjunto derivado pode ser construída usando:

- uma lista explicita de membros; ou
- um filtro de membros.

Ao declarar uma lista de membros explícitos é necessário definir todos os membros que irão pertencer ao conjunto. Cada membro listado deve ser um membro do conjunto denso formado por todas possíveis combinações dos conjuntos pais. Voltando ao conjunto *permitido*, do exemplo acima, podemos ter:

```
permitido(produtos,maquinas,semana) / A M 1, A N 2, B N 1 / ;
```

Em muitos conjuntos esparsos, todos os membros satisfazem a alguma condição que os diferencia dos não membros. Usar o filtro de membros envolve especificar uma condição lógica, a qual cada membro potencial deve satisfazer, para pertencer ao conjunto final. Uma condição lógica pode ser vista como um filtro que impede os membros, que não satisfazem algum critério, de pertencerem ao conjunto esparso. Como exemplo, suponha um conjunto de nome *caminhoes*, e que cada caminhão tenha um atributo chamado *capacidade*. Caso haja a necessidade de definir um subconjunto *carga_pesada* derivado do conjunto *caminhoes*, que contenha somente caminhões com capacidade acima de 50000 kg, teríamos:

carga_pesada(caminhoes) | capacidade(&1) #GT# 50000: ;

A barra vertical (|) marca o início do filtro de membros. O filtro permite que apenas caminhões de grande porte (com capacidade acima de 50000 kg) pertençam ao conjunto *carga_pesada*. O símbolo &1 é conhecido como um índice 'marcador de lugar' (placeholder). Ao construir um conjunto derivado que usa um filtro, o LINGO gera todas as possíveis combinações de membros originados dos conjuntos pais. Cada membro gerado é atribuído a &1 para que a condição lógica seja testada. Caso o membro passe no teste, ele é adicionado ao conjunto *carga_pesada*.

7.6 Funções sobre conjuntos

As funções @MIN e @MAX são usadas para encontrar o mínimo e o máximo de uma expressão sobre os membros de um conjunto. Considerando o modelo "Problema de Transporte" apresentado na seção 6, podemos ter os seguintes exemplos:

demanda_min = @MIN(armazens(j): demanda(j));
demanda_max = @MAX(armazens(j): demanda(j));

demanda1 = @MIN(armazens(j) | j #LE# 3: demanda(j));
demanda2 = @MAX(armazens(j) | capacidade(j) #GE# 500: demanda(j));

A função @SUM é utilizada para percorrer um conjunto e retornar o somatório dos valores de um determinado atributo, referentes aos membros especificados. Utilizando o modelo "Problema de Transporte", temos:

demanda_total = @SUM(armazens: demanda);
ou
demanda_total = @SUM(armazens(j): demanda(j));

demanda1 = @SUM(armazens(j) | j #NE# 1: demanda(j));
demanda2 = @SUM(armazens(j) | capacidade(j) #GT# 100: demanda(j));

A função @FOR é usada para gerar restrições utilizando os membros de um conjunto. Ela permite escrever uma restrição apenas uma vez e o LINGO então trabalha gerando uma ocorrência da restrição para cada membro do conjunto. Como exemplo, considere um conjunto de pilhas de minério que devem ser retomadas por uma pá-carregadeira, para compor uma determinada produção diária. Para cada pilha retomada deseja-se saber o número de caçambadas realizadas pela pá-carregadeira:

@FOR(pilhas(i): numCacambadas(i) = retomado(i) / capCacamba);
ou
@FOR(pilhas(i) | capCacamba #NE# 0: numCacambadas(i) = retomado(i) / capCacamba);

As funções sobre conjuntos podem ser aninhadas. As funções @SUM, @MAX e @MIN podem ser aninhadas dentro de qualquer outra função. Por outro lado, a função @FOR só pode ser aninhada dentro de outras funções @FOR. Para o modelo "Problema de Transporte", tem-se:

@FOR(armazens(j): @SUM(fabricas(i): qtdEnviada(i,j)) = demanda(j));

7.7 Funções de manipulação de conjuntos

O LINGO oferece várias funções que ajudam a manipular os conjuntos. Elas serão descritas a seguir.

A função @IN retorna TRUE se o membro de um conjunto primitivo, especificado através de seu índice, pertence a um determinado conjunto.

@IN(nome_do_conjunto, indice_primitivo_1, [indice_primitivo_2 ...])

Como mostra o exemplo a seguir, @IN pode ser usado juntamente com os operadores lógicos, para gerar complementos de subconjuntos.

```
SETS
  fabricas / SEATTLE, DENVER, CHICAGO, ATLANTA /: ;

  fechadas(fabricas) / DENVER /: ;

  abertas(fabricas) | #NOT# @IN(fechadas, &1): ;
ENDSETS
```

O próximo exemplo ilustra como determinar se um elemento pertence ou não a um conjunto derivado especifico. Note que, para obter o índice dos elementos primitivos foi necessário utilizar a função @INDEX, descrita a seguir.

```
SETS
  s1 / A B C /: ;
  s2 / X Y Z /: ;

  s3(s1,s2) / A,X A,Z B,Y C,X /: ;
ENDSETS

pertence = @IN(s3, @INDEX(s1, B), @INDEX(s2, Y));
```

A função @INDEX retorna o índice de um elemento pertencente a um conjunto primitivo.

@INDEX([nome_do_conjunto], elemento_do_conjunto_primitivo)

Se o nome do conjunto é omitido, o LINGO retorna o índice do elemento do primeiro conjunto primitivo encontrado, cujo nome seja igual ao especificado através do elemento_do_conjunto_primitivo. Esta função é exemplificada a seguir:

```
SETS
  mulheres /DEBBIE, SUE, ALICE/ ;
  homens /BOB, JOE, SUE, FRED/;
ENDSETS
```

@INDEX(homens, SUE) retornaria o valor 3. Já @INDEX(SUE) devolveria o valor 2, pois o LINGO encontra primeiro o elemento SUE do conjunto *mulheres*.

A função @WRAP permite "ligar" o último elemento de um determinado conjunto ao primeiro. Isto é, quando o último (respectivamente primeiro) membro de um conjunto é atingido, por exemplo, por uma função @FOR, usar @WRAP permitirá "ligar" o índice do conjunto ao seu primeiro (respectivamente último) membro. Este recurso é particularmente útil em modelos cíclicos.

@WRAP (indice, limite)

Formalmente, @WRAP retorna j de modo que $j = indice - k * limite$, onde k é um inteiro tal que j pertença ao intervalo [1, *limite*]. Informalmente, a função @WRAP subtrai ou soma o *limite* ao *indice* até que o valor a ser retornado esteja entre 1 e o *limite*.

Considerando um conjunto que contenha 3 elementos, como *homens* do exemplo anterior, podemos ter os seguintes valores para @WRAP:

@WRAP(-1, 3) = -1 - (-1) * 3 = 2
@WRAP(0, 3) = 0 - (-1) * 3 = 3
@WRAP(1, 3) = 1 - 0 * 3 = 1
@WRAP(2, 3) = 2 - 0 * 3 = 2
@WRAP(3, 3) = 3 - 0 * 3 = 3
@WRAP(4, 3) = 4 - 1 * 3 = 1
@WRAP(5, 3) = 5 - 1 * 3 = 2

A função @SIZE retorna o número de elementos contidos em um determinado conjunto, ou seja, a cardinalidade deste conjunto.

@SIZE(nome_do_conjunto)

O uso desta função torna o modelo mais independente, pois mesmo que o tamanho dos conjuntos se altere, o modelo ainda se manterá conciso. Isto pode ser melhor visualizado usando como exemplo a função @WRAP(indice, limite). Caso o *limite* fosse especificado como 3, qualquer alteração no tamanho do conjunto ao qual ele se refere, tornaria o modelo incorreto. Por outro lado, se o *limite* fosse especificado como @SIZE(nome_do_conjunto), alterações no tamanho do conjunto não afetaria o modelo desenvolvido.

8 Seção DATA

8.1 Introdução à seção DATA

A seção DATA permite isolar os dados do resto do modelo. Isto é uma prática útil, pois facilita a manutenção do modelo e a escalabilidade das suas dimensões. Essa seção se inicia com a palavra-chave DATA: (incluindo os dois pontos) e termina com a palavra-chave ENDDATA. Na seção data são escritas instruções que inicializam os membros e/ou os atributos dos conjuntos, previamente instanciados na seção sets. Essas expressões possuem a seguinte sintaxe:

lista_de_objetos = lista_de_valores;

A lista de objetos contém os nomes dos atributos e/ou um conjunto cujos membros serão inicializados, opcionalmente separados por virgulas. Não pode haver mais que um nome de conjunto na lista de objetos, enquanto que vários nomes de atributo são permitidos.

A lista de valores contém os dados que serão atribuídos aos elementos da lista de objetos, opcionalmente separados por vírgulas.

A seguir são apresentadas duas maneiras de se inicializar uma lista de atributos:

```
SETS:
  set1 /A,B,C/: X, Y;
ENDSETS

DATA:
  X = 1, 2, 3;
  Y = 4, 5, 6;
ENDDATA
```

ou

```
SETS:
  set1 /A,B,C/: X, Y;
ENDSETS

DATA:
  X, Y = 1, 4,
         2, 5,
         3, 6;
ENDDATA
```

Como mencionado anteriormente, membros de um conjunto podem ser inicializados na seção data. Utilizando esta técnica para modificar o exemplo acima, temos:

```
SETS:
  set1: X, Y;
ENDSETS

DATA:
  set1, X, Y = A 1 4
               B 2 5
               C 3 6;
ENDDATA
```

8.2 Parâmetros

O LINGO não restringe o uso de apenas atributos e conjuntos no lado esquerdo das instruções declaradas na seção data. Variáveis escalares (simples) também podem ser inicializadas na seção data. Quando isto ocorre, essas variáveis são referidas como parâmetros.

Como exemplo, suponha que um modelo utilize uma taxa de juros de 8.5% como um parâmetro. Isto poderia ser expresso da seguinte forma:

```
DATA:
  taxa_de_juros = .085;
ENDDATA
```

Assim como os atributos, vários parâmetros podem ser inicializados em uma única instrução. Imagine agora que um novo parâmetro, *taxa_de_inflacao*, seja adicionado ao modelo acima. Deste modo, teremos:

```
DATA:
  taxa_de_juros, taxa_de_inflacao = .085, .03;
ENDDATA
```

8.3 Análise "E se..."

Suponha que um modelo utilize a taxa de inflação como um parâmetro. Não sendo possível determinar um valor para esse parâmetro no futuro, mas sabendo que ele pode cair dentro de uma faixa entre 2% a 6%, este modelo poderia ser resolvido para vários valores de taxa de inflação, variando dentro da faixa descrita, para analisar a sensibilidade deste modelo com relação ao parâmetro. Esta análise é referida como 'e se...'. Para definir um parâmetro deste tipo, utilize o sinal de interrogação como mostra o exemplo a seguir:

```
DATA:
  taxa_de_inflacao = ?;
ENDDATA
```

O LINGO exibirá uma caixa de entrada cada vez que o modelo for resolvido.

O valor digitado na caixa de entrada será atribuído ao parâmetro *taxa_de_inflacao*.

8.4 Inicializando um atributo com um simples valor

O LINGO permite inicializar todos os elementos de um atributo usando um único valor. O exemplo a seguir, mostra como isto pode ser feito:

```
SETS:
  dias / MO, TU, WE, TH, FR, SA, SU /: necessidade;
ENDSETS

DATA:
  necessidade = 20;
ENDDATA
```

Se existem múltiplos atributos no lado esquerdo da instrução, será necessário um valor no lado direito para cada atributo utilizado. Acrescentando ao exemplo um novo atributo *custo*, temos:

```
SETS:
  dias / MO, TU, WE, TH, FR, SA, SU/: necessidade, custo;
ENDSETS

DATA:
  necessidade, custo = 20, 100;
ENDDATA
```

8.5 Omitindo valores na seção DATA

Valores em uma instrução da seção data podem ser omitidos, caso não seja possível determiná-los para alguns membros. Como exemplo, suponha uma fábrica que deseja planejar a sua capacidade para os próximos 5 anos. Além disso, suponha que a expansão da capacidade leve tempo para ser encorajada e implementada. Sendo assim, seria impossível aumentar a capacidade nos dois primeiros anos. Neste caso, teríamos:

```
SETS:
  anos /1..5/: capacidade;
ENDSETS

DATA:
  capacidade = 34, 34, , , ;
ENDDATA
```

O LINGO estará, portanto, livre para decidir os valores da capacidade para os três últimos anos.

9 Utilizando Arquivos-texto

9.1 Importando dados de um arquivo texto com @FILE

A função de interface @FILE permite importar dados de um arquivo texto para um modelo qualquer. Isto é particularmente útil para incorporar dados, gravados em arquivos, às seções sets e data. A sintaxe da função @FILE é apresentada a seguir:

```
@FILE('nome_do_aquivo');
```

Quando esta função é utilizada no modelo, o LINGO irá ler os dados do arquivo especificado até que o fim do arquivo seja atingido, ou uma marca de fim de registro (∼) seja encontrada. Para subseqüentes @FILE referidos em um mesmo modelo, que fazem uso de um mesmo arquivo, o LINGO retoma a leitura do arquivo do ponto onde parou. Funções @FILE não podem ser aninhadas (embutir um @FILE em um arquivo que é chamado por um @FILE).

Como exemplo, considere o modelo "Problema de Transporte" apresentado na seção 6, para 6 fábricas e 8 armazéns. Sendo assim, tem-se:

```
SETS:
  fabricas / F1 F2 F3 F4 F5 F6 /: capacidade;
  armazens / A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8 / : demanda;
  rotas(fabricas,armazens): custo, qtdEnviada;
ENDSETS

DATA:
  capacidade = 60 55 51 43 41 52;

  demanda = 35 37 22 32 41 32 43 38;

  custo = 6 2 6 7 4 2 5 9
          4 9 5 3 8 5 8 2
          5 2 1 9 7 4 3 3
          7 6 7 3 9 2 7 1
          2 3 9 5 7 2 6 5
          5 5 2 2 8 1 4 3;
ENDDATA
```

Com o objetivo de isolar completamente os dados do modelo, estes podem ser movidos para um arquivo texto. A modificação realizada é apresentada a seguir.

```
SETS:
  fabricas / @FILE( 'Transporte.ldt') /: capacidade;
  armazens / @FILE( 'Transporte.ldt') / : demanda;
  rotas(fabricas,armazens): custo, qtdEnviada;
ENDSETS

DATA:
  capacidade = @FILE( 'Transporte.ldt');

  demanda = @FILE( 'Transporte.ldt');

  custo = @FILE( 'Transporte.ldt');
ENDDATA
```

Neste modelo, o arquivo 'Transporte.ldt' (a extensão '.ldt' é usada por convenção) dispõe os dados da seguinte maneira:

```
! Lista das fábricas;
F1 F2 F3 F4 F5 F6 ~

! Lista dos armazéns;
A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8 ~
```

```
! Capacidade das fábricas;
60 55 51 43 41 52 ~

! Demanda dos armazéns;
35 37 22 32 41 32 43 38 ~

! Custo de envio;
6 2 6 7 4 2 5 9
4 9 5 3 8 5 8 2
5 2 1 9 7 4 3 3
7 6 7 3 9 2 7 1
2 3 9 5 7 2 6 5
5 5 2 2 8 1 4 3
```

As seções do arquivo de dados entre ∼ são chamadas de registros. Se um arquivo não contém nenhum ∼, o LINGO lerá o arquivo inteiro como um único registro.

O exemplo apresentado acima esclarece como as funções @FILE trabalham ao longo do modelo. A primeira chamada a @FILE abre o arquivo "Transporte.ldt" e lê o primeiro registro (elementos do conjunto *fabricas*). A segunda chamada diz respeito ao segundo registro (elementos do conjunto *armazens*), e assim por diante.

O ultimo registro (custos de envio) não necessita de um ∼. Quando o LINGO encontra o fim do arquivo, lê o último registro e o arquivo é fechado. Caso seja incluído um ∼ no final deste registro, o LINGO não fechará o arquivo até que o modelo corrente seja resolvido. Isto pode causar problemas, caso múltiplos arquivos sejam abertos durante a resolução do modelo.

Comentários inclusos nos arquivos textos são ignorados pelo LINGO. O número máximo de arquivos que um modelo pode referenciar, simultaneamente, é 16.

9.2 Exportando dados para um arquivo com @TEXT

A função de interface @TEXT pode ser usada com o intuito de exportar soluções para um arquivo texto. Podem ser exportados tanto membros de um conjunto, quanto valores de um atributo. A sintaxe para este comando é apresentada a seguir.

```
@TEXT(['nome_do_arquivo'])
```

Instruções escritas na seção data, que utilizam funções de interface para exportar dados, são referidas como operações de saída. Operações deste tipo são executadas somente quando o LINGO termina de resolver o modelo, seguindo a ordem a qual elas são listadas na seção.

Um exemplo de como exportar dados utilizando @TEXT é apresentado abaixo.

```
DATA:
  @TEXT('Resultados.txt ') = x;
  @TEXT() = y;
ENDDATA
```

No caso onde o nome do arquivo é omitido, os dados são enviados para a tela de resultados do LINGO.

10 Utilizando planilhas do EXCEL

10.1 Função @OLE

@OLE é uma função de interface usada para mover dados entre o LINGO e o Excel, através de transferências baseadas em OLE (*Object Linking and Embedding*). Essas transferências são realizadas diretamente pela memória e, portanto, não fazem uso de arquivos intermediários.

10.2 Importando dados do EXCEL com @OLE

A função @OLE pode ser usada nas seções sets e data para importar dados. @OLE pode tanto ler membros de conjuntos quanto atributos - membros são esperados no formato texto, enquanto que atributos no formato numérico.

A sintaxe da função @OLE, quando usada na seção data para importar dados do EXCEL, é:

lista_de_objetos = @OLE('nome_do_arquivo_xls' [, lista_de_nomes]);

A lista de objetos é formada por objetos do modelo, opcionalmente separados por vírgulas, que são inicializados com dados importados de uma planilha. Ela pode conter qualquer combinação de nomes de conjuntos, atributos e variáveis escalares.

A lista de nomes é composta por nomes de campos definidos na planilha do Excel, que compõem os dados importados. Cada nome da lista deve possuir um elemento corresponde na lista de objetos.

Existem três opções possíveis de definir a lista de nomes, exemplificadas a seguir.

custo, capacidade = @OLE('Transporte.xls');

Quando a lista de nomes é omitida, o LINGO utiliza os nomes contidos na lista de objetos. Deste modo, *custo* e *capacidade* são inicializados com os valores definidos, respectivamente, nos campos nomeados como 'custo' e 'capacidade' no arquivo 'Transporte.xls'.

custo, capacidade = @OLE('Transporte.xls', 'tabela');

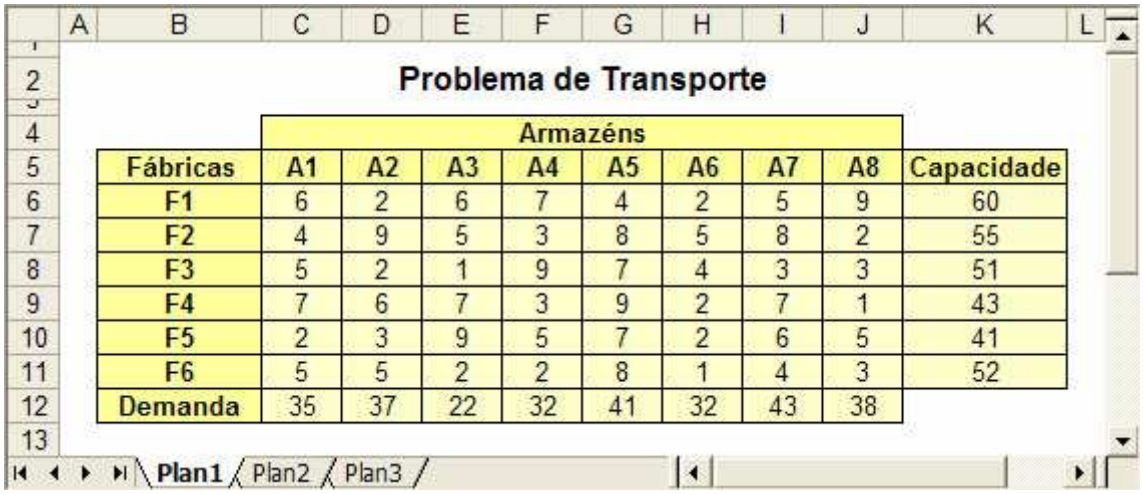
Neste exemplo, um único campo, rotulado com o nome de 'tabela' no arquivo 'Transporte.xls', é utilizado para inicializar os atributos *custo* e *capacidade*. Assumindo que o campo 'tabela' possui duas colunas, o LINGO utiliza a primeira para inicializar *custo* e a segunda para inicializar *capacidade*. Para que este método funcione é necessário que ambos *custo* e *necessidade*, sejam definidos pelo mesmo conjunto, ou conjuntos de mesmo tamanho. Além disso, ambos devem ser conjuntos ou atributos - tipos diferentes não são permitidos.

custo, capacidade = @OLE('Transporte.xls', 'cust','cap');

Neste caso, cada atributo é inicializado por um campo correspondente. O atributo *custo* irá receber os dados referentes a 'cust' e *capacidade*, os dados referentes a 'cap'.

Para melhor entendimento de como importar os dados do EXCEL utilizando a função @OLE, o modelo "Problema de Transporte" com 6 fábricas e 8 armazens será modificado para receber os dados inseridos no arquivo 'Transporte.xls'. As modificações são apresentadas a seguir.

```
SETS:
  fabricas: capacidade;

  armazens: demanda;

  rotas(fabricas,armazens): custo, qtdEnviada;
ENDSETS

DATA:
  fabricas, armazens, capacidade, demanda, custo =
    @OLE('Transporte.xls', 'fabricas','armazens','capacidade','demanda', 'custo');
ENDDATA
```



Problema de Transporte

	Armazéns								
Fábricas	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**A8**	**Capacidade**
F1	6	2	6	7	4	2	5	9	60
F2	4	9	5	3	8	5	8	2	55
F3	5	2	1	9	7	4	3	3	51
F4	7	6	7	3	9	2	7	1	43
F5	2	3	9	5	7	2	6	5	41
F6	5	5	2	2	8	1	4	3	52
Demanda	35	37	22	32	41	32	43	38	

Além de inserir os dados na planilha, é necessário definir os nomes para os campos 'fabricas', 'armazens', 'capacidade', 'demanda' e 'custo'. Especificamente, serão definidos os seguintes nomes:

Nome	**Campo**
fabricas	B6:B11
armazens	C5:J5
capacidade	K6:K11
demanda	C12:J12
custo	C6:J11

Como os objetos do modelo possuem os mesmo nomes que os seus correspondentes campos, a lista de nomes pode ser omitida na função @OLE, gerando uma nova versão simplificada para o modelo:

```
DATA:
  fabricas, armazens, capacidade, demanda, custo = @OLE('Transporte.xls');
ENDDATA
```

De forma alternativa, @OLE ainda pode ser usada na seção sets para importar membros de um conjunto. Sendo assim, para o exemplo em questão, teríamos:

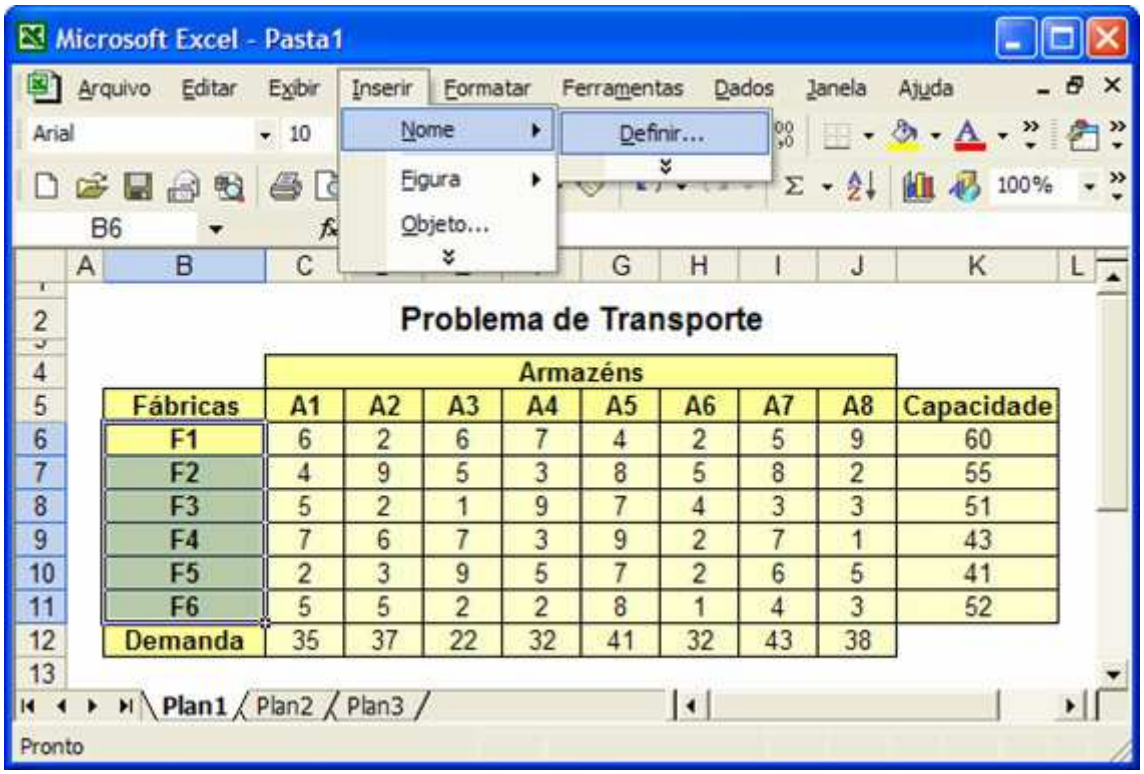
```
SETS:
  fabricas / @OLE('Transporte.xls', 'fabricas') /: capacidade;

  armazens / @OLE('Transporte.xls', 'armazens') /: demanda;

  rotas(fabricas,armazens): custo, qtdEnviada;
ENDSETS
```

10.3 Definindo nomes no EXCEL

Existem duas maneiras de definir um nome para um campo no EXCEL. Sendo que a segunda maneira é uma forma simplificada da primeira.

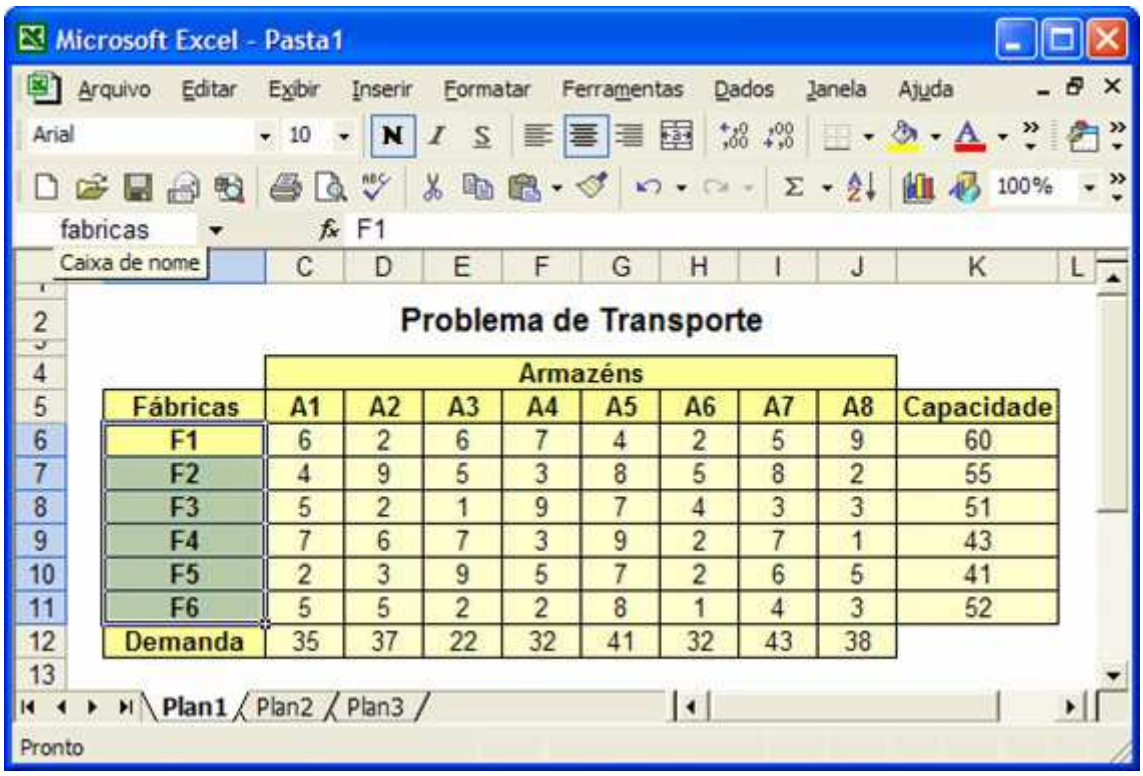
Para definir um nome siga os seguintes passos:

1. pressionando o botão esquerdo do mouse, arraste o cursor sobre o conjunto de células que compõem o campo;
2. solte o botão esquerdo do mouse;
3. selecione o menu Inserir|Nome|Definir;
4. digite o nome desejado; e
5. clique no botão OK.



Simplificando:

1. pressionando o botão esquerdo do mouse, arraste o cursor sobre o conjunto de células que compõem o campo;
2. solte o botão esquerdo do mouse;
3. clique na caixa de nomes localizada no canto superior esquerdo do EXCEL;
4. digite o nome desejado; e
5. pressione ENTER.



10.4 Excluindo um nome definido no EXCEL

Para excluir um nome anteriormente definido no EXCEL, siga os seguintes passos:

1. selecione o menu Inserir|Nome|Definir;
2. selecione o nome desejado;
3. clique no botão Excluir; e
4. clique no botão Fechar.

10.5 Exportando dados para EXCEL com @OLE

A função de interface @OLE também pode ser usada na seção data com o intuito de exportar dados para o EXCEL.

A sintaxe da função @OLE, quando utilizada para exportar dados, é:

@OLE('nome_do_arquivo_xls' [, lista_de_nomes]) = lista_de_objetos;

A lista de objetos é uma lista de nomes de conjuntos, atributos e variáveis escalares, separados por vírgulas.

A lista de nomes é composta por nomes de campos definidos na planilha do Excel, que compõem as células para as quais os dados serão exportados. Cada nome da lista deve possuir um elemento corresponde na lista de objetos.

Existem três opções disponíveis de definir a lista de nomes, exemplificadas a seguir.

@OLE('Transporte.xls') = x, fo;

Quando a lista de nomes é omitida, o LINGO utiliza os nomes contidos na lista de objetos. Deste modo, o campo 'x' irá receber os dados da variável x e o campo 'fo', o valor de fo.

@OLE('Transporte.xls', 'solucao') = x, y;

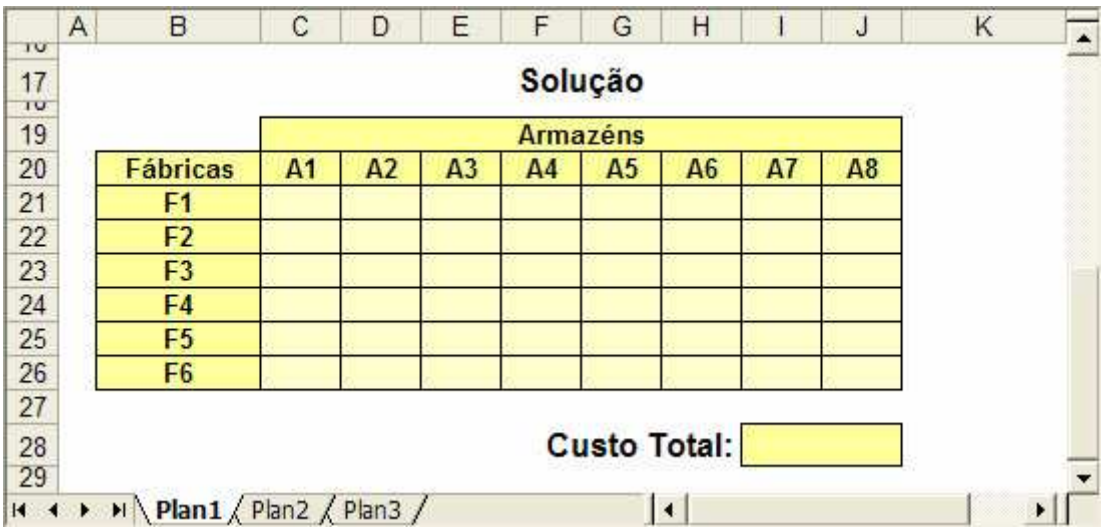
Neste exemplo, um único campo, rotulado com o nome de 'solucao' no arquivo 'Transporte.xls', é utilizado para receber os valores das variáveis x e y. Assumindo que o campo 'solucao' possui duas colunas, o LINGO utiliza a primeira para receber x e a segunda para receber y. Para que este método funcione é necessário que ambos x e y sejam definidos pelo mesmo conjunto, ou conjuntos de mesmo tamanho. Além disso, ambos devem ser conjuntos ou atributos - tipos diferentes não são permitidos.

@OLE('Transporte.xls', 'qtdEnviada', 'custoTotal') = x, fo;

Neste caso, cada campo definido em 'Transporte.xls' recebe os dados de um objeto correspondente. O campo 'qtdEnviada' irá receber os valores da variável x enquanto que 'custoTotal', o valor de *fo*.

Para elucidar como a função @OLE é utilizada para enviar dados ao EXCEL, o modelo "Problema de Transporte"com 6 fábricas e 8 armazens será modificado de modo a imprimir os resultados no arquivo 'Transporte.xls'. As modificações são apresentadas abaixo.

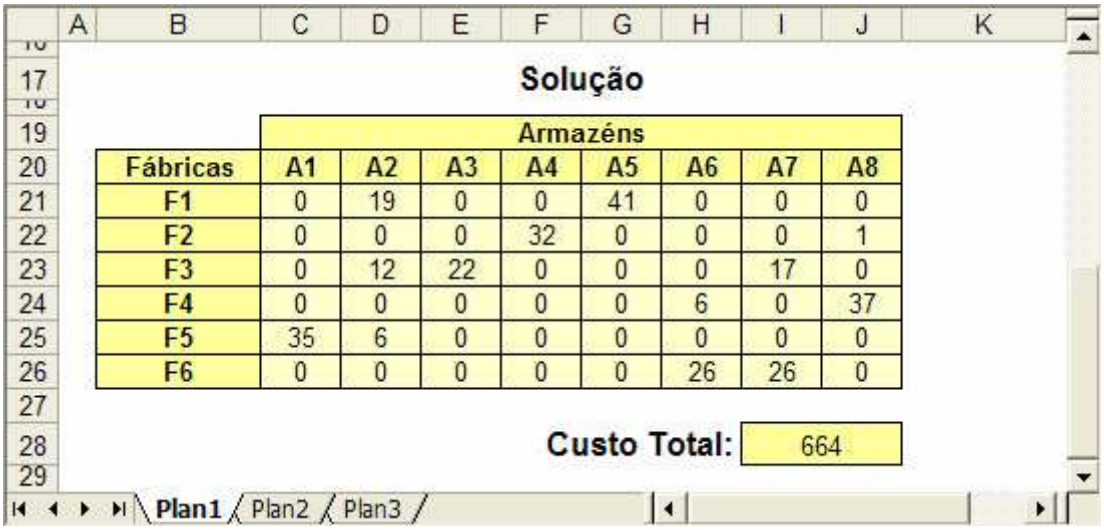
```
SETS:
  fabricas / @OLE('Transporte.xls', 'fabricas') /: capacidade;

  armazens / @OLE('Transporte.xls', 'armazens') /: demanda;

  rotas(fabricas,armazens): custo, qtdEnviada;
ENDSETS

DATA:
  capacidade, demanda, custo =
     @OLE('Transporte.xls', 'capacidade', demanda','custo');
ENDDATA

DATA:
  @OLE('Transporte.xls', 'qtdEnviada', 'cTotal') = qtdEnviada, fo;
ENDDATA
```



Os campos 'qtdEnviada' e 'cTotal' devem ser definidos no arquivo 'Transporte.xls' da seguinte maneira:

Nome	**Campo**
qtdEnviada	C21:J26
cTotal	I28

Quando o modelo for resolvido, o LINGO irá ler os dados do arquivo Excel "Transporte.xls"para as variáveis *fabricas*, *armazens*, *capacidade*, *demanda* e *custo*. Uma vez que a solução ótima tenha sido encontrada, o LINGO enviará os resultados para o mesmo arquivo Excel, através dos campos 'qtdEnviada' e 'cTotal', como mostra a figura a seguir.



Solução

	Armazéns							
Fábricas	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
F1	0	19	0	0	41	0	0	0
F2	0	0	0	32	0	0	0	1
F3	0	12	22	0	0	0	17	0
F4	0	0	0	0	0	6	0	37
F5	35	6	0	0	0	0	0	0
F6	0	0	0	0	0	26	26	0

Custo Total: 664

Plan1 Plan2 Plan3

10.6 Algumas considerações sobre @OLE

Ao utilizar a função @OLE, algumas considerações devem ser observadas:

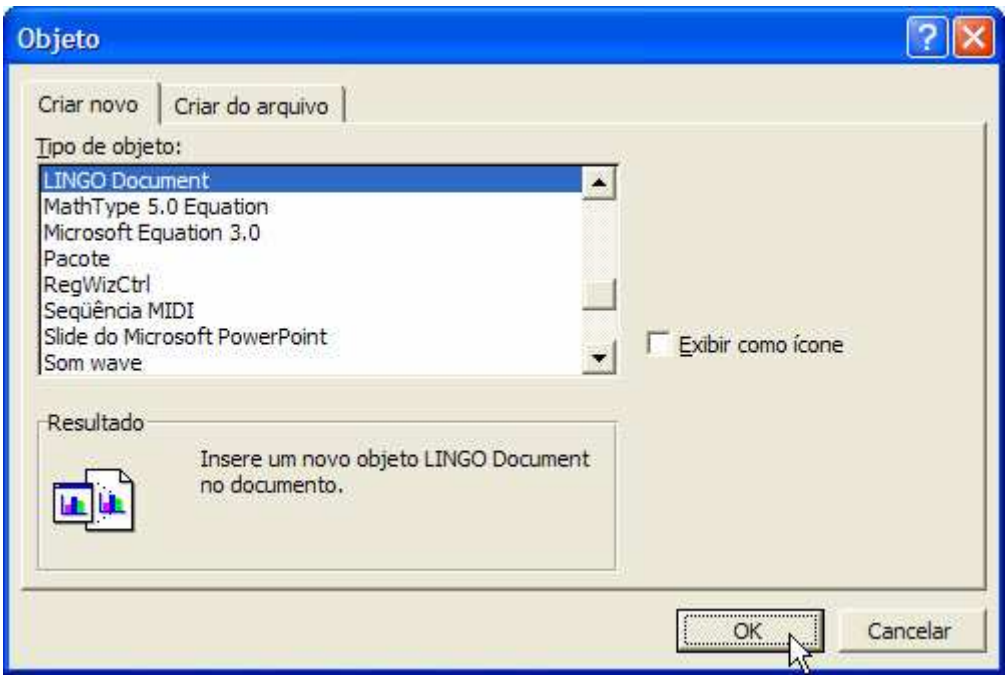
1. Para que @OLE funcione corretamente é necessário que o arquivo '.xls' utilizado esteja aberto, a não ser quando objetos embutidos são utilizados (objetos embutidos são explicados na próxima seção);
2. A função @OLE não trabalha com conjuntos derivados tri-dimensionais; e
3. @OLE lê os campos definidos no Excel de acordo com a seguinte ordem: da esquerda para direita e de cima para baixo.

11 Embutindo Modelos LINGO no EXCEL

O LINGO é capaz de funcionar como um servidor OLE. Isto significa que um modelo do LINGO pode ser embutido em qualquer aplicação que funcione como cliente OLE como, por exemplo, o EXCEL. Embutir um modelo no EXCEL é conveniente, pois o modelo estará sempre disponível sempre que o arquivo '.xls' for aberto, não sendo necessário abrir o otimizador LINGO.

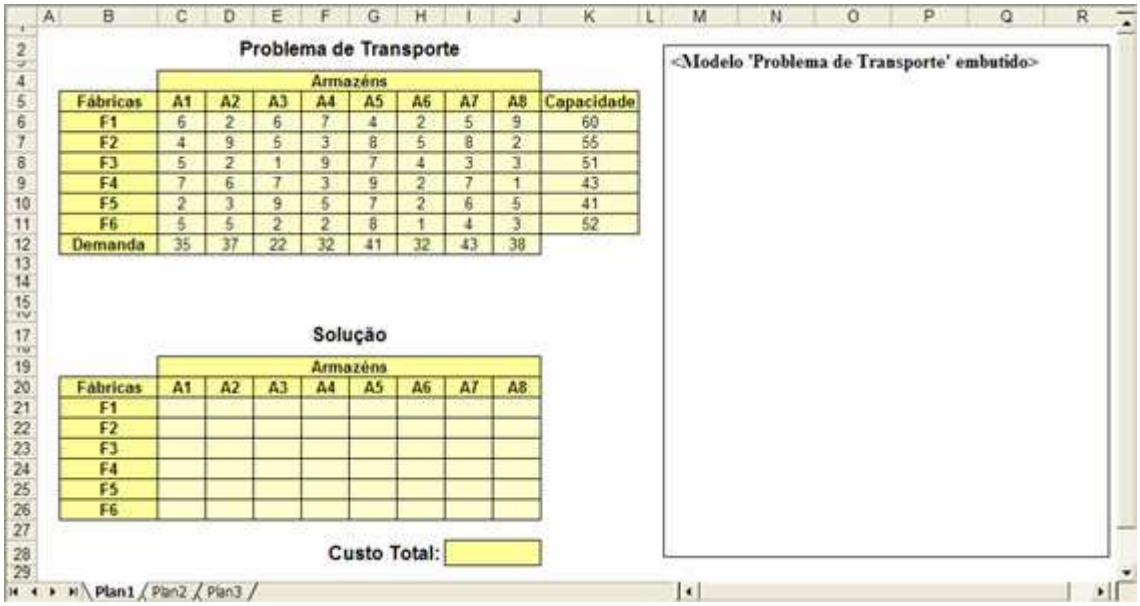
Para embutir um documento do LINGO em um arquivo do EXCEL, siga os seguintes passos:

1. selecione o menu Inserir|Objeto;
2. selecione o objeto 'LINGO Document' na lista 'Tipo de objeto'; e
3. clique no botão OK;



Após concluir os passos citados acima, um documento em branco do LINGO surgirá na planilha corrente. O modelo pode ser digitado no documento diretamente, ou copiado de uma outra aplicação (copiar/colar).

Para ilustrar este recurso, será utilizado o modelo "Problema de Transporte" descrito na seção 6. Embutindo este modelo em um arquivo nomeado de 'Transporte.xls', teríamos:



Problema de Transporte

	Armazéns								
Fábricas	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Capacidade
F1	6	2	6	7	4	2	5	9	60
F2	4	9	5	3	8	5	8	2	55
F3	5	2	1	9	7	4	3	3	51
F4	7	6	7	3	9	2	7	1	43
F5	2	3	9	5	7	2	6	5	41
F6	5	5	2	2	8	1	4	3	52
Demanda	35	37	22	32	41	32	43	38	

<Modelo 'Problema de Transporte' embutido>

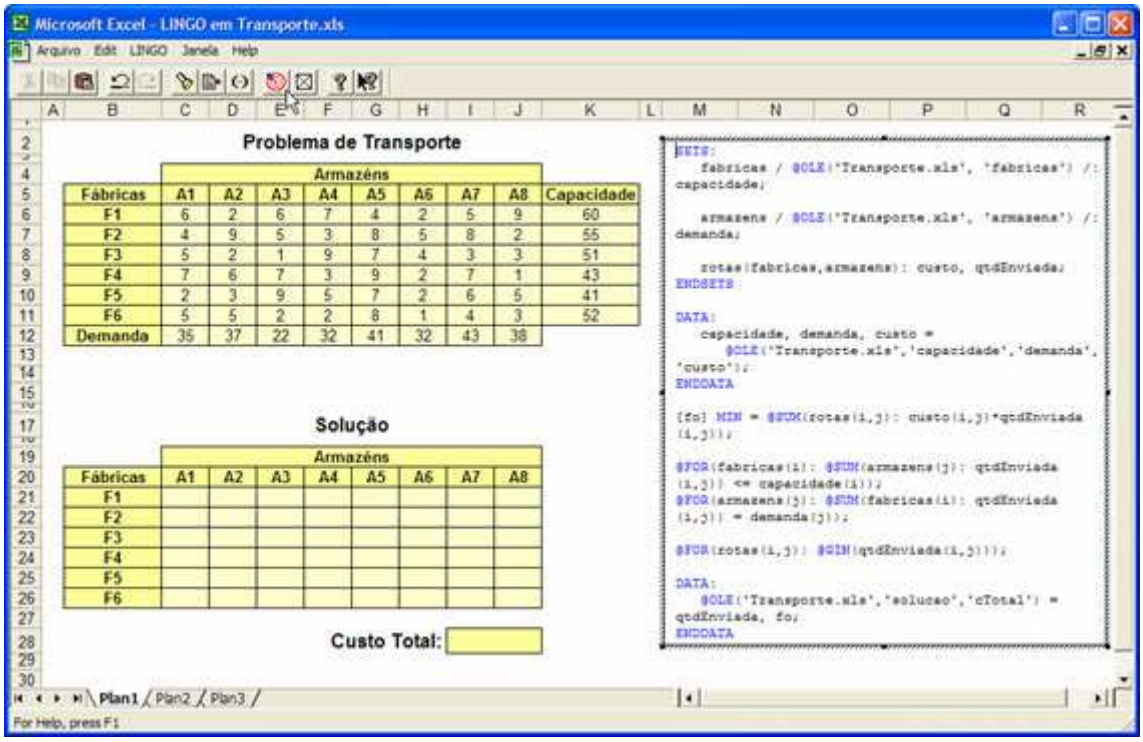
Solução

	Armazéns							
Fábricas	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
F1								
F2								
F3								
F4								
F5								
F6								

Custo Total:

Plan1 / Plan2 / Plan3 /

Ao dar um duplo-clique sobre o objeto contendo o modelo embutido, uma barra de comandos do LINGO aparecerá no canto superior da tela. Para resolver o modelo, basta clicar no botão Solve da barra de comandos. Depois de otimizar o modelo, o LINGO enviará os resultados para o arquivo 'Transporte.xls', como exibido a seguir.



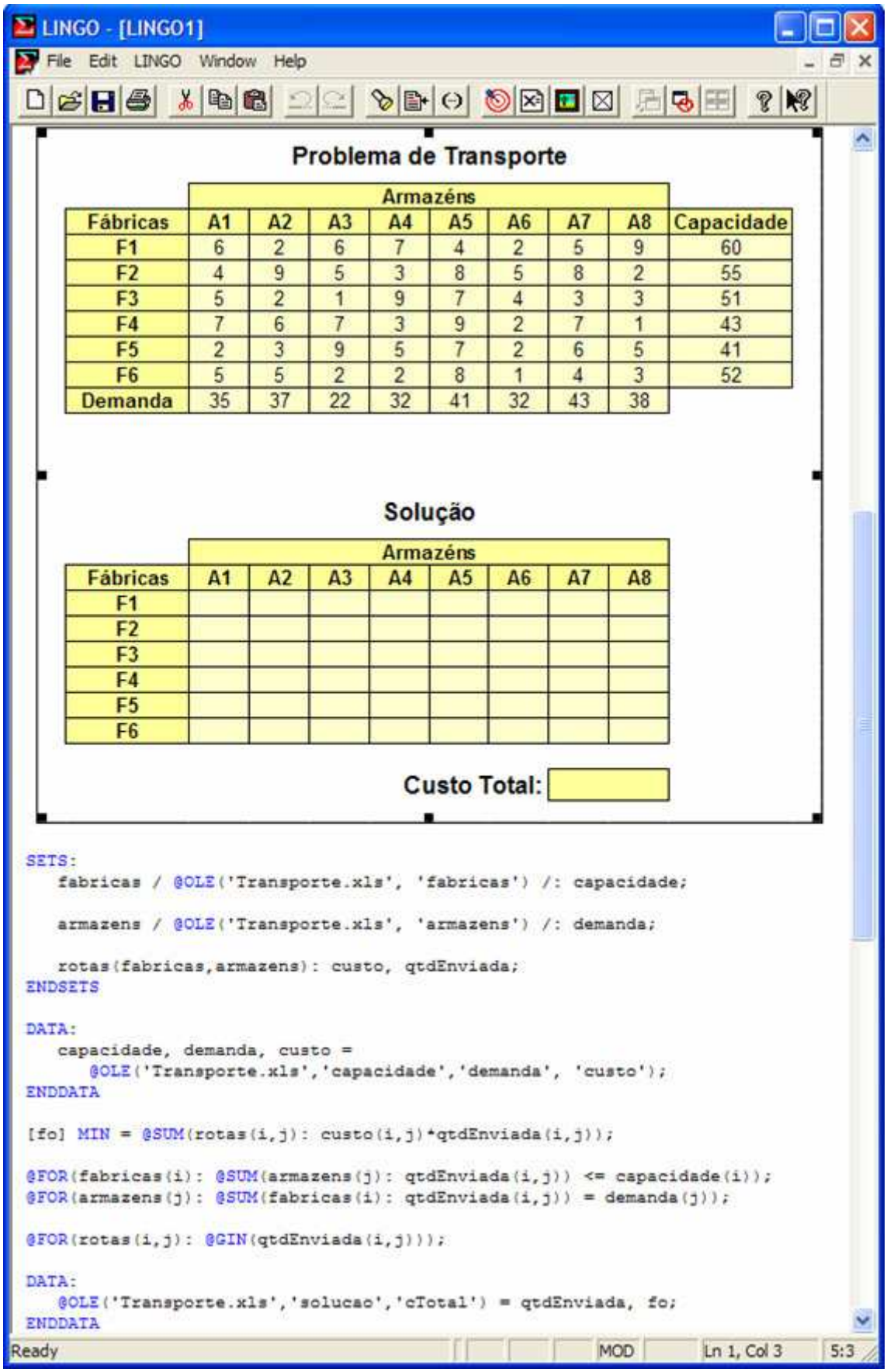
12 Embutindo planilhas do EXCEL no LINGO

Assim como é possível embutir um modelo LINGO no EXCEL, o processo pode ser invertido de modo que uma planilha seja embutida no LINGO. Para tanto, faz-se necessário que a planilha Excel não esteja aberta.

Para embutir um arquivo '.xls' no LINGO, siga os seguintes passos:

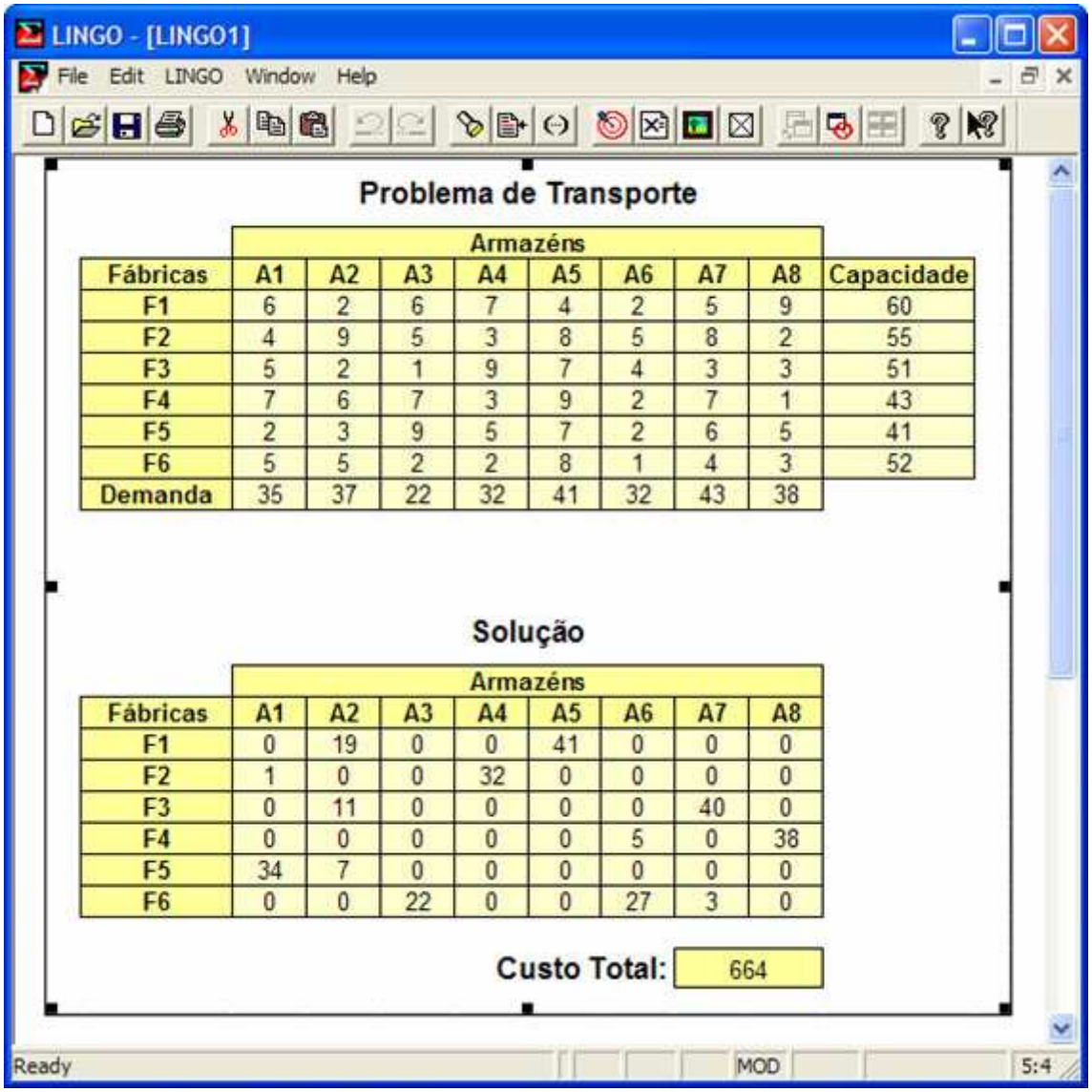
1. selecione o menu Edit|Insert New Object;
2. selecione a opção 'Criar do Arquivo' na caixa de dialogo 'Inserir Objeto';
3. digite o caminho e o nome do arquivo a ser embutido;
4. marque a caixa 'Vincular'; e
5. clique no botão OK.

Para ilustrar este processo, o modelo 'Problema de Transporte' apresentado na seção 6 será utilizado como exemplo. Após inserir o novo objeto contendo o arquivo 'Transporte.xls', temos:



A planilha de dados está agora embutida no LINGO, exibida ao topo do modelo "Problema de Transporte". Para editá-la, basta dar um duplo-clique sobre o objeto.

Quando o modelo for resolvido, o LINGO enviará os resultados para o arquivo 'Transporte.xls' atualizando a planilha embutida, como exibido a seguir.

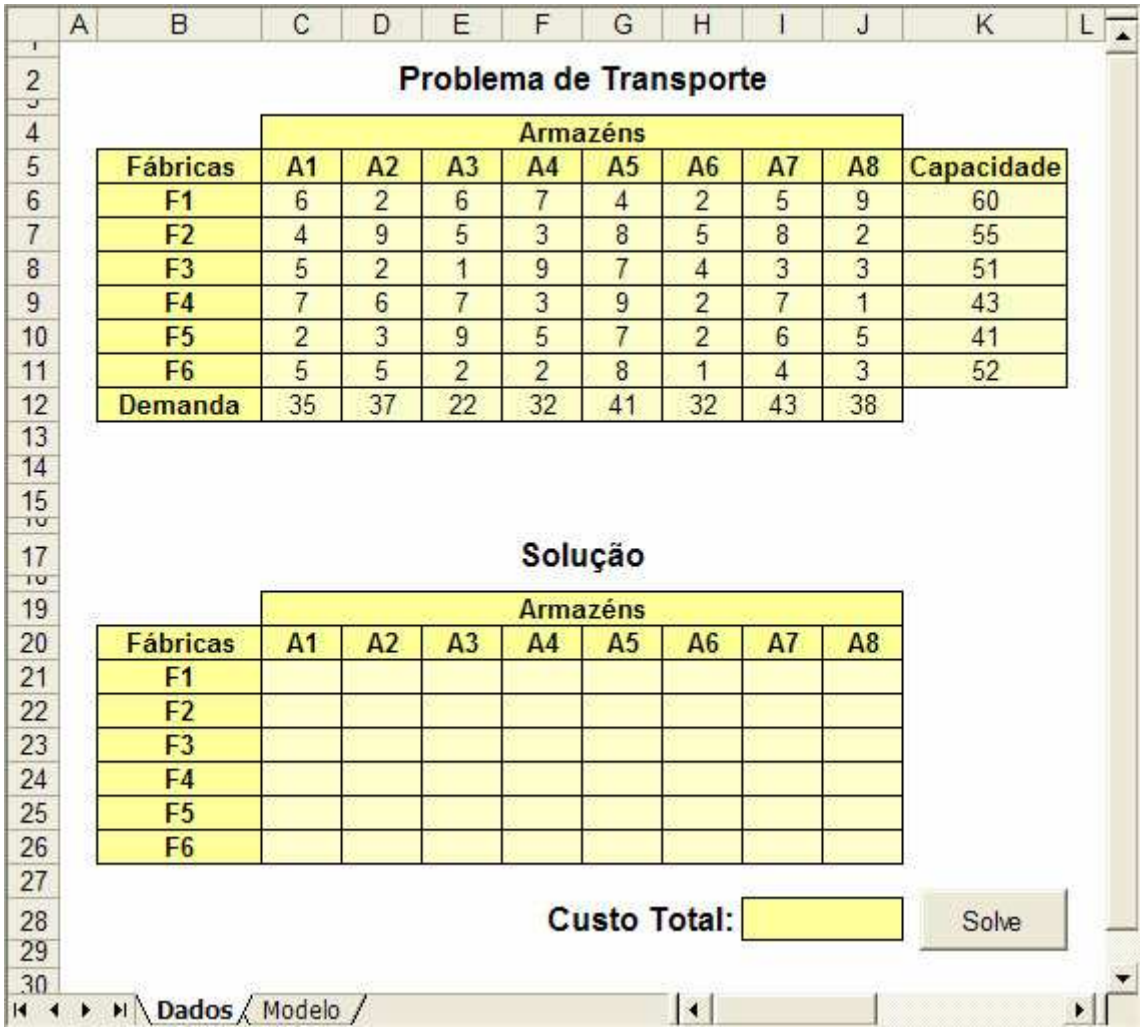


13 Utilizando links OLE automatizados no EXCEL

O LINGO disponibiliza um comando *script*, próprio para ser usado pelo EXCEL, que permite a criação de um *link* OLE automatizado. Este *link* estabelece uma relação cliente-servidor entre o EXCEL e o LINGO. Com isto, torna-se possível resolver um modelo escrito na própria planilha do EXCEL, sem a necessidade de utilizar o aplicativo do LINGO, de forma transparente para o usuário.

Para ilustrar esse recurso será utilizado o modelo "Problema de Transporte" mostrado na seção 6. Esta ilustração assume que o leitor esteja razoavelmente familiarizado com o uso de macros do Visual Basic.

Considere a seguinte planilha do EXCEL:



Problema de Transporte

	Armazéns								
Fábricas	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**A8**	**Capacidade**
F1	6	2	6	7	4	2	5	9	60
F2	4	9	5	3	8	5	8	2	55
F3	5	2	1	9	7	4	3	3	51
F4	7	6	7	3	9	2	7	1	43
F5	2	3	9	5	7	2	6	5	41
F6	5	5	2	2	8	1	4	3	52
Demanda	35	37	22	32	41	32	43	38	

Solução

	Armazéns							
Fábricas	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**A8**
F1								
F2								
F3								
F4								
F5								
F6								

Custo Total: Solve

Dados | Modelo

Nesta planilha, intitulada 'Dados', estão definidos os seguintes campos:

Nome	**Campo**
fabricas	B6:B11
armazens	C5:J5
capacidade	K6:K11
demanda	C12:J12
custo	C6:J11
solucao	C21:J26
cTotal	I28

Existe ainda uma segunda planilha, chamada 'Modelo', contendo o modelo do "Problema de Transporte" descrito em código *script*. Um *script* deve possuir o seguinte esquema:

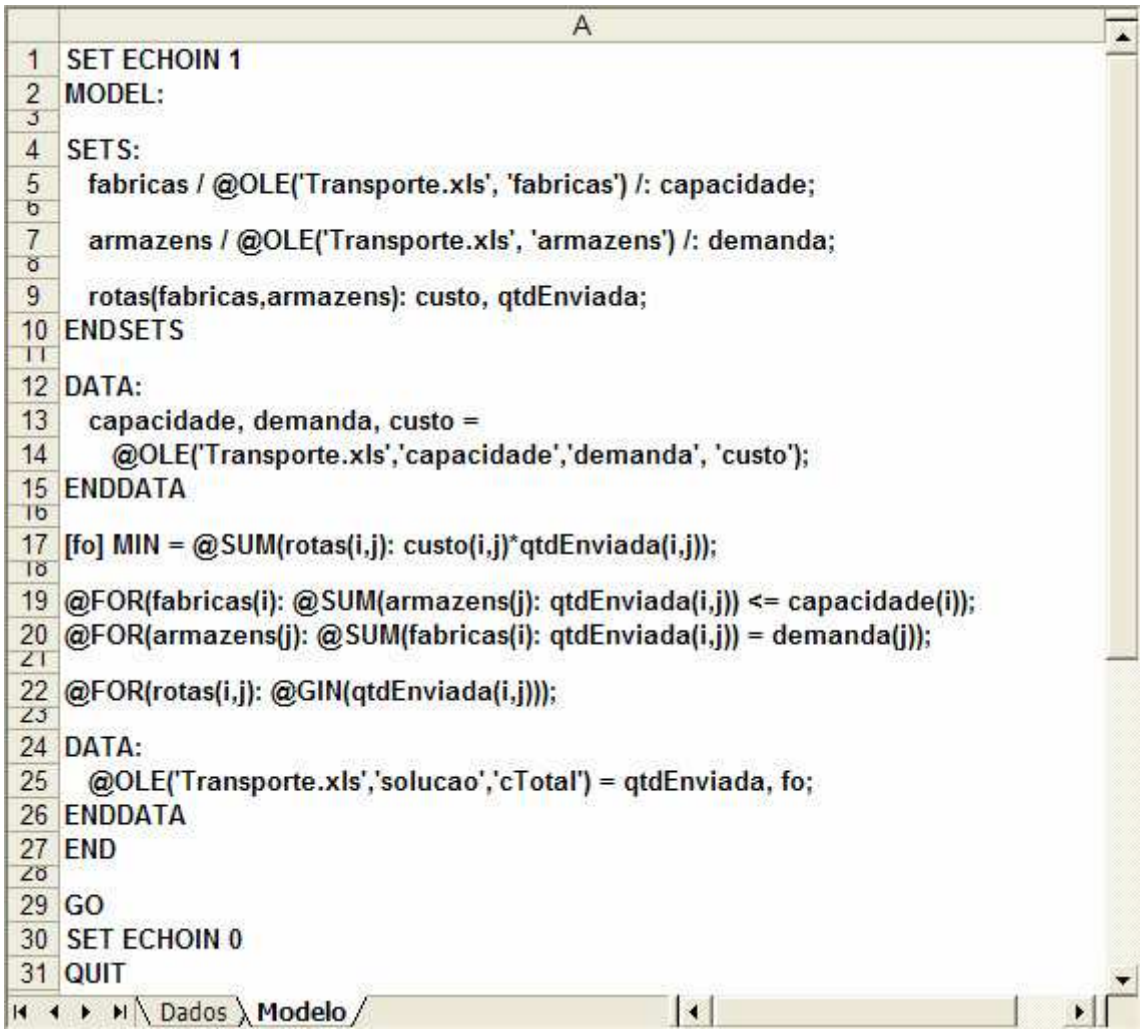
SET ECHOIN 1
Outras funções SET

MODEL:
modelo LINGO
END

GO
SET ECHOIN 0
QUIT

O comando 'SET ECHOIN 1' ativa o terminal do LINGO, permitindo que o *script* seja lido. Já o comando 'GO' é usado para resolver o modelo, descrito entre as palavras-chave MODEL e END.

A planilha 'Modelo' é exibida abaixo:



Para que este *script* seja enviado ao LINGO é necessário que ele esteja definido através do seguinte campo:

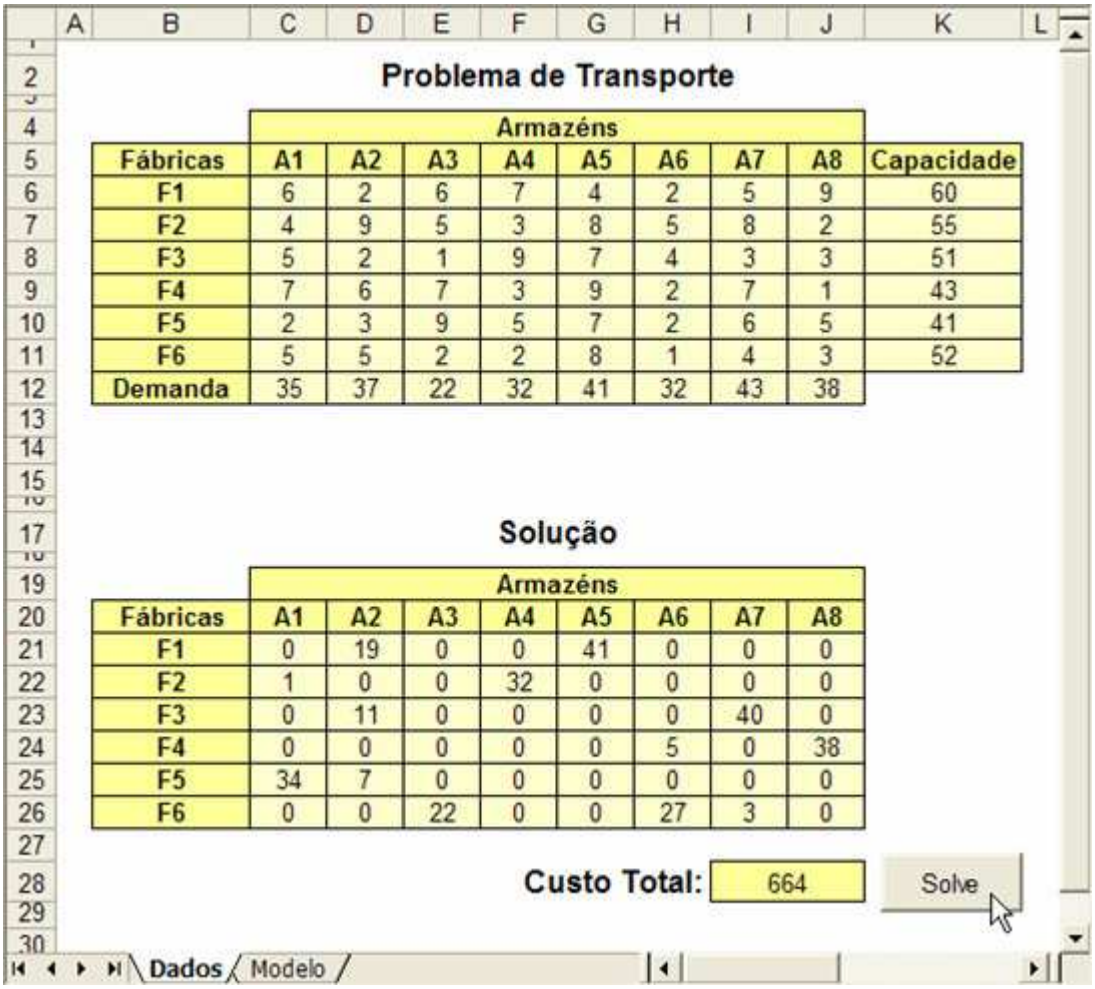
Nome	**Campo**
modelo	A1:A28

Definido os campos e o modelo LINGO, será necessário adicionar ao botão Solve, criado na planilha 'Dados', o seguinte código:

```
Private Sub Solve_Click()
  Dim iErr As Integer
  Dim LINGO As Object

  Set LINGO = CreateObject("LINGO.Document.4")
  iErr = LINGO.RunScriptRange("modelo")

  If (iErr > 0) Then
   MsgBox ("Unable to solve model")
  End If
End Sub
```

A automação OLE é utilizada para chamar o método 'RunScriptRange', passando o campo 'modelo' como parâmetro. A rotina 'RunScriptRange' então, solicita ao EXCEL que obtenha o conteúdo deste campo e, inicia o processo de execução do *script*. Esse processo continua até que a palavra-chave 'QUIT' seja encontrada ou não haja mais nenhum comando a ser lido. A instrução 'RunScriptRange' retornará um valor 0 caso o *script* esteja hábil para ser processado.

Voltando à planilha 'Dados', para que o modelo seja resolvido basta apenas que o botão Solve seja pressionado. Após uma breve pausa, a solução encontrada pelo LINGO é enviada a planilha, como mostra a figura abaixo.



Problema de Transporte

	Armazéns								
Fábricas	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Capacidade
F1	6	2	6	7	4	2	5	9	60
F2	4	9	5	3	8	5	8	2	55
F3	5	2	1	9	7	4	3	3	51
F4	7	6	7	3	9	2	7	1	43
F5	2	3	9	5	7	2	6	5	41
F6	5	5	2	2	8	1	4	3	52
Demanda	35	37	22	32	41	32	43	38	

Solução

	Armazéns							
Fábricas	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
F1	0	19	0	0	41	0	0	0
F2	1	0	0	32	0	0	0	0
F3	0	11	0	0	0	0	40	0
F4	0	0	0	0	0	5	0	38
F5	34	7	0	0	0	0	0	0
F6	0	0	22	0	0	27	3	0

Custo Total: 664

Solve

Dados | Modelo

13.1 Comando SET

O comando SET permite alterar configurações padrões do LINGO. Todas as opções configuráveis pelo usuário estão disponíveis através do comando SET. A sintaxe para este comando é:

SET nome_do_parametro | índice_do_parametro [valor_do_parametro]

Caso o valor do parâmetro seja omitido, o LINGO utilizará o valor padrão para o parâmetro especificado.

Alguns dos parâmetros acessíveis através do comando SET são apresentados a seguir.

Índice	**Nome**	**Padrão**	**Descrição**
10	TIMLIM	0	Tempo limite de execução em segundos (0: sem limite)
23	TERSEO	0	Omite o relatório gerado após a resolução do modelo (0: não, 1: sim)
24	STAWIN	1	Exibe a janela de status do processo de busca (1: sim, 0: não)
33	ECHOIN	0	Envia comandos *script* para o terminal (0: não, 1: sim)
34	ERRDLG	1	Exibe mensagens de erro em uma caixa de diálogo (1: sim, 0: não)
46	DUALCO	1	Calcula os valores duais (0: nenhum, 1: preços, 2: preços e "range")
51	CUTOFF	1×10^8	Descarta valores de soluções menores que 1×10^8

Parte II
Modelagem de Problemas de Programação Linear

(1) A LCL Investimentos gerencia recursos de terceiros através da escolha de carteiras de investimentos para diversos clientes, baseados em *bonds* de diversas empresas. Um de seus clientes exige que:

- Não mais de 25% do total aplicado deve ser investido em um único investimento;
- Um valor superior ou igual a 50% do total aplicado deve ser investido em títulos de maturidade maiores que 10 anos;
- O total aplicado em títulos de alto risco deve ser, no máximo, de 45% do total investido.

A tabela abaixo mostra os dados dos títulos selecionados.

Título	Retorno anual	Maturidade (Anos)	Risco
1	8,7%	15	1- Muito baixo
2	9,5%	12	3- Regular
3	12,0%	8	4- Alto
4	9,0%	7	2- Baixo
5	13,0%	11	4- Alto
6	20,0%	5	5- Muito alto

Determine a estratégia ótima para o investidor de forma que a rentabilidade de sua aplicação seja máxima.

Modelo de Programação Matemática

Sejam os seguintes dados de entrada para o problema:

T : Conjunto de títulos;
$retAno_j$: Retorno anual do título j (%);
mat_j : Maturidade do título j (anos);
$risc_j$: Risco associado ao título j.

E, a seguinte variável de decisão:

x_i : Total a ser investido no título j (%).

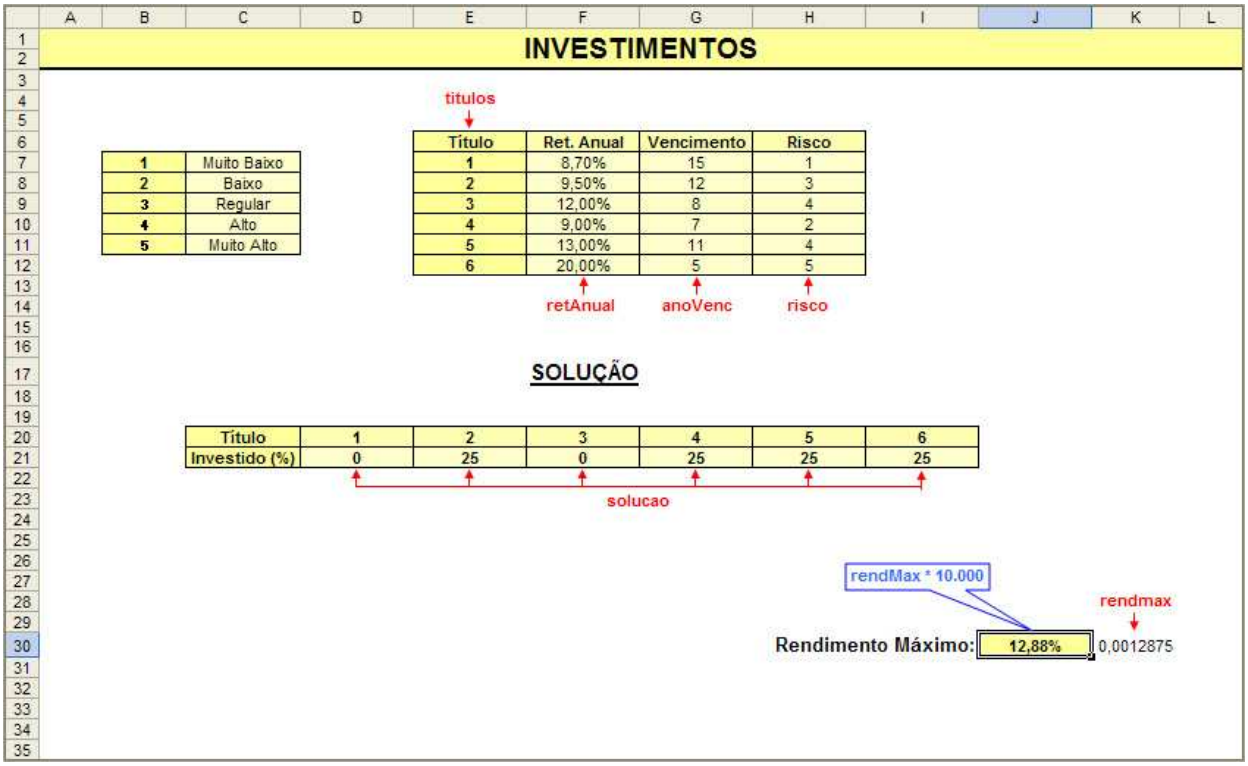
O modelo de programação matemática para o Exercício 1 é:

$$max \sum_{j=1}^{T} (retAno_j/100) \times (x_j/100)$$

s.a:

$$\begin{aligned}
x_j &\leq 25 && \forall j \in T \\
\sum_{j=1}^{T} x_j &\geq 50 && \forall j, mat_j \geq 10 \\
\sum_{j=1}^{T} x_j &\leq 50 && \forall j, risc_j > 4 \\
\sum_{j=1}^{T} x_j &= 100
\end{aligned}$$

Modelo Lingo



```
Title: Investimentos;

sets:
 titulos/@ole('Investimentos.xls','titulos')/: retAno, mat, risc, x;
endsets

data:
 ! Importa os dados do Excel;
 retAno, mat, risc = @ole('Investimentos.xls','retAno','mat','risc');
enddata

! Maximizar o lucro com os investimentos;
[fo] max = @sum(titulos(j): (retAno(j)/100) * (x(j)/100));

! Não mais do que 25 % do total aplicado deve ser investido em um único título;
@for(titulos(j): x(j) <= 25);

! Investir um valor igual ou superior a 50% do total aplicado em títulos de maturidade
  superior a 10 anos;
@sum(titulos(j) | mat(j) #ge# 10: x(j)) >= 50;

! Total aplicado em títulos de alto risco deve ser no máximo 45% do total investido;
@sum(titulos(j) | risc(j) #eq# 4 #or# risc(j) #eq# 5 : x(j)) <= 45;

! Total aplicado em títulos deve totalizar 100%;
@sum(titulos(j): x(j)) = 100;

data:
 ! Exporta resultados para o excel;
 @ole('Investimentos.xls','solucao','rendmax') = x, fo;
enddata
```

(2) **Mistura de minérios com Custos** Uma mineradora recebe uma encomenda para produzir 6000 toneladas de minério atendendo a especificação abaixo.

Elemento químico	**Teor Mínimo permitido**	**Teor Máximo permitido**
Fe (%)	44,5	49,5
Al_2O_3 (%)	0,27	0,37
P (%)	0,035	0,043
PPC (%)	2,05	2,65
He (%)	38	50

Sabe-se que esta encomenda pode ser atendida a partir de um conjunto de pilhas de minérios, cuja composição, disponibilidade e custo são relacionados a seguir.

Pilha	Fe (%)	Al_2O_3 (%)	P (%)	PPC (%)	He (%)	**Massa (ton)**	**Custo ($/ton)**
01	52,64	0,52	0,084	4,48	45	1500	10,50
02	39,92	0,18	0,029	0,65	97	2000	12,50
03	47,19	0,50	0,050	2,52	52	1700	12,00
04	49,36	0,22	0,039	1,74	78	1450	10,00
05	43,94	0,46	0,032	2,36	41	1250	11,50
06	48,97	0,54	0,057	4,34	90	1890	11,00
07	47,46	0,20	0,047	5,07	9	1640	10,80
08	46,52	0,32	0,039	3,51	4	1124	11,20
09	56,09	0,95	0,059	4,10	80	1990	10,40
10	46,00	0,26	0,031	2,51	21	900	12,00
11	49,09	0,22	0,040	4,20	12	1540	10,30
12	49,77	0,20	0,047	4,81	12	1630	11,90
13	53,03	0,24	0,047	4,17	1	1320	12,30
14	52,96	0,29	0,052	4,81	1	1245	11,10
15	42,09	0,17	0,031	1,38	47	1859	12,10

Qual a estratégia da mineradora para atender ao pedido de forma que o custo seja mínimo?

Modelo de Programação Matemática

Sejam os seguintes dados de entrada para o problema:

M : Conjunto de parâmetros ;
N : Conjunto de pilhas;
tl_j : Teor mínimo admissível para o parâmetro j no produto final (%);
tu_j : Teor máximo admissível para o parâmetro j no produto final (%);
Qu_i : Quantidade máxima disponível na pilha i (t);
c_i : Custo de utilização de 1 tonelada de minério da pilha i;
t_{ij} : Teor do parâmetro j na pilha i(%);
p : Produção total requerida (t)(%).

E, a seguinte variável de decisão:

x_i : Quantidade de minério a ser retirada da pilha i (t).

O modelo de programação matemática para o Exercício 2 é:

$$min \sum_{i=1}^{N} c_i \times x_i$$

s.a:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}(t_{ij} - tu_j) &\leq 0 && \forall j \in M \\
\sum_{i=1}^{N}(t_{ij} - tl_j) &\geq 0 && \forall j \in M \\
\sum_{i=1}^{N} x_i &= p \\
x_i &\leq Qu_i && \forall i \in N \\
x_i &\in \mathbb{Z}^+ && \forall i \in N
\end{aligned}$$

Modelo Lingo

MISTURA DE MINÉRIOS

Produção: 6.000 (p)

	Fe (%)	Al2O3 (%)	P (%)	PPC (%)	He (%)	← parametros
Limite Superior	49,5	0,37	0,043	2,65	50	← tu
Limite Inferior	44,5	0,27	0,035	2,05	38	← tl
Mistura	47,4	0,34	0,038	2,65	50	

	Massa (t)	Fe (%)	Al2O3 (%)	P (%)	PPC (%)	He (%)	Custo ($/t) (custo)	A Retomar (t) (solucao)
Pilha 1	1500	52,64	0,52	0,084	4,48	45	10,50	0
Pilha 2	2000	39,92	0,18	0,029	0,65	97	12,50	265
Pilha 3	1700	47,19	0,50	0,050	2,52	52	12,00	0
Pilha 4	1450	49,36	0,22	0,039	1,74	78	10,00	1450
Pilha 5	1250	43,94	0,46	0,032	2,36	41	11,50	1238
Pilha 6	1890	48,97	0,54	0,057	4,34	90	11,00	0
Pilha 7	1640	47,46	0,20	0,047	5,07	9	10,80	0
Pilha 8	1124	46,52	0,32	0,039	3,51	4	11,20	0
Pilha 9	1990	56,09	0,95	0,059	4,10	80	10,40	638
Pilha 10	900	46,00	0,26	0,031	2,51	21	12,00	0
Pilha 11	1540	49,09	0,22	0,040	4,20	12	10,30	1540
Pilha 12	1630	49,77	0,20	0,047	4,81	12	11,90	0
Pilha 13	1320	53,03	0,24	0,047	4,17	1	12,30	0
Pilha 14	1245	52,96	0,29	0,052	4,81	1	11,10	0
Pilha 15	1859	42,09	0,17	0,031	1,38	47	12,10	869

pilhas | Qu | teor

Custo Total: R$ 65.061,60 ← ctotal

```
Title: Mistura de Minérios;

sets:
 parametros/@ole('Mistura de Minério.xls','parametros')/: tl, tu;
 pilhas/@ole('Mistura de Minérios.xls','pilhas')/: c, x, Qu;

 matriz(pilhas,parametros): t;
endsets

data:
 ! Importa os dados do Excel;
 tl, tu, t, Qu, p, c =
     @ole('Mistura de Minérios.xls','tl','tu','teores','Qu','p','custo');
enddata

! Minimizar o custo total;
[fo] min = @sum(pilhas(i): c(i)*x(i) + y(i));

! O limite superior de especificação deve ser satisfeito para cada parâmetro j;
@for(parametros(j): @sum(pilhas(i): (t(i,j) - tu(j))*x(i)) <= 0);

! O limite inferior de especificação deve ser satisfeito para cada parâmetro j;
@for(parametros(j): @sum(pilhas(i): (t(i,j) - tl(j))*x(i)) >= 0);

! A quantidade a ser retomada em cada pilha i deve ser inferior ou igual a Qu(i);
@for(pilhas(i): @BND(0, x(i), Qu(i)));

! A produção total deve ser igual a p;
@sum(pilhas(i): x(i)) = p;

! A variável x(i) é inteira;
@for(pilhas(i): @GIN(x(i)));

data:
 Exporta os resultados para Excel;
 @ole('Mistura de Minérios.xls','solucao','ctotal') = x, fo;
enddata
```

(3) Relativamente ao problema anterior, suponha que se possa retomar apenas múltiplos de 10 toneladas e que para cada pilha só se pode retomar um mínimo de 500 toneladas. Qual a nova estratégia a ser adotada?

Modelo de Programação Matemática

Sejam os seguintes dados de entrada para o problema:

M : Conjunto de parâmetros ;
N : Conjunto de pilhas;
tl_j : Teor mínimo admissível para o parâmetro j no produto final (%);
tr_j : Teor desejável para o parâmetro j no produto final (%);
Qu_i : Quantidade máxima disponível na pilha i (t);
$nunidret_i$: Número de unidades de retomada na pilha $i(t)$;
$retmin$: Retomada mínima (t);
c_i : Custo de utilização de 1 tonelada de minério da pilha i;
t_{ij} : Teor do parâmetro j na pilha $i(\%)$;
p : Produção total requerida (t)(%).

E, as seguintes variáveis de decisão:

x_i : Quantidade de minério a ser retirada da pilha i (t);
y_i : $\begin{cases} 1 & \text{se a pilha } i \text{ for usada;} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

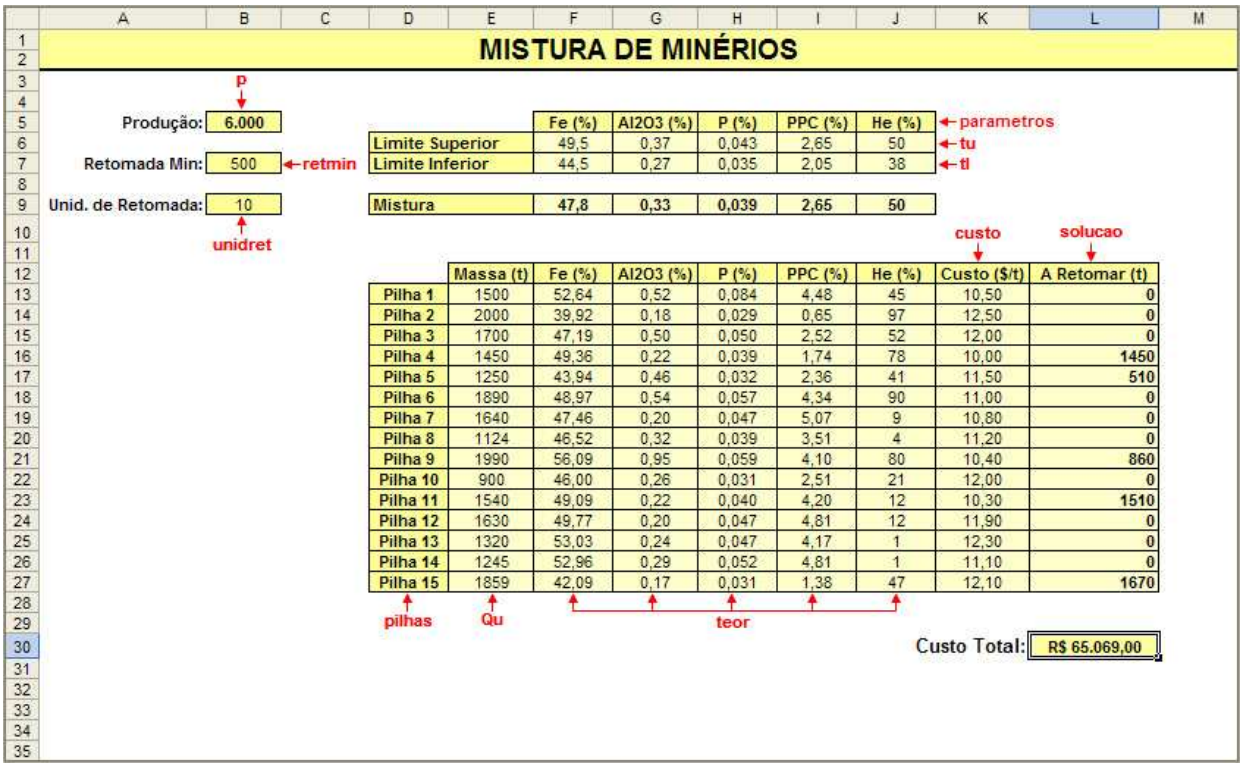
O modelo de programação matemática para o Exercício 3 é:

$$min \sum_{i=1}^{N}(c_i \times x_i + y_i)$$

s.a:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}(t_{ij} - tu_j) &\leq 0 && \forall j \in M \\
\sum_{i=1}^{N}(t_{ij} - tl_j) &\geq 0 && \forall j \in M \\
x_i &\leq Qu_i && \forall i \in N \\
\sum_{i=1}^{N} x_i &= p && \\
nunidret_i &= (x_i/unidret) && \forall i \in N \\
y_i &\geq (x_i/Qu_i) && \forall i \in N, Qu_i \neq 0 \\
x_i &\geq (retmin \times y_i) && \forall i \in N \\
x_i &\in \mathbb{Z}^+ && \forall i \in N \\
nunidret_i &\in \mathbb{Z}^+ && \forall i \in N \\
y_i &\in \{0,1\} && \forall i \in N
\end{aligned}$$

Modelo Lingo



MISTURA DE MINÉRIOS

p

Produção: 6.000

Retomada Min: 500 ← retmin

Unid. de Retomada: 10

unidret

	Fe (%)	Al2O3 (%)	P (%)	PPC (%)	He (%)	← parametros
Limite Superior	49,5	0,37	0,043	2,65	50	← tu
Limite Inferior	44,5	0,27	0,035	2,05	38	← tl
Mistura	47,8	0,33	0,039	2,65	50	

custo — solucao

	Massa (t)	Fe (%)	Al2O3 (%)	P (%)	PPC (%)	He (%)	Custo ($/t)	A Retomar (t)
Pilha 1	1500	52,64	0,52	0,084	4,48	45	10,50	0
Pilha 2	2000	39,92	0,18	0,029	0,65	97	12,50	0
Pilha 3	1700	47,19	0,50	0,050	2,52	52	12,00	0
Pilha 4	1450	49,36	0,22	0,039	1,74	78	10,00	1450
Pilha 5	1250	43,94	0,46	0,032	2,36	41	11,50	510
Pilha 6	1890	48,97	0,54	0,057	4,34	90	11,00	0
Pilha 7	1640	47,46	0,20	0,047	5,07	9	10,80	0
Pilha 8	1124	46,52	0,32	0,039	3,51	4	11,20	0
Pilha 9	1990	56,09	0,95	0,059	4,10	80	10,40	860
Pilha 10	900	46,00	0,26	0,031	2,51	21	12,00	0
Pilha 11	1540	49,09	0,22	0,040	4,20	12	10,30	1510
Pilha 12	1630	49,77	0,20	0,047	4,81	12	11,90	0
Pilha 13	1320	53,03	0,24	0,047	4,17	1	12,30	0
Pilha 14	1245	52,96	0,29	0,052	4,81	1	11,10	0
Pilha 15	1859	42,09	0,17	0,031	1,38	47	12,10	1670

pilhas — Qu — teor

Custo Total: R$ 65.069,00

```
Title: Mistura de Minérios;

sets:
  parametros/@ole('Mistura.xls','parametros')/: tl, tu;
  pilhas/@ole('Mistura.xls','pilhas')/: c, x, Qu, nunidret, y;

  matriz(pilhas,parametros): t;
endsets

data:
  ! Importa os dados do Excel;
  tl, tu, t, Qu, retmin, p, c, unidret =
      @ole('Mistura.xls','tl','tu','t','Qu','retmin','p','custo','unidret');
enddata

! Minimizar o custo total;
[fo] min = @sum(pilhas(i): c(i)*x(i) + y(i));

! O limite superior de especificação deve ser satisfeito para cada parâmetro j;
@for(parametros(j): @sum(pilhas(i): (t(i,j) - tu(j))*x(i)) <= 0);

! O limite inferior de especificação deve ser satisfeito para cada parâmetro j;
@for(parametros(j): @sum(pilhas(i): (t(i,j) - tl(j))*x(i)) >= 0);
```

```
! A quantidade a ser retomada em cada pilha i deve ser inferior ou igual a Qu(i);
@for(pilhas(i): @BND(0, x(i), Qu(i)));

! A produção total deve ser igual a p;
@sum(pilhas(i): x(i)) = p;

! A quantidade x(i) a ser retomada na pilha i deve ser múltipla de unidret;
@for(pilhas(i): nunidret(i) = x(i) / unidret);

! Se for retomada qualquer quantidade na pilha i então y(i) = 1. Caso contrário, y(i) assume valor 0;
@for(pilhas(i) | Qu(i) #ne# 0: y(i) >= x(i)/Qu(i));

! Se for retomar alguma pilha i a quantidade x(i) a retomar deve ser superior ou igual a retmin;
@for(pilhas(i): x(i) >= retmin*y(i));

! A variável nunidret(i) é inteira, e y(i) binária;
@for(pilhas(i):
 @GIN(nunidret(i));
 @BIN(y(i));
);

data:
 ! Exporta os resultados para Excel;
 @ole('Mistura.xls','solucao') = x;
enddata
```

(4) **Mistura de minérios com Metas** Uma mineradora recebe uma encomenda para produzir 6000 toneladas de minério atendendo a especificação abaixo.

Elemento químico	**Teor Mínimo permitido**	**Meta**	**Teor Máximo permitido**
Fe (%)	44,5	47,0	49,5
Al_2O_3 (%)	0,27	0,32	0,37
P (%)	0,035	0,040	0,043
PPC (%)	2,05	2,35	2,65
He (%)	38	40	50

Sabe-se que esta encomenda pode ser atendida a partir de um conjunto de pilhas de minérios, cuja composição e disponibilidade são relacionadas a seguir.

Pilha	Fe (%)	Al_2O_3 (%)	P (%)	PPC (%)	He (%)	**Massa (ton)**	**Custo ($/ton)**
01	52,64	0,52	0,084	4,48	45	1500	10,50
02	39,92	0,18	0,029	0,65	97	2000	12,50
03	47,19	0,50	0,050	2,52	52	1700	12,00
04	49,36	0,22	0,039	1,74	78	1450	10,00
05	43,94	0,46	0,032	2,36	41	1250	11,50
06	48,97	0,54	0,057	4,34	90	1890	11,00
07	47,46	0,20	0,047	5,07	9	1640	10,80
08	46,52	0,32	0,039	3,51	4	1124	11,20
09	56,09	0,95	0,059	4,10	80	1990	10,40
10	46,00	0,26	0,031	2,51	21	900	12,00
11	49,09	0,22	0,040	4,20	12	1540	10,30
12	49,77	0,20	0,047	4,81	12	1630	11,90
13	53,03	0,24	0,047	4,17	1	1320	12,30
14	52,96	0,29	0,052	4,81	1	1245	11,10
15	42,09	0,17	0,031	1,38	47	1859	12,10

A tabela a seguir classifica os parâmetros de controle em 5 critérios: Irrelevante (-), Importante (I), Muito Importante (MI), Crítico (C) e Muito Crítico (MC), cujos pesos são também apresentados.

Critério	**-**	**I**	**MI**	**C**	**MC**
Peso do Critério	0	1	5	10	100

Parâmetro	Fe	Al_2O_3	P	PPC	He
Critério	MI	-	MC	C	-

Considere, ainda, os seguintes pesos para comparar os diversos parâmetros de controle entre si:

Parâmetro	Fe	Al_2O_3	P	PPC	He
Peso de comparação	1	100	1000	100	1

Qual a estratégia da mineradora para atender ao pedido, de forma que as especificações de qualidade estejam mais próximas das metas especificadas? Observação: considere que a penalidade pelo desvio de atendimento à meta é igual ao produto do peso de comparação pelo peso do critério.

Modelo de Programação Matemática

Sejam os seguintes dados de entrada para o problema:

M : Conjunto de parâmetros ;
N : Conjunto de pilhas;
tl_j : Teor mínimo admissível para o parâmetro j no produto final (%);
tr_j : Teor desejável para o parâmetro j no produto final (%);

wdt_j : Peso do desvio da meta para o parâmetro j.
dtn_j : Desvio negativo da meta para o parâmetro j.
dtn_j : Desvio positivo da meta para o parâmetro j.
Qu_i : Quantidade máxima disponível na pilha i (t);
$nunidret_i$: numero de unidades de retomada;
c_i : Custo de utilização de 1 tonelada de minério da pilha i;
t_{ij} : Teor do parâmetro j na pilha $i(\%)$;
p : Produção total requerida (t)(%).

E, as seguintes variáveis de decisão:

x_i : Quantidade de minério a ser retirada da pilha i (t);
y_i : $\begin{cases} 1 & \text{se a pilha } i \text{ for usada;} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

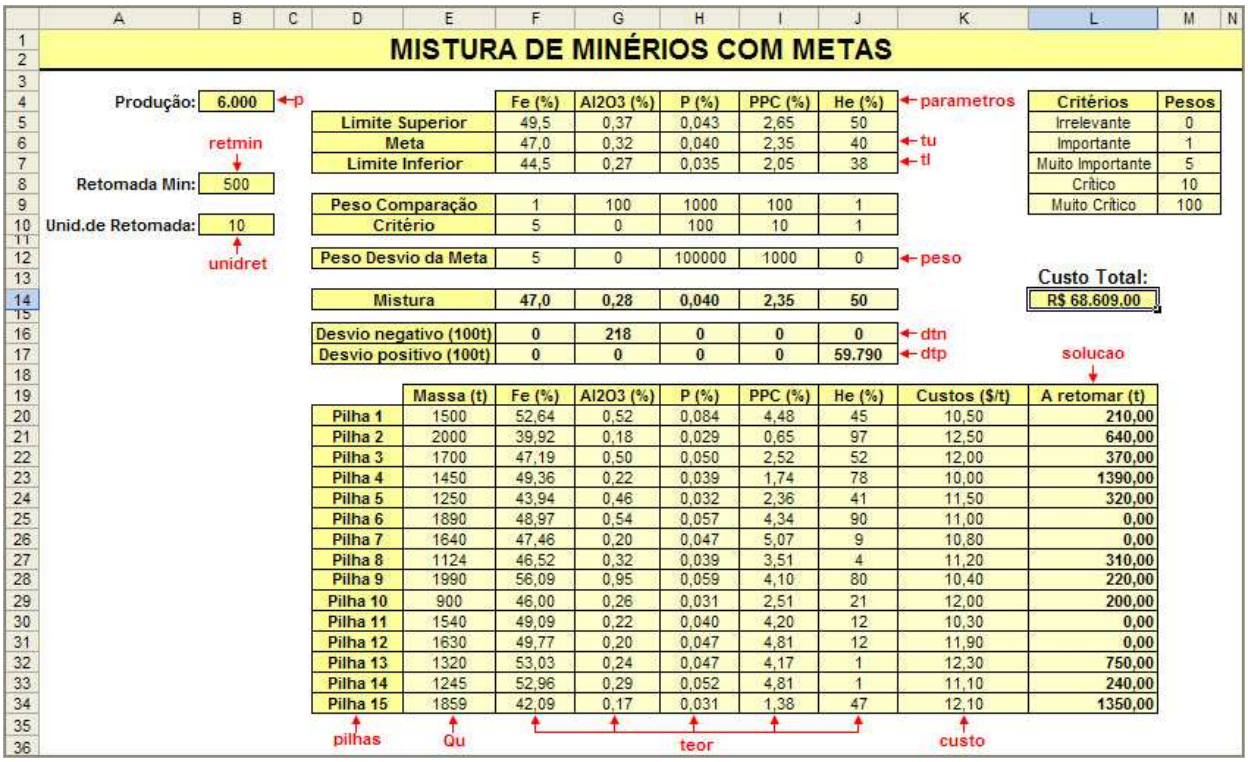
O modelo de programação matemática para o Exercício 4 é:

$$min \sum_{i=1}^{N}(c_i \times x_i + y_i)$$

s.a:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}(t_{ij} - tu_j) &\leq 0 && \forall j \in M \\
\sum_{i=1}^{N}(t_{ij} - tl_j) &\geq 0 && \forall j \in M \\
\sum_{i=1}^{N}((t_{ij} - tr_j) \times x_i) + dtn_j - dtp_j &= 0 && \forall j \in M \\
x_i &\leq Qu_i && \forall i \in N \\
\sum_{i=1}^{N} x_i &= p \\
nunidret_i &= (x_i/unidret) && \forall i \in N \\
y_i &\geq (x_i/Qu_i) && \forall i \in N, Qu_i \neq 0 \\
x_i &\geq (retmin \times y_i) && \forall i \in N \\
x_i &\in \mathbb{Z}^+ && \forall i \in N \\
nunidret_i &\in \mathbb{Z}^+ && \forall i \in N \\
y_i &\in \{0,1\} && \forall i \in N
\end{aligned}$$

Modelo Lingo



MISTURA DE MINÉRIOS COM METAS

Produção: 6.000 ← p
retmin
Retomada Min: 500
Unid.de Retomada: 10
unidret

	Fe (%)	Al2O3 (%)	P (%)	PPC (%)	He (%)	
Limite Superior	49,5	0,37	0,043	2,65	50	← parametros
Meta	47,0	0,32	0,040	2,35	40	← tu
Limite Inferior	44,5	0,27	0,035	2,05	38	← tl
Peso Comparação	1	100	1000	100	1	
Critério	5	0	100	10	1	
Peso Desvio da Meta	5	0	100000	1000	0	← peso
Mistura	47,0	0,28	0,040	2,35	50	
Desvio negativo (100t)	0	218	0	0	0	← dtn
Desvio positivo (100t)	0	0	0	0	59.790	← dtp

Critérios	Pesos
Irrelevante	0
Importante	1
Muito Importante	5
Crítico	10
Muito Crítico	100

Custo Total: R$ 68.609,00

solucao

	Massa (t)	Fe (%)	Al2O3 (%)	P (%)	PPC (%)	He (%)	Custos ($/t)	A retomar (t)
Pilha 1	1500	52,64	0,52	0,084	4,48	45	10,50	210,00
Pilha 2	2000	39,92	0,18	0,029	0,65	97	12,50	640,00
Pilha 3	1700	47,19	0,50	0,050	2,52	52	12,00	370,00
Pilha 4	1450	49,36	0,22	0,039	1,74	78	10,00	1390,00
Pilha 5	1250	43,94	0,46	0,032	2,36	41	11,50	320,00
Pilha 6	1890	48,97	0,54	0,057	4,34	90	11,00	0,00
Pilha 7	1640	47,46	0,20	0,047	5,07	9	10,80	0,00
Pilha 8	1124	46,52	0,32	0,039	3,51	4	11,20	310,00
Pilha 9	1990	56,09	0,95	0,059	4,10	80	10,40	220,00
Pilha 10	900	46,00	0,26	0,031	2,51	21	12,00	200,00
Pilha 11	1540	49,09	0,22	0,040	4,20	12	10,30	0,00
Pilha 12	1630	49,77	0,20	0,047	4,81	12	11,90	0,00
Pilha 13	1320	53,03	0,24	0,047	4,17	1	12,30	750,00
Pilha 14	1245	52,96	0,29	0,052	4,81	1	11,10	240,00
Pilha 15	1859	42,09	0,17	0,031	1,38	47	12,10	1350,00

pilhas Qu teor custo

```
title: Mistura de Minérios com Metas;

sets:
  parametros /@ole('MisturaMetas.xls','parametros')/: tl, tu, tr, wdt, dtn, dtp;
  pilhas /@ole('MisturaMetas.xls','pilhas')/: y, x, Qu, nunidret;

  matriz(pilhas,parametros): t;
endsets

data:
  ! Importa os dados do Excel;
  tl, tu, tr, t, wdt, Qu, p, retmin, unidret =
      @ole('Mistura de Minério com Metas.xls','tl','tu','tr','t','wdt','Qu','p','retmin','unidret');
enddata

! Minimizar o desvio do teor de cada parâmetro j em relação a sua meta de qualidade;
[fo] min = @sum(parametros(j): wdt(j)*dtn(j)) + @sum(parametros(j): wdt(j)*dtp(j));

! O limite superior de especificação deve ser satisfeito para cada parâmetro j;
@for(parametros(j): @sum(pilhas(i): (t(i,j) - tu(j))*x(i)) <= 0);

! O limite inferior de especificação deve ser satisfeito para cada parâmetro j;
@for(parametros(j): @sum(pilhas(i): (t(i,j) - tl(j))*x(i)) >= 0);
```

```
! A meta de qualidade deve ser buscada para cada parâmetro j;
@for(parametros(j): @sum(pilhas(i): (t(i,j) - tr(j))*x(i)) + dtn(j) - dtp(j) = 0);

! A quantidade a ser retomada em cada pilha i deve ser inferior ou igual a Qu(i);
@for(pilhas(i): @BND(0, x(i), Qu(i)));

! A produção total deve ser igual a p;
@sum(pilhas(i): x(i)) = p;

! A quantidade x(i) a ser retomada na pilha i deve ser múltipla de unidret;
@for(pilhas(i): nunidret(i) = x(i) / unidret);

! Se for retomada qualquer quantidade na pilha i então y(i) = 1.
  Caso contrario, y(i) assume valor 0;
@for(pilhas(i) | Qu(i) #ne# 0: y(i) >= x(i)/Qu(i));

! Se for retomar alguma pilha i a quantidade x(i) a retomar deve ser superior ou
  igual a retmin;
@for(pilhas(i): x(i) >= retmin*y(i));

! A variável nunidred(i) é inteira, e y(i) binária;
@for(pilhas(i):
 @GIN(nunidret(i));
 @BIN(y(i));
);

data:
 ! Exporta os resultados para Excel;
 @ole('MisturaMetas.xls','x','dtn','dtp') = x, dtn, dtp;
enddata
```

(5) Uma empresa siderúrgica possui 3 usinas e cada uma delas requer uma quantidade mensal mínima de minério para operar. A empresa adquire minério de 4 minas diferentes. Cada uma das minas tem uma capacidade máxima de produção mensal estabelecida. Por imposições contratuais, o custo do minério para a empresa é composto por um custo fixo mensal para cada mina (este valor é pago em caso de haver produção na mina), mais um custo de transporte ($/t) que varia de acordo com a distância entre as minas e usinas (cada par mina/usina tem um custo diferente). Os dados são mostrados na tabela a seguir:

MINAS	**Usina 1**	**Usina 2**	**Usina 3**	**Cap. máx. das minas (t/mês)**	**Custo Fixo ($)**
Mina 1 ($/t)	10	8	13	11500	50000
Mina 2 ($/t)	7	9	14	14500	40000
Mina 3 ($/t)	6,5	10,8	12,4	13000	30000
Mina 4 ($/t)	8,5	12,7	9,8	12300	25500
Quant. req. (t/mês)	10000	15400	13300	-	-

Construir um modelo de otimização para determinar a quantidade de minério a ser comprada de cada mina e levada a cada usina de forma a minimizar o custo total de compra de minério.

Modelo de Programação Matemática

Sejam os seguintes dados de entrada para o problema:

M : Conjunto de Minas ;
U : Conjunto de usinas;
cap_i : Capacidade de produção da mina i;
$cfixo_i$: Custo fixo de utilização da mina i;
$demanda_j$: Demanda requerida pela usina j;
$custo_{ij}$: Custo de transporte de minério da mina i para a usina j.

E, as seguintes variáveis de decisão:

x_{ij} : Quantidade de minério a ser transportado da mina i para a usina (j);
y_i : $\begin{cases} 1 & \text{se a mina } i \text{ for usada;} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

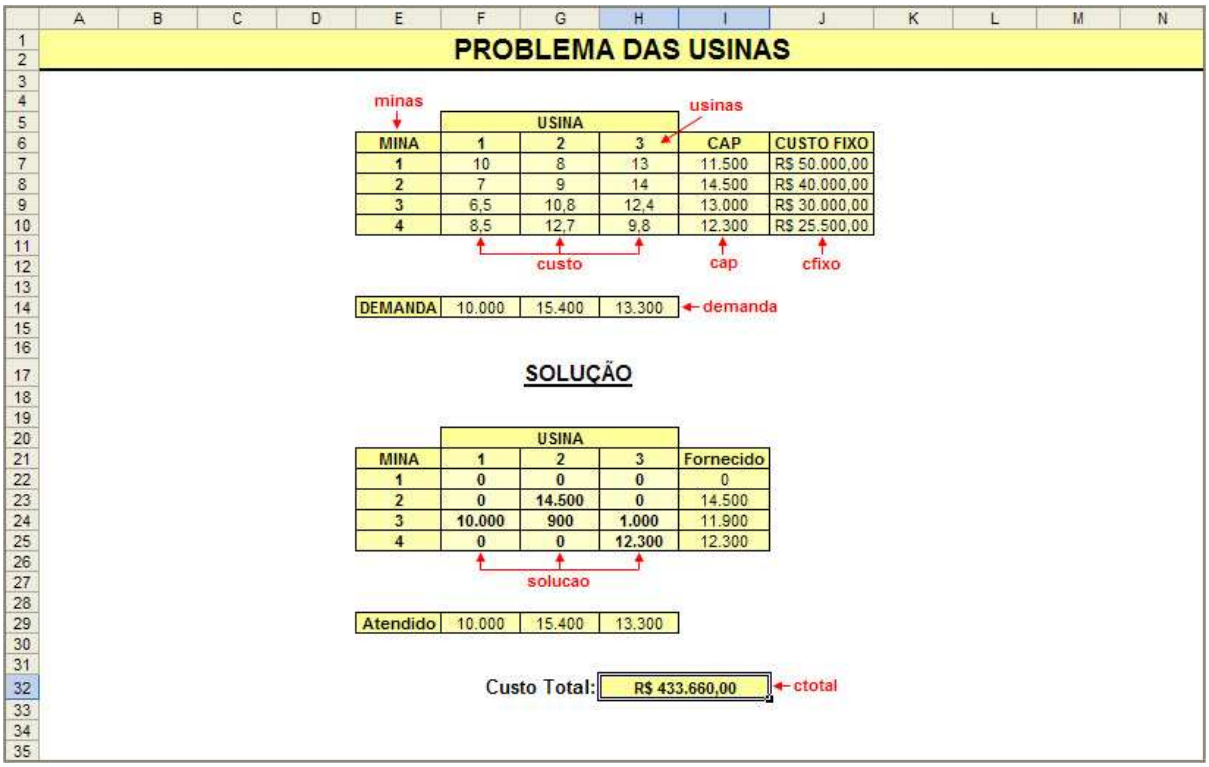
O modelo de programação matemática para o Exercício 5 é:

$$min \sum(custo_{ij} \times x_{ij}) + \sum_{j=1}^{M}(cfixo_j \times y_j)$$

s.a:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{U} x_{ij} &\leq cap_i && \forall i \in M \\
\sum_{i=1}^{M} x_{ij} &\geq demanda_j && \forall j \in U \\
y_i &\geq \sum_{j=1}^{U}(x_{ij})/cap_i && \forall i \in M \\
x_{ij} &\in \mathbb{Z}^+ && \forall i \in M, \forall j \in U \\
y_i &\in \{0,1\} && \forall i \in M
\end{aligned}$$

Modelo Lingo



PROBLEMA DAS USINAS

MINA	USINA 1	USINA 2	USINA 3	CAP	CUSTO FIXO
1	10	8	13	11.500	R$ 50.000,00
2	7	9	14	14.500	R$ 40.000,00
3	6,5	10,8	12,4	13.000	R$ 30.000,00
4	8,5	12,7	9,8	12.300	R$ 25.500,00

minas, usinas, custo, cap, cfixo

DEMANDA	10.000	15.400	13.300

demanda

SOLUÇÃO

MINA	USINA 1	USINA 2	USINA 3	Fornecido
1	0	0	0	0
2	0	14.500	0	14.500
3	10.000	900	1.000	11.900
4	0	0	12.300	12.300

solucao

Atendido	10.000	15.400	13.300

Custo Total: R$ 433.660,00 ← ctotal

```
Title: Usinas;

sets:
  minas/@ole('Usinas (R).xls','minas')/: cap, cfixo, y;
  usinas/@ole('Usinas (R).xls','usinas')/: demanda;

  matriz(minas,usinas): custo, x;
endsets

data:
  ! Importa os dados do Excel;
  cap, cfixo, demanda, custo = @ole('Usinas (R).xls','cap','cfixo','demanda','custo');
enddata

! Minimiza os custos com trasporte entre as minas e o custo fixo de utilização das minas;
[fo] min = @sum(matriz(i,j): custo(i,j)*x(i,j)) + @sum(minas(i): cfixo(i)*y(i));

! Total transportado de uma mina para as usinas deve ser menor ou igual à
  capacidade de produção da mina;
@for(minas(i): @sum(usinas(j): x(i,j)) <= cap(i));

! Quantidade de minério que chega a uma usina deve ser maior ou igual a demanda da mesma;
@for(usinas(j):@sum(minas(i): x(i,j)) >= demanda(j));
```

```
! A variável y(i) deve ser inteira;
@for(minas(i): y(i) >= @sum(usinas(j): x(i,j)) / cap(i));

! A variável x(i,j) deve ser inteira;
@for(matriz(i,j): @GIN(x(i,j))); @for(minas(i): @BIN(y(i)));

data:
 ! Exporta os dados para o Excel;
 @ole('Usinas (R).xls','solucao','ctotal') = x, fo;
enddata
```

(6) A LCL Motores recebeu, recentemente, pedidos de seus 3 tipos de motores. Cada motor necessita de um determinado número de horas de trabalho no setor de montagem e de acabamento. A LCL pode terceirizar parte de sua produção. A tabela a seguir resume esses dados:

Modelo	**1**	**2**	**3**	**Total**
Demanda	3000 unid.	2500 unid.	500 unid.	6000 unid.
Montagem	1 h/unid.	2 h/unid.	0,5 h/unid.	6000 h
Acabamento	2,5 h/unid.	1 h/unid.	4 h/unid.	10000 h
Custo de produção	\$50	\$90	\$120	-
Terceirizado	\$65	\$92	\$140	-

Considerando que haja disponível para compra de motores terceirizados um total de $R\$90.000,00$, a LCL Motores deseja determinar quantos motores devem ser produzidos em sua fábrica e quantos devem ser terceirizados de forma a atender à demanda de pedidos.

Modelo de Programação Matemática

Sejam os seguintes dados de entrada para o problema:

M : Conjunto de modelos de motores;
dem_i : Demanda por motores do modelo i $(unid)$;
$mont_i$: Tempo gasto na montagem de um motor do modelo i $(h/unid)$;
$acab_i$: Tempo gasto no acabamento de um motor do modelo i $(h/unid)$;
$cprod_j$: Custo de produção de um motor do modelo i;
$cterc_j$: Custo de terceirização de um motor do modelo i;
$totMont$: Tempo total gasto na montagem dos motores (h);
$totAcab$: Tempo total gasto no acabamento dos motores (h).

E, as seguintes variáveis de decisão:

x_i : Quantidade de motores do modelo i produzidos;
y_i : Quantidade de motores do modelo i terceirizados.

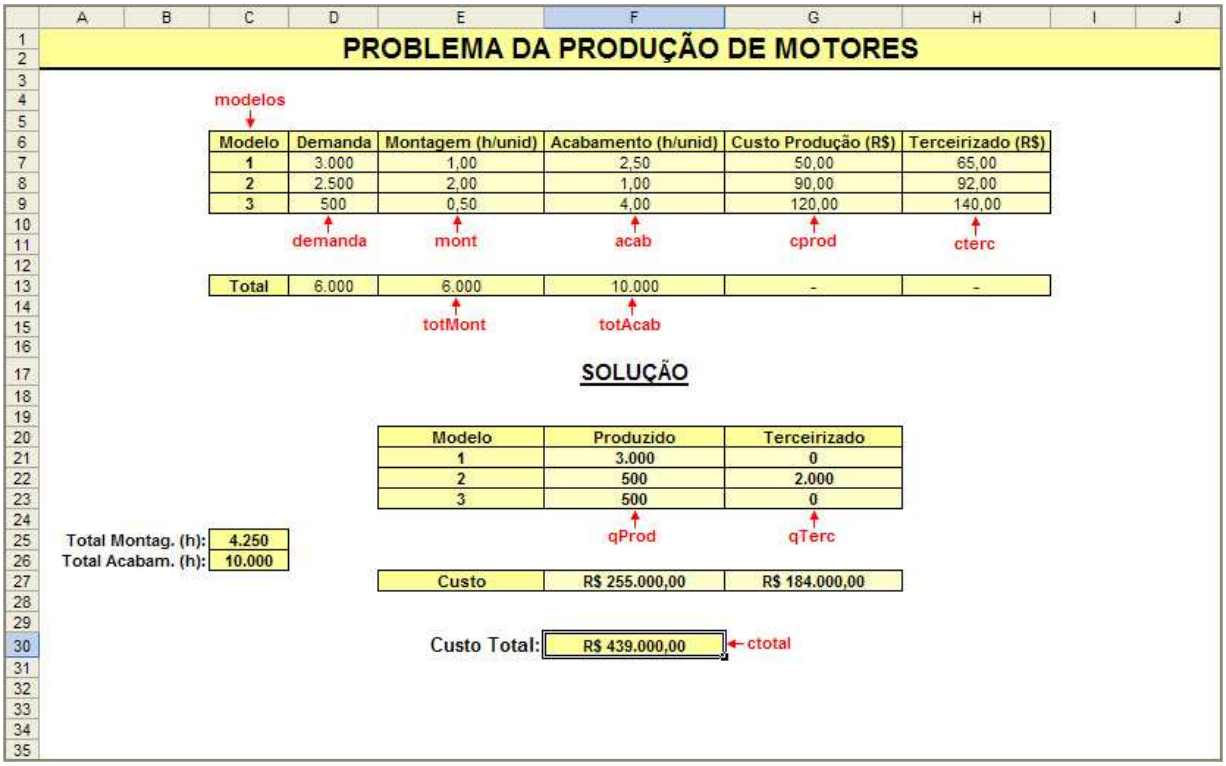
O modelo de programação matemática para o Exercício 6 é:

$$min \sum_{i=1}^{M}(cprod_i \times x_i j) + \sum_{i=1}^{M}(cterc_i \times y_i))$$

s.a:

$$\begin{aligned}
x_i + y_i &\geq dem_i && \forall i \in M \\
\sum_{i=1}^{M}(mont_i \times x_i) &\leq totMont \\
\sum_{i=1}^{M}(acab_i \times x_i) &\leq totAcab \\
\sum_{i=1}^{M}(cterc_i \times y_i) &\leq montTerc \\
x_i &\in \mathbb{Z}^+ && \forall i \in M \\
y_i &\in \mathbb{Z}^+ && \forall i \in M
\end{aligned}$$

Modelo Lingo



Title: Producao de Motores;

sets:
modelos/@ole('Motores (R).xls','modelos')/: dem, mont, acab, cprod, cterc, x, y;
endsets

```
data:
 ! Importa os dados do Excel;
 dem, mont, acab, cprod, cterc, totMont, totAcab, montTerc =
     @ole('Motores (R).xls','dem','mont','acab','cprod','cterc','totMont','totAcab','montTerc');
enddata

! Minimiza o custo com a produção e a terceirização dos motores;
[fo] min = @sum(modelos(i): cprod(i)*x(i)) + @sum(modelos(i): cterc(i)*y(i));

! Total de modelos produzidos e terceirizados deve ser maior ou igual à
  demanda requerida;
@for(modelos(i): x(i) +y(i) >= dem(i));

! Tempo gasto na montagem dos motores deve ser menor ou igual ao
  tempo disponível para esta tarefa;
@sum(modelos(i):mont(i)*x(i)) <= totMont;

! Tempo gasto no acabamento dos motores dever ser menor ou igual ao tempo
  disponível para esta tarefa;
@sum(modelos(i): acab(i)*x(i)) <= totAcab;

! Total gasto na terceirização dos motores deve ser menor ou igual ao montante
  disponível para terceirização;
@sum(modelos(i): cterc(i)*y(i)) <= montTerc;

! As variável x(i) e y(i) devem ser inteiras;
@for(modelos(i):
 @GIN(x(i));
 @GIN(y(i));
);

data:
 ! Exporta dados para o Excel;
 @ole('Motores (R).xls','Qprod','Qterc','ctotal') = x, y, fo;
enddata
```

(7) Uma determinada empresa está interessada em maximizar o lucro mensal proveniente de quatro de seus produtos, designados por I, II, III e IV. Para fabricar esses produtos, ela utiliza dois tipos de máquinas (M1 e M2) e dois tipos de mão-de-obra (MO1 e MO2), que têm as seguintes disponibilidades:

Máquinas	**Disponibilidades (máquina-hora/mês)**
M1	80
M2	20

Mão-de-obra	**Disponibilidade (homem-hora/mês)**
MO1	60
MO2	40

O setor técnico da empresa fornece os seguintes coeficientes, que especificam o total de horas de máquina e horas de mão-de-obra necessárias para a produção de uma unidade de cada produto:

Máquinas	**Produtos**			
	I	**II**	**III**	**IV**
M1	5	4	8	9
M2	2	6	-	8

Mão-de-obra	**Produtos**			
	I	**II**	**III**	**IV**
MO1	2	4	2	8
MO2	7	3	-	7

O setor comercial da empresa fornece as seguintes informações:

Produtos	**Potencial de vendas (unidades/mês)**	**Lucro Unitário (R$/mês)**
I	70	10,00
II	60	8,00
III	40	9,00
IV	20	7,00

Deseja-se planejar a produção mensal da empresa que maximize o lucro.

Modelo de Programação Matemática

Sejam os seguintes dados de entrada para o problema:

P : Conjunto de produtos;
M : Conjunto de máquinas;
MO : Conjunto de mão de obra;
dem_j : Demanda por produtos do tipo j $(unid)$;
$lucro_j$: Lucro obtido com venda de produtos do tipo j;
$dispMaq_i$: Disponibilidade da máquina i (h/mes);
$dispMObra_k$: Disponibilidade de mão de obra do tipo k (h/mes);
$hMaq_{ij}$: Tempo de utilização da máquina i para produção de produtos do tipo j (h);
$hMObra_{kj}$: Tempo de mão-de-obra do tipo k para produção de produtos do tipo j (h).

E, as seguintes variáveis de decisão:

x_j : Quantidade fabricada de produtos do tipo j $(unid)$;

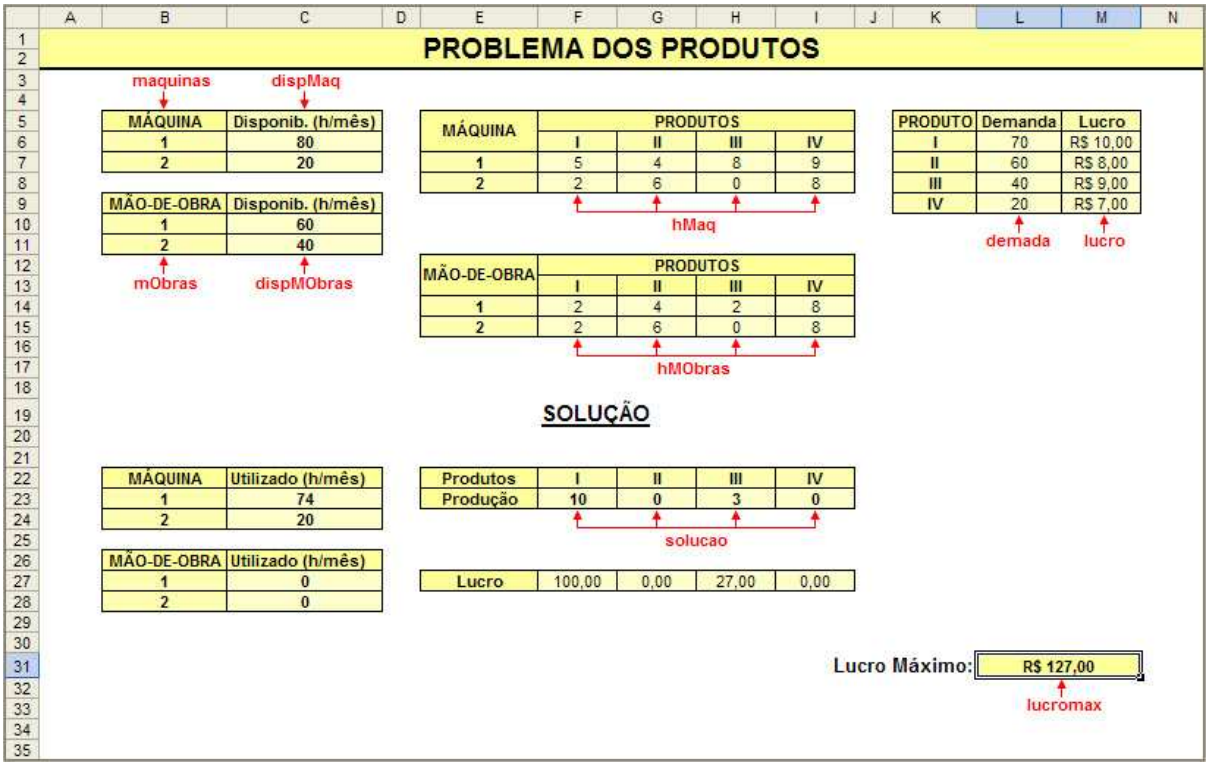
O modelo de programação matemática para o Exercício 7 é:

$$max \sum_{j=1}^{P}(lucro_j \times x_j)$$

s.a:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{P}(hMaq_{ij} \times x_j) &\leq dipMaq_i & \forall i \in M \\
\sum_{j=1}^{P}(hMObra_{kj} \times x_j) &\leq dipMObra_k & \forall k \in MO \\
x_j &\leq dem_j & \forall j \in P \\
x_j &\in \mathbb{Z}^+ & \forall j \in P
\end{aligned}$$

Modelo Lingo



```
Title: Produtos;

sets:
 produtos/@ole('Produtos (R).xls','produtos')/: demanda, lucro, x;
 maquinas/@ole('Produtos (R).xls','maquinas')/: dispMaq;
 mObras/@ole('Produtos (R).xls','mObras')/: dispMObra;

 matriz1(maquinas,produtos): hMaq;
 matriz2(mObras,produtos): hMObra;
endsets

data:
 ! Importa dados do Excel;
 demanda, lucro, dispMaq, dispMObra, hMaq, hMObra =
     @ole('Produtos (R).xls','demanda','lucro','dispMaq','dispMObra','hMaq','hMObra');
enddata

! Maximizar o lucro obtido com a fabricação dos diferentes tipos de produtos;
[fo] max = @sum(produtos(j): lucro(j)*x(j));

! Tempo de utilização de cada máquina deve ser ≤ à disponibilidade da mesma;
@for(maquinas(i): @sum(produtos(j): hMaq(i,j)*x(j)) <= dispMaq(i));

! Mão de obra total utilizada deve ser ≤ ao total de mão de obra disponível;
@for(mObras(k): @sum(produtos(j): hMObra(k,j)*x(j)) <= dispMObra(k));

! Total de produtos fabricados deve ser ≤ ao demandado;
@for(produtos(j): x(j) <= demanda(j));

! A variável x(j) deve ser inteira;
@for(produtos(j): @GIN(x(j)));

data:
 ! Exportando dados para o Excel;
 @ole('Produtos (R).xls','solucao','lucromax') = x, fo;
enddata
```

(8) **Staff scheduling** O administrador de um hospital deseja determinar o escalonamento dos enfermeiros. Para isso ele organiza um sistema de plantão dividindo o dia em 6 períodos de 4 horas. A tabela seguinte a seguir mostra o número mínimo de enfermeiros que devem estar presentes em cada horário.

Horário	**8-12**	**12-16**	**16-20**	**20-24**	**24-04**	**04-08**
# enfermeiros	51	58	62	41	32	19

Cada enfermeiro cumpre um plantão normal de 8 horas, que pode começar apenas no início de um destes períodos. No horário de 8 às 20 horas, o enfermeiro recebe R$100 pela hora de trabalho e R$125 no horário noturno (20 horas às 18 horas). Como o administrador deve escalar os enfermeiros, minimizando o custo com a mão-de-obra?

Modelo de Programação Matemática

Sejam os seguintes dados de entrada para o problema:

T : Conjunto de turnos;
req_j : Número de enfermeiros requeridos no turno j;
$custos_j$: Custo de trabalho no turno j;

E, a seguinte variável de decisão:

x_j : Quantidade de enfermeiros a serem escalados no início do turno jj ($unid$);

O modelo de programação matemática para o Exercício 8 é:

$$min \sum_{j=1}^{T} (custos_j \times x_j)$$

s.a:

$$\begin{aligned} x_{j-1} + x_j &\geq req_j & \forall j \in T \\ x_j &\in \mathbb{Z}^+ & \forall j \in T \end{aligned}$$

Modelo Lingo

PROBLEMA DOS ENFERMEIROS

TURNO	Horário	N. Enfermeiros	Custo
1	08-12	51	R$ 100,00
2	12-16	58	R$ 100,00
3	16-20	62	R$ 112,50
4	20-24	41	R$ 125,00
5	24-04	32	R$ 125,00
6	04-08	19	R$ 112,50

turnos requerido custo

SOLUÇÃO

TURNO	Horário	Enfermeiros	Excesso
1	08-12	51	0
2	12-16	34	27
3	16-20	28	0
4	20-24	13	0
5	24-04	19	0
6	04-08	0	0

solucao excesso

Custo Total: R$ 15.650,00 ctotal

Title: Enfermeiros;

```
sets:
 turnos/@ole('Enfermeiros (R).xls','turnos')/: req, custos, x;
endsets

data:
 ! Importa dados do Excel;
 custos, req = @ole('Enfermeiros (R).xls','custos','requerido');
enddata

! Minimiza o custo com pagamento de enfermeiros em cada turno;
[fo] min = @sum(turnos(j): custos(j)*x(j));

! Total de enfermeiros trabalhando em cada turno deve ser ≥ ao requerido;
@for(turnos(j): [excesso] x(@wrap(j-1, @size(turnos))) + x(j) >= req(j));

! A variável x(j) deve ser inteira;
@for(turnos(j): @GIN(x(j)));

data:
 ! Exporta dados para o Excel;
 @ole('Enfermeiros (R).xls','solucao','ctotal','excesso') = x, fo, excesso;
enddata
```

(9) O administrador de um hospital deseja determinar o escalonamento dos enfermeiros. Para isso ele organiza um sistema de plantão dividindo o dia em 6 períodos de 4 horas. A tabela a seguir mostra o número mínimo de enfermeiros que devem estar presentes em cada horário.

Horário	**08-12**	**12-16**	**16-20**	**20-24**	**24-04**	**04-08**
# enfermeiros	51	58	62	41	32	19

Cada enfermeiro cumpre um plantão normal de 8 horas, que pode começar apenas no início de um destes períodos. Alguns enfermeiros podem ser solicitados para estender o plantão por mais 3 horas seguidas. A hora-extra custa 50% mais caro. Em cada plantão, não mais que 40% dos enfermeiros podem estar cumprindo hora-extra. Como o administrador deve escalar os enfermeiros, minimizando o custo com a mão-de-obra?

Modelo de Programação Matemática

Sejam os seguintes dados de entrada para o problema:

T : Conjunto de turnos;
req_j : Número de enfermeiros requeridos no turno j;

E, a seguinte variável de decisão:

x_j : Quantidade de enfermeiros sem hora extra a serem escalados no início do turno j
$cSHE_j$: Custo de trabalho sem hora extra no turno$j$
$cCHE_j$: Custo de trabalho com hora extra no turno$j$
y_j : Quantidade de enfermeiros com hora extra a serem escalados no início do turno j

O modelo de programação matemática para o Exercício 9 é:

$$min \sum_{j=1}^{T} (cSHE_j \times x_j) + (cCHE_j \times y_j)$$

s.a:

$$\begin{aligned} x_j + y_j + x_{j-1} + y_{j-1} + y_{j-2} &\geq req_j && \forall j \in T \\ y_{j-2} &\leq 0.4 \times (x_j + y_j + x_{j-1} + y_{j-1} + y_{j-2}) && \forall j \in T \\ x_j &\in \mathbb{Z}^+ && \forall j \in T \\ y_j &\in \mathbb{Z}^+ && \forall j \in T \end{aligned}$$

Modelo Lingo

PROBLEMA DOS ENFERMEIROS - HORA EXTRA

TURNO	Horário	N. Enfermeiros	Custo - s/ HE	Custo - c/ HE
1	08-12	51	R$ 100,00	R$ 175,00
2	12-16	58	R$ 100,00	R$ 193,75
3	16-20	62	R$ 112,50	R$ 206,25
4	20-24	41	R$ 125,00	R$ 218,75
5	24-04	32	R$ 125,00	R$ 200,00
6	04-08	19	R$ 112,50	R$ 187,50

turnos requerido cSHE cCHE

SOLUÇÃO

TURNO	Horário	Enfer. s/ HE	Enfer. c/ HE	Excesso	Folga
1	08-12	17	15	0	5
2	12-16	26	0	0	23
3	16-20	21	0	0	25
4	20-24	20	0	0	16
5	24-04	0	12	0	1
6	04-08	7	0	0	8

semHE comHE excesso folga

Custo Total: R$ 14.975,00

ctotal

```
Title: Enfermeiros com Hora Extra;

sets:
 turnos/@ole('Enfermeiros - Hora Extra (R).xls','turnos')/: x, y, req;
endsets

data:
 ! Importa dados do Excel;
 req = @ole('Enfermeiros - Hora Extra (R).xls','requerido');
enddata

! Minimiza o custo com o pagamento de enfermeiros com e sem hora extra trabalhando no turno j;
[fo] min = @sum(turnos(j): cSHE*x(j) + cCHE*y(j));

@for(turnos(j):
 ! Total de enfermeiros em um determinado turno deve ser ≥ ao requerido;
 [excesso] x(j) + y(j) +
           x(@wrap(j-1,@size(turnos))) +
           y(@wrap(j-1,@size(turnos))) +
           y(@wrap(j-2,@size(turnos))) >= req(j);
```

```
! O total de enfermeiros com hora extra não dever ultrapassar 40% do total de enfermeiros em um turno;
[folga] y(j) <= 0.4*(x(j) + y(j) +
                     x(@wrap(j-1,@size(turnos))) +
                     y(@wrap(j-1,@size(turnos))) +
                     y(@wrap(j-2,@size(turnos))));

As variáveis x(j) e y(j) devem ser inteiras;
@GIN(x(j));
@GIN(y(j));
);

data:
 ! Importa dados para o Excel;
 @ole('Enfermeiros - Hora Extra (R).xls','semHE','comHE','ctotal','excesso','folga') =
     x, y, fo, excesso, folga;
enddata
```

(10) Deseja-se formar p ligas L_s a partir de q matérias primas R_j. Sabe-se que:

(a) uma unidade da matéria prima R_j contém a_{ij} unidades do metal M_i;

(b) uma unidade da liga L_s contém b_{is} unidades do metal M_i;

(c) uma unidade da matéria prima R_j custa c_j unidades monetárias;

(d) uma unidade da liga L_s é vendida a v_s unidades monetárias;

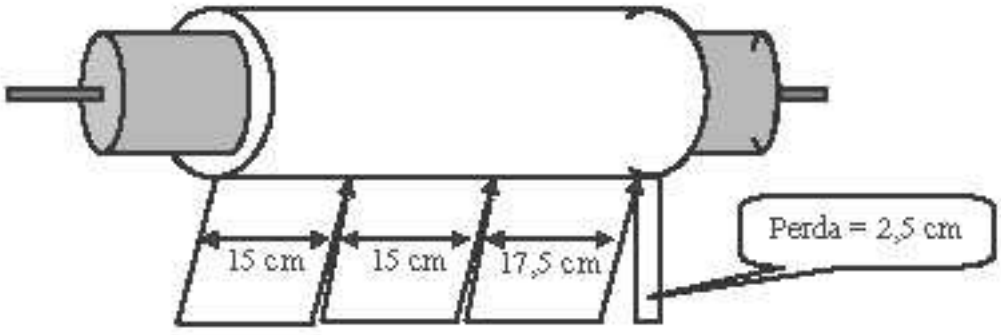
(e) de cada matéria prima R_j só existem u_j unidades disponíveis;

Faça um modelo de programação linear que permita determinar a quantidade x_j de matéria prima R_j a ser comprada e a quantidade y_s de liga L_s a ser vendida para que o lucro seja máximo.

(11) Certa empresa trabalha com a produção de etiquetas autocolantes. O papel usado para sua confecção encontra-se em bobinas de mesmo comprimento. A largura das bobinas é de 50 cm. As encomendas para a próxima semana impõem a necessidade de se cortarem bobinas em tiras de: 32 bobinas de 15 cm de largura; 17 bobinas de 17,5 cm de largura; 21 bobinas de 20 cm de largura. Além do mais, é política da empresa manter em estoque o excedente ao pedido em quantidade máxima de 10 bobinas cortadas de acordo com a encomenda. Esta ação evita a imobilização de capital, uma vez que são incertos os próximos pedidos.

A tabela abaixo relaciona as possíveis programações de cortes, tendo em vista as encomendas.

Mão-de-obra	**Largura da Faixa Cortada**			**Desperdício**
	15cm	**17,5cm**	**20cm**	
1	3	0	0	5
2	2	1	0	2,5
3	1	2	0	0
4	2	0	1	0
5	0	1	1	12,5
6	0	0	2	10



Qual a estratégia a ser seguida pela empresa de forma a minimizar os desperdícios face à necessidade de produção?

Modelo de Programação Matemática

Sejam os seguintes dados de entrada para o problema:

P	:	Conjunto de padrões de corte;
B	:	Conjunto de bobinas;
$desp_i$	:	Desperdício relativo aos cortes realizados de acordo com o padrão i;
$demanda_j$	:	Demanda por bobinas do tipo j;
a_{ij}	:	Quantidade de bobinas do tipo j produzidas no padrão de corte i;
$estmax$	:	Estoque máximo de bobinas permitido;

E, a seguinte variável de decisão:

x_i : Número de cortes realizados segundo o padrão i

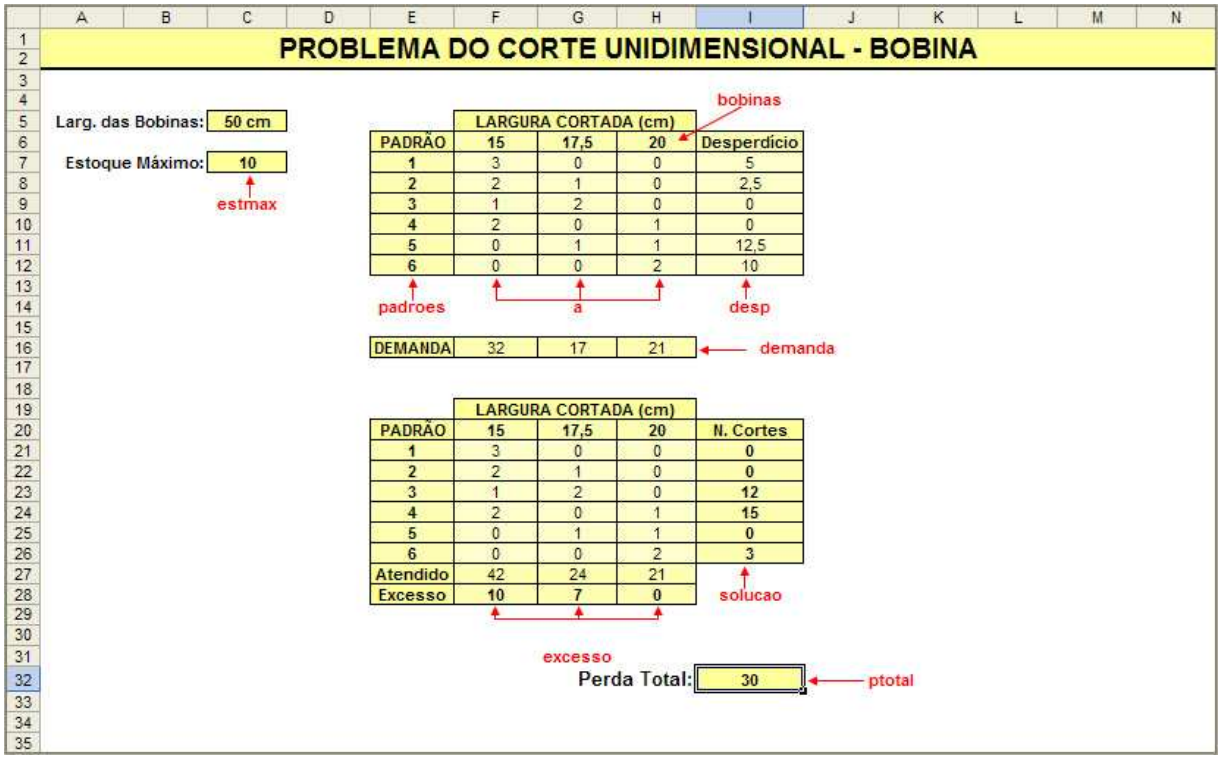
O modelo de programação matemática para o Exercício 11 é:

$$min \sum_{i=1}^{P} (desp_i \times x_i)$$

s.a:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{P} a_{ij} \times x_i &\geq demanda_j && \forall j \in B \\
\sum_{i=1}^{P} a_{ij} \times x_i &\leq demanda_j + estmax && \forall j \in B \\
x_i &\in \mathbb{Z}^+ && \forall i \in P
\end{aligned}$$

Modelo Lingo




```
Title: Corte - Bobinas;

sets:
  padroes/@ole('Corte Unidimensional - Bobina (R).xls','padroes')/: desp, x;
  bobinas/@ole('Corte Unidimensional - Bobina (R).xls','bobinas')/: demanda;

  matriz(padroes,bobinas): a;
endsets
```

```
data:
 ! Importa dados do Excel;
 desp, demanda, a, estmax =
     @ole('Corte Unidimensional - Bobina (R).xls', 'desp','demanda','a','estmax');
enddata

! Minimiza os desperdícios produzidos nos cortes realizados;
[fo] min = @sum(padroes(i): desp(i)*x(i));

! O total de bobinas de cada tipo produzido deve ser ≥ ao demandado;
@for(bobinas(j): [excbarra]@sum(padroes(i): a(i,j)*x(i)) >= demanda(j));

! O total de bobinas de cada tipo produzidas deve ser ≤ ao demandado
  mais o permitido em estoque;
@for(bobinas(j): @sum(padroes(i): a(i,j)*x(i)) ¡= demanda(j) + estmax);

! A variável x(i) deve ser inteira;
@for(padroes(i): @GIN(x(i)));

data:
 ! Exportando dados para o Excel;
 @ole('Corte Unidimensional - Bobina (R).xls','excesso','solucao','ptotal') =
     excbarra, x, fo;
enddadta
```

(12) **Problema de corte unidimensional** Uma serralheria dispõe de barras de 7 metros de comprimento que devem ser cortadas para obter barras menores atendendo a uma encomenda. As seguintes quantidades e tamanhos são requeridos: 92 barras de 2 metros, 59 barras de 3 metros e 89 barras de 4 metros. Elabore um modelo de programação linear inteira que minimize as perdas com os cortes.

Modelo de Programação Matemática

Sejam os seguintes dados de entrada para o problema:

P	:	Conjunto de padrões de corte;
B	:	Conjunto de barras;
$perda_i$	:	Perda com os cortes realizados de acordo com o padrão i;
$demanda_j$	:	Demanda por barras do tipo j;
a_{ij}	:	Quantidade de barras do tipo j produzidas no padrão de corte i;

E, a seguinte variável de decisão:

x_i : Número de cortes realizados segundo o padrão i

O modelo de programação matemática para o Exercício 12 é:

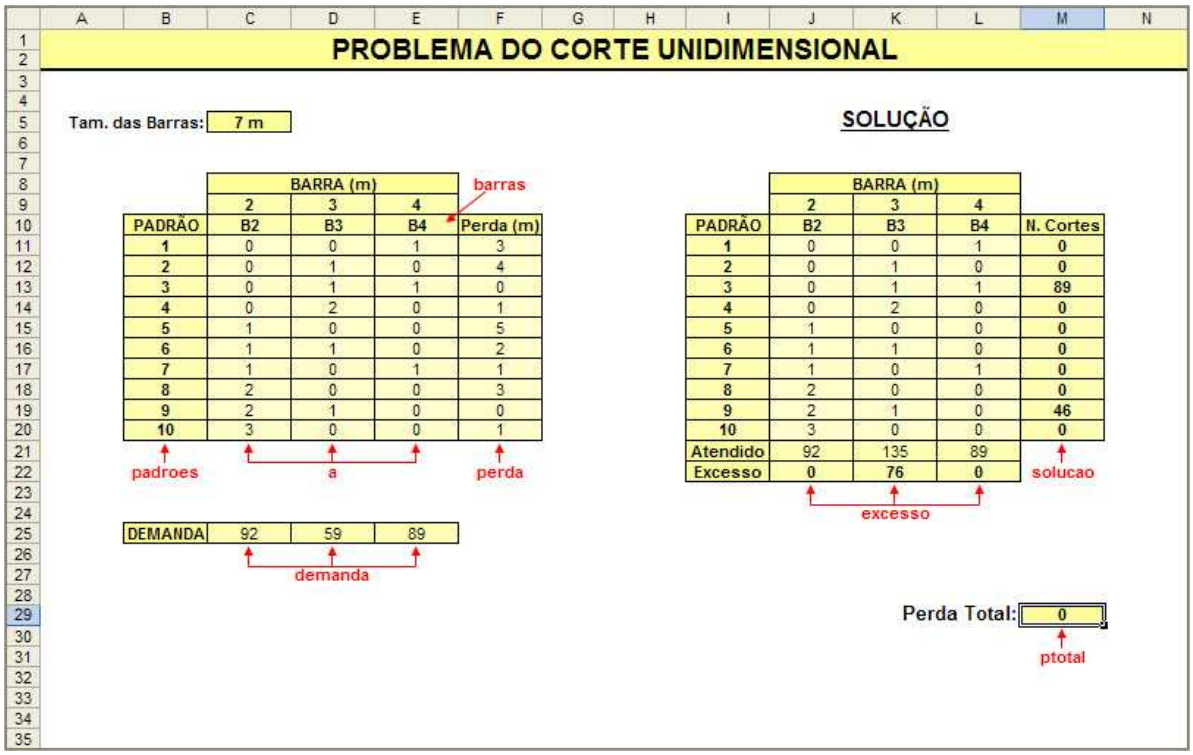
$$min \sum_{i=1}^{P} (perda_i \times x_i)$$

s.a:

$$\sum_{i=1}^{P} a_{ij} \times x_i \geq demanda_j \qquad \forall j \in B$$

$$x_i \in \mathbb{Z}^+ \qquad \forall i \in P$$

Modelo Lingo



Title: Corte Unidimensional;

sets:
padroes/@ole('Corte Unidimensional (R).xls','padroes')/: perda, x;
barras/@ole('Corte Unidimensional (R).xls','barras')/: demanda;

matriz(padroes,barras): a;
endsets

data:
! Importa dados do Excel;
perda, demanda, a = @ole('Corte Unidimensional (R).xls','perda','demanda','a');
enddata

```
! Minimiza a perda com os cortes;
[fo] min = @sum(padroes(i): perda(i)*x(i));

! Total de barras produzidas dever ser ≥ ao demandado;
@for(barras(j): [excbarra] @sum(padroes(i): a(i,j)*x(i)) >= demanda(j));

! A variável x(i) deve ser inteira;
@for(padroes(i): @GIN(x(i)));

data:
 ! Exportando dados para o Excel;
 @ole('Corte Unidimensional (R).xls','excesso','solucao','ptotal') = excbarra, x, fo;
enddata
```

(13) **Problema de corte unidimensional** Relativamente ao problema anterior, considere que a serralheria não tem espaço para reaproveitar as barras menores não usadas. Elabore um modelo de programação linear inteira que minimize as perdas com os cortes e com o excesso de barras menores não aproveitadas.

Modelo de Programação Matemática

Sejam os seguintes dados de entrada para o problema:

P	:	Conjunto de padrões de corte;
B	:	Conjunto de barras;
$perda_i$	:	Perda com os cortes realizados de acordo com o padrão i;
$demanda_j$	:	Demanda por barras do tipo j;
$dimenbarra_j$	:	Dimensão da barra do tipo j;
a_{ij}	:	Quantidade de barras do tipo j produzidas no padrão de corte i;

E, a seguinte variável de decisão:

x_i : Número de cortes realizados segundo o padrão i

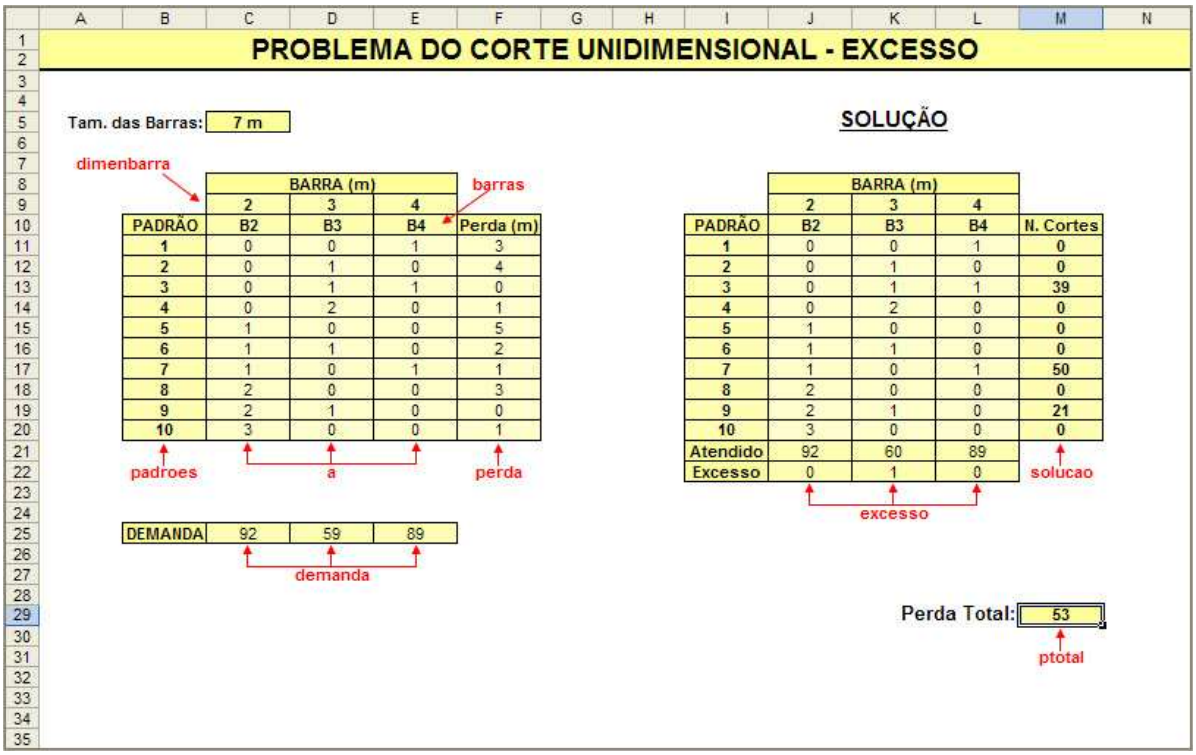
O modelo de programação matemática para o Exercício 13 é:

$$min \sum_{i=1}^{P}(perda_i \times x_i) + \sum_{j=1}^{B}(dimenbarra_j \times (\sum_{i=1}^{P} a_{ij} \times x_i - demanda_j))$$

s.a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{P} a_{ij} \times x_i &\geq demanda_j && \forall j \in B \\ x_i &\in \mathbb{Z}^+ && \forall i \in P \end{aligned}$$

Modelo Lingo



PROBLEMA DO CORTE UNIDIMENSIONAL - EXCESSO

Tam. das Barras: 7 m

dimenbarra

	BARRA (m)			barras
	2	3	4	
PADRÃO	B2	B3	B4	Perda (m)
1	0	0	1	3
2	0	1	0	4
3	0	1	1	0
4	0	2	0	1
5	1	0	0	5
6	1	1	0	2
7	1	0	1	1
8	2	0	0	3
9	2	1	0	0
10	3	0	0	1

padroes a perda

DEMANDA	92	59	89

demanda

SOLUÇÃO

	BARRA (m)			
	2	3	4	
PADRÃO	B2	B3	B4	N. Cortes
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	39
4	0	2	0	0
5	1	0	0	0
6	1	1	0	0
7	1	0	1	50
8	2	0	0	0
9	2	1	0	21
10	3	0	0	0
Atendido	92	60	89	
Excesso	0	1	0	solucao

excesso

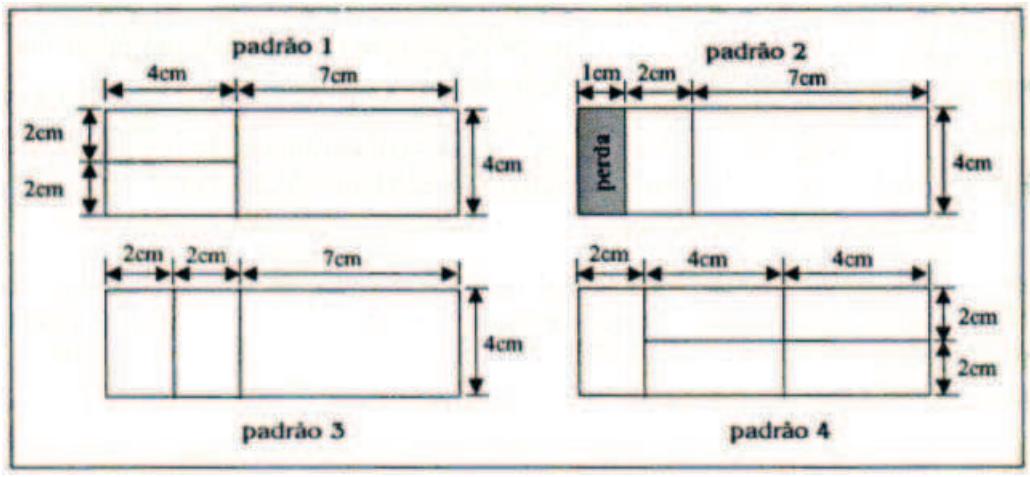
Perda Total: 53

ptotal

```
Title: Corte Unidimensional com Excesso;

sets:
  padroes/@ole('Corte Unidimensional - Excesso (R).xls','padroes')/: perda, x;
  barras/@ole('Corte Unidimensional - Excesso (R).xls','barras')/: demanda, dimenbarra;

  matriz(padroes,barras): a;
endsets

data:
  ! Importando dados do Excel;
  perda, demanda, a, dimenbarra =
      @ole('Corte Unidimensional - Excesso (R).xls','perda','demanda','a','dimenbarra');
enddata

! Minimiza as perdas com os cortes e o excesso de barras não aproveitadas;
[fo] min = @sum(padroes(i): perda(i)*x(i)) +
      @sum(barras(j): dimenbarra(j)*(@sum(padroes(i): a(i,j)*x(i)) - demanda(j)));

! Total de barras produzidas dever ser ≥ ao demandado;
@for(barras(j): [excbarra] @sum(padroes(i): a(i,j)*x(i)) >= demanda(j));

! A variável x(i) deve ser inteira;
@for(padroes(i): @GIN(x(i)));
```

```
data:
 ! Exportando dados para o Excel;
 @ole('Corte Unidimensional - Excesso (R).xls','excesso','solucao','ptotal') =
     excbarra, x, fo;
enddata
```

(14) Um fabricante de tiras metálicas recebeu um pedido para produzir 2000 tiras de tamanho 2 cm × 4 cm e 1000 tiras de 4 cm × 7 cm. As tiras podem ser produzidas a partir de chapas maiores disponíveis nos tamanhos de 10 cm × 3000 cm e 11 cm × 2000 cm. O departamento técnico encarregado de planejar o atendimento ao pedido decidiu que os padrões de corte mostrados na figura a seguir são adequados para produzir as tiras encomendadas. Formule um modelo de programação linear que permita minimizar o material usado (ou minimizar as perdas) no atendimento à encomenda.



(15) **Problema da Mochila 0-1** Tem-se um conjunto de 10 itens e uma mochila com capacidade igual a 100 u.m. Sabendo-se que existe uma única unidade de cada item e, que cada um deles traz um retorno e possui um determinado peso, conforme verificado na tabela abaixo, formule um modelo que maximize o retorno dos itens a serem alocados à mochila.

Item	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Peso (kg)	15	18	13	23	9	10	11	5	14	5
Valor	5	7	6	10	8	3	4	1	7	3

Modelo de Programação Matemática

Sejam os seguintes dados de entrada para o problema:

N : Conjunto de itens;
$peso_j$: Peso associado ao item j;
$valor_j$: Valor associado ao item j;
cap : Capacidade da mochila;

E, a seguinte variável de decisão:

$$x_i \quad : \begin{cases} 1 & \text{se o item } j \text{ for alocado à mochila;} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O modelo de programação matemática para o Exercício 15 é:

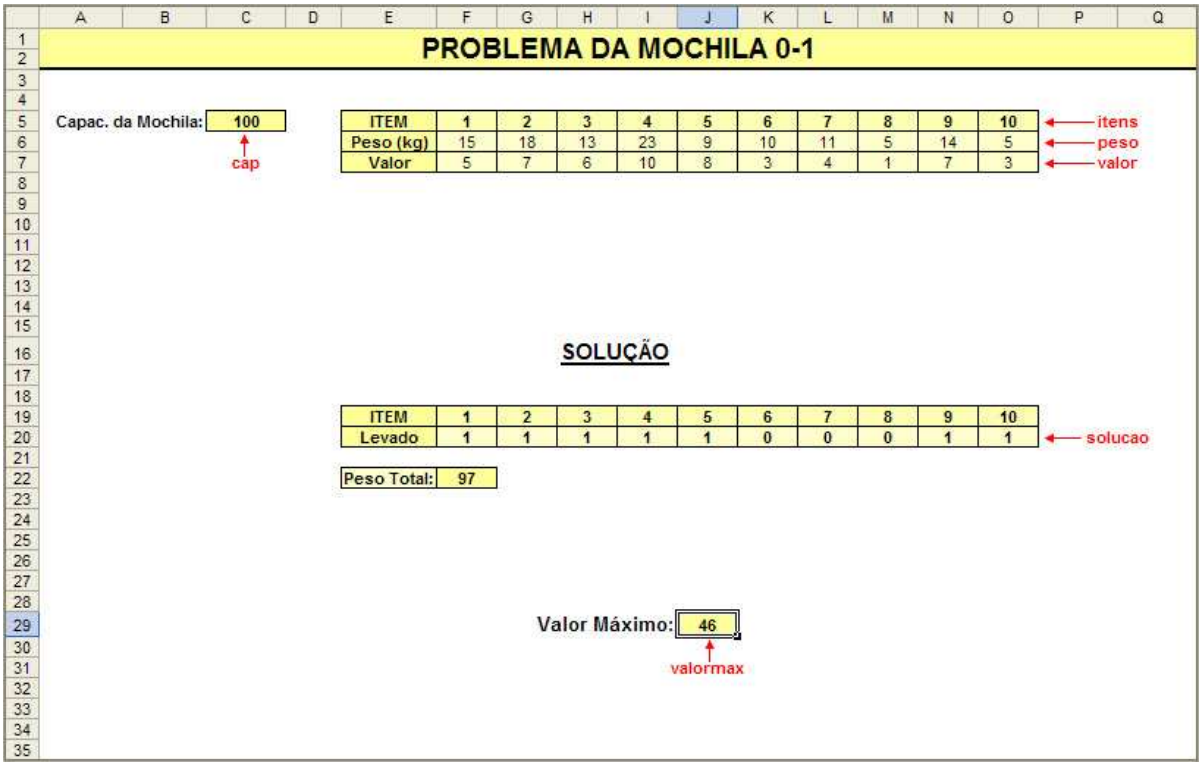
$$max \sum_{j=1}^{N} (valor_j \times x_j)$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^{N} peso_j \times x_j \leq cap$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad \forall j \in N$$

Modelo Lingo



PROBLEMA DA MOCHILA 0-1

Capac. da Mochila: 100 (cap)

ITEM	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	← itens
Peso (kg)	15	18	13	23	9	10	11	5	14	5	← peso
Valor	5	7	6	10	8	3	4	1	7	3	← valor

SOLUÇÃO

ITEM	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	← solucao
Levado	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	

Peso Total: 97

Valor Máximo: 46 (valormax)

```
Title: Mochila 0-1;

sets:
 itens/@ole('Mochila 0-1 (R).xls','itens')/: peso, valor, x;
endsets

data:
 ! Importa dados do Excel;
 peso, valor, cap = @ole('Mochila 0-1 (R).xls','peso','valor','cap');
enddata

! Maximiza o benefício com os itens alocados à mochila;
[fo] max = @sum(itens(j): valor(j)*x(j));

! Peso total dos itens alocados à mochila não deve ultrapassar a capacidade da mesma;
@sum(itens(j): peso(j)*x(j)) <= cap;

! A variável x(j) deve ser binária;
@for(itens(j): @BIN(x(j)));

data:
 ! Exporta dados para o Excel;
 @ole('Mochila 0-1 (R).xls','solucao','valormax') = x, fo;
enddata
```

(16) **Problema da Mochila 0-1 Múltipla** Resolva o problema anterior, supondo que existem várias mochilas, cujas capacidades estão representadas nas tabelas a seguir.

Item	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Peso (kg)	15	18	13	23	9	10	11	5	14	5
Valor	5	7	6	10	8	3	4	1	7	3

Mochila	**Capacidade**
A	47
B	28
C	42

Modelo de Programação Matemática

Sejam os seguintes dados de entrada para o problema:

N : Conjunto de itens;
M : Conjunto de Mochilas;
$peso_j$: Peso associado ao item j;
$valor_j$: Valor associado ao item j;
cap_i : Capacidade da mochila i;

E, a seguinte variável de decisão:

$$x_{ij} : \begin{cases} 1 & \text{se o item } j \text{ for alocado à mochila } i; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

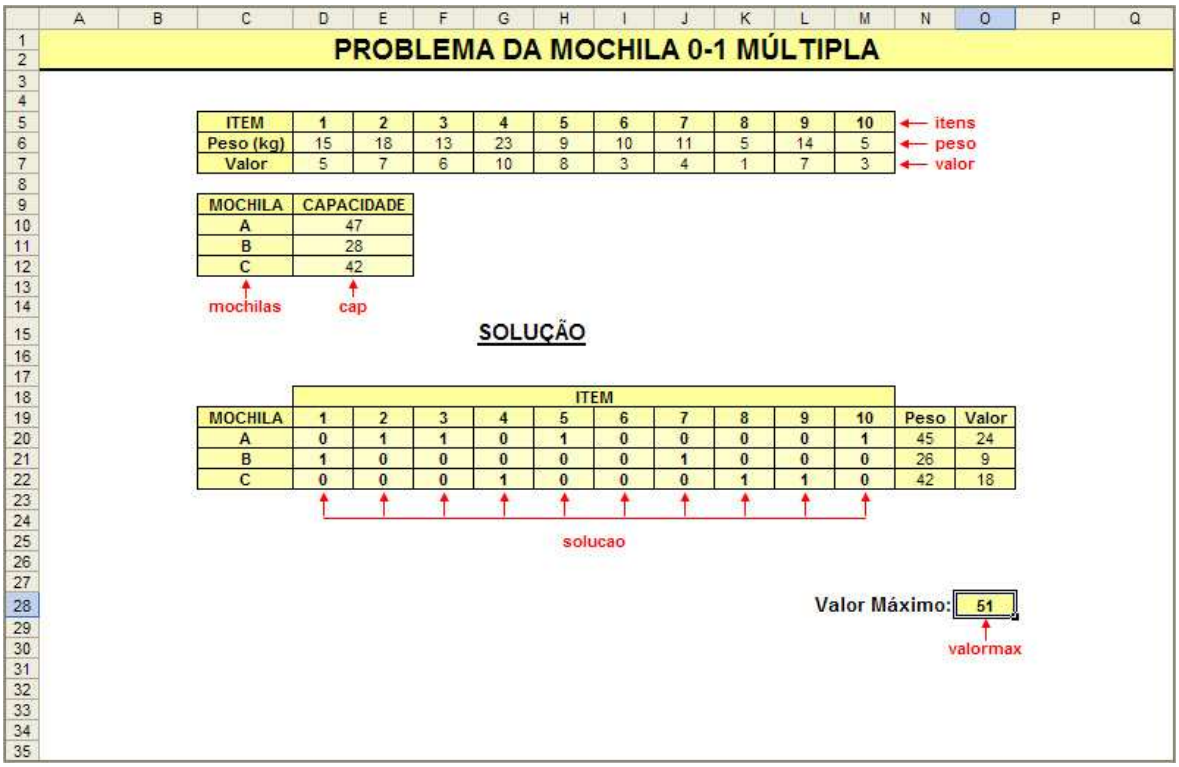
O modelo de programação matemática para o Exercício 16 é:

$$max \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} (valor_j \times x_{ij})$$

s.a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{M} x_{ij} &\leq 1 && \forall j \in N \\ \sum_{j=1}^{N} peso_j \times x_{ij} &\leq cap_i && \forall i \in M \\ x_{ij} &\in \{0,1\} && \forall i \in M, \forall j \in N \end{aligned}$$

Modelo Lingo



PROBLEMA DA MOCHILA 0-1 MÚLTIPLA

ITEM	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Peso (kg)	15	18	13	23	9	10	11	5	14	5	← itens
Valor	5	7	6	10	8	3	4	1	7	3	← peso
											← valor

MOCHILA	CAPACIDADE
A	47
B	28
C	42

mochilas cap

SOLUÇÃO

	ITEM											
MOCHILA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Peso	Valor
A	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	45	24
B	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	26	9
C	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	42	18

solucao

Valor Máximo: 51

valormax

```
Title: Mochila 0-1 Multipla;

sets:
  mochilas/@ole('Mochila 0-1 Múltipla (R).xls','mochilas')/: cap;
  itens/@ole('Mochila 0-1 Múltipla (R).xls','itens')/: peso, valor;

  matriz(mochilas,itens): x;
endsets

data:
  ! Importa dados do Excel;
  peso, valor, cap = @ole('Mochila 0-1 Múltipla (R).xls','peso','valor','cap');
enddata

! Maximiza o beneficio com o a alocação de itens às mochilas
[fo] max = @sum(matriz(i,j): valor(j)*x(i,j));

! Cada item só pode ser alocado a uma única mochila;
@for(itens(j): @sum(mochilas(i): x(i,j)) <= 1);

! A capacidade da mochila deve ser respeitada;
@for(mochilas(i): @sum(itens(j): peso(j)*x(i,j)) <= cap(i));
```

```
! A variável x(i,j) deve ser binária;
@for(matriz(i,j):@BIN(x(i,j)));

data:
 ! Exporta dados para o Excel;
 @ole('Mochila 0-1 Múltipla (R).xls','solucao','valormax') = x, fo;
enddata
```

(17) **Problema da Mochila Inteira** Considere um conjunto de 10 itens e uma mochila de capacidade igual a 100 u.m. Sabendo-se que existem várias unidades de cada item e, que cada um deles traz um retorno e apresenta um determinado peso, conforme tabela abaixo, formule um modelo que maximize o retorno dos itens a serem alocados à mochila.

Item	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Peso (kg)	15	18	13	23	9	10	11	5	14	5
Valor	5	7	6	10	8	3	4	1	7	3
Unidades	2	3	2	3	2	2	2	2	1	2

Modelo de Programação Matemática

Sejam os seguintes dados de entrada para o problema:

N : Conjunto de itens;
$peso_j$: Peso associado ao item j;
$valor_j$: Valor associado ao item j;
$quant_j$: Quantidade do item j;
cap : Capacidade da mochila;

E, a seguinte variável de decisão:

x_i : Quantidade de itens do tipo j a serem alocados à mochila

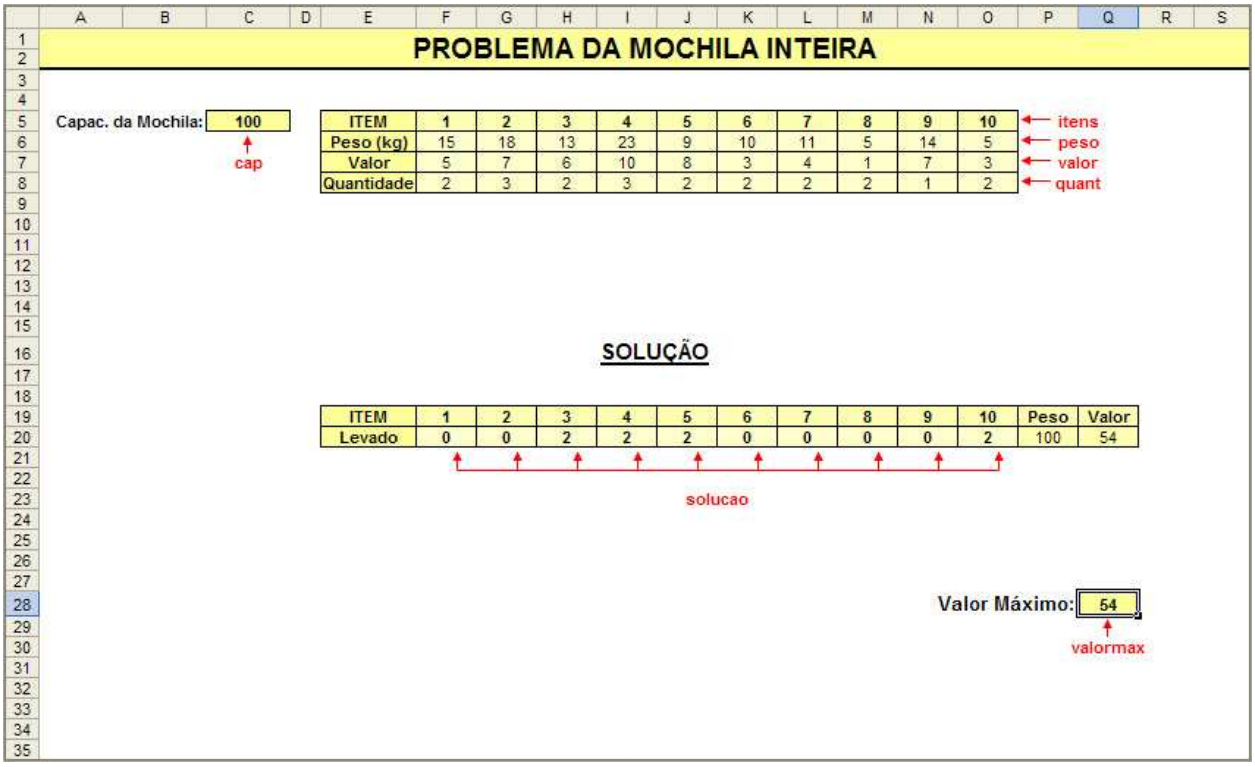
O modelo de programação matemática para o Exercício 17 é:

$$max \sum_{j=1}^{N} (valor_j \times x_j)$$

s.a:

$$\begin{aligned} x_j &\leq quant_j && \forall j \in N \\ \sum_{j=1}^{N} peso_j \times x_j &\leq cap \\ x_j &\in \mathbb{Z}^+ && \forall j \in N \end{aligned}$$

Modelo Lingo



PROBLEMA DA MOCHILA INTEIRA

Capac. da Mochila: 100 (cap)

ITEM	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Peso (kg)	15	18	13	23	9	10	11	5	14	5	← peso
Valor	5	7	6	10	8	3	4	1	7	3	← valor
Quantidade	2	3	2	3	2	2	2	2	1	2	← quant

(← itens)

SOLUÇÃO

ITEM	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Peso	Valor
Levado	0	0	2	2	2	0	0	0	0	2	100	54

(solucao)

Valor Máximo: 54 (valormax)

Title: Mochila Inteira;

sets:
 itens/@ole('Mochila Inteira (R).xls','itens')/: peso, valor, quant, x;
endsets

data:
 ! Importa dados do Excel;
 peso, valor, quant, cap = @ole('Mochila Inteira (R).xls','peso','valor','quant','cap');
enddata

! Maximiza o beneficio com o a alocação de itens à mochila;
[fo] max = @sum(itens(j): valor(j)*x(j));

! A quantidade de itens alocados deve ser ≤ ao total disponível desse item;
@for(itens(j): x(j) <= quant(j));

! A capacidade da mochila deve ser respeitada;
@sum(itens(j): peso(j)*x(j)) <= cap;

```
! A variável x(j) deve ser inteira;
@for(itens(j):@GIN(x(j)));

data:
 ! Exporta dados para o Excel;
 @ole('Mochila Inteira (R).xls','solucao','valormax') = x, fo;
enddata
```

(18) **Problema da Mochila Inteira Múltipla** Resolva o problema anterior, supondo que existem vários itens e várias mochilas. Os dados para o problema estão indicados nas tabelas a seguir.

Item	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Peso (kg)	15	18	13	23	9	10	11	5	14	5
Valor	5	7	6	10	8	3	4	1	7	3
Unidades	2	3	2	3	2	2	2	2	1	2

Mochila	**Capacidade**
A	47
B	28
C	42

Modelo de Programação Matemática

Sejam os seguintes dados de entrada para o problema:

N	:	Conjunto de itens;
M	:	Conjunto de Mochilas;
$peso_j$	:	Peso associado ao item j;
$valor_j$	:	Valor associado ao item j;
cap_i	:	Capacidade da mochila i;

E, a seguinte variável de decisão:

x_{ij} : Quantidade de itens do tipo j alocados à mochila i

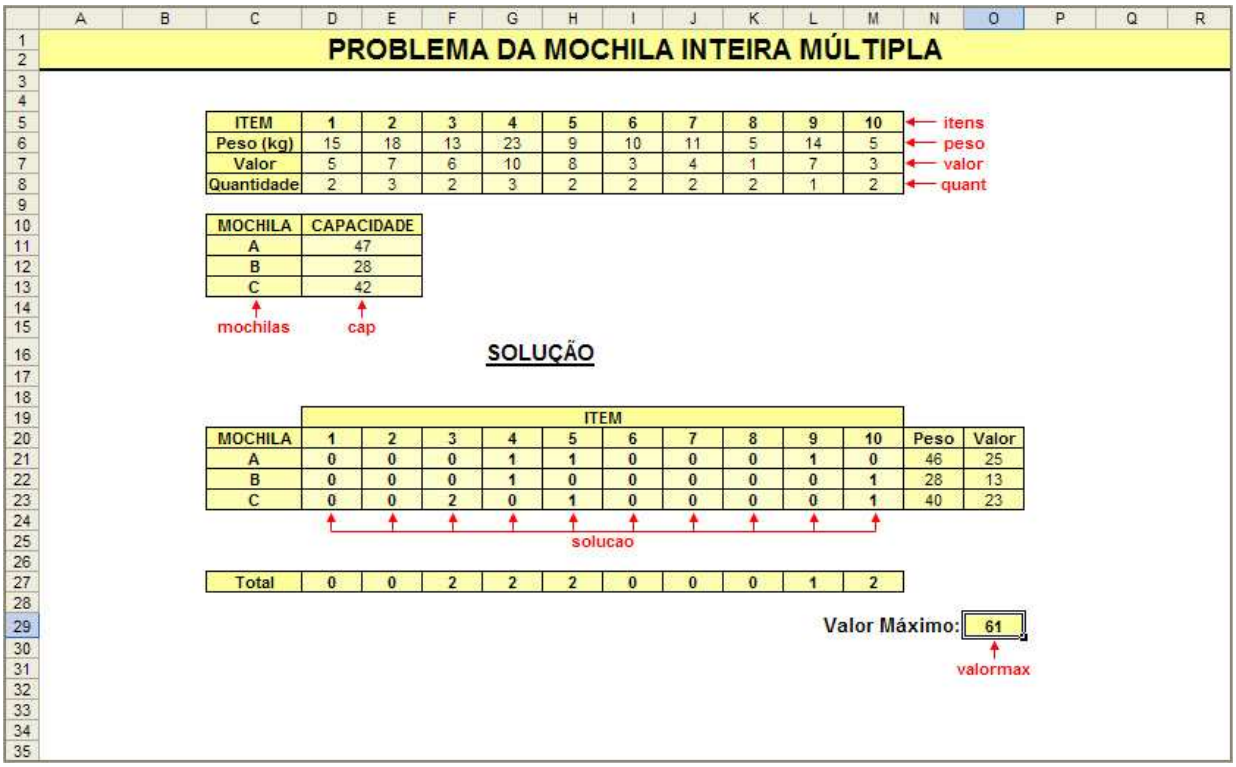
O modelo de programação matemática para o Exercício 18 é:

$$max \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} (valor_j \times x_{ij})$$

s.a:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{M} x_{ij} &\leq quant_j && \forall j \in N \\
\sum_{j=1}^{N} peso_j \times x_{ij} &\leq cap_i && \forall i \in M \\
x_{ij} &\in \mathbb{Z}^+ && \forall j \in N
\end{aligned}$$

Modelo Lingo



PROBLEMA DA MOCHILA INTEIRA MÚLTIPLA

ITEM	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Peso (kg)	15	18	13	23	9	10	11	5	14	5	← itens
Valor	5	7	6	10	8	3	4	1	7	3	← peso
Quantidade	2	3	2	3	2	2	2	2	1	2	← valor
											← quant

MOCHILA	CAPACIDADE
A	47
B	28
C	42

mochilas cap

SOLUÇÃO

	ITEM											
MOCHILA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Peso	Valor
A	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	46	25
B	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	28	13
C	0	0	2	0	1	0	0	0	0	1	40	23
	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑		
	solucao											

Total	0	0	2	2	2	0	0	0	1	2

Valor Máximo: 61

valormax

Title: Mochila Inteira Multipla;

sets:
 mochilas/@ole('Mochila Inteira Múltipla (R).xls','mochilas')/: cap;
 itens/@ole('Mochila Inteira Múltipla (R).xls','itens')/: peso, valor, quant;

matriz(mochilas,itens): x;
endsets

data:
 Importa dados do Excel
 peso, valor, quant, cap = @ole('Mochila Inteira Múltipla (R).xls','peso','valor','quant','cap');
enddata

! Maximiza o benefício com a alocação dos itens às mochilas;
[fo] max = @sum(matriz(i,j): valor(j)*x(i,j));

! A quantidade de itens alocados dever ser $\leq$ ao total de itens disponíveis;
@for(itens(j): @sum(mochilas(i): x(i,j)) <= quant(j));

! A capacidade da mochila deve ser respeitada;
@for(mochilas(i): @sum(itens(j): peso(j)*x(i,j)) <= cap(i));

```
! A variável x(i,j) deve ser inteira;
@for(matriz(i,j): @GIN(x(i,j)));

data:
 ! Exporta dados pata o Excel
 @ole('Mochila Inteira Múltipla (R).xls','solucao','valormax') = x, fo;
enddata
```

(19) Há um conjunto de m possíveis localidades para instalar uma fábrica. Há também um conjunto de n clientes a serem atendidos pelas fábricas. Para cada possível fábrica i é dado o custo fixo de produção f_i, sua capacidade de produção p_i e o custo de transporte c_{ij} de uma unidade do produto da fábrica i para o cliente j. Para cada cliente j é dada a demanda d_j. Em quais localidades deve-se instalar as fábricas de forma a atender à demanda requerida no menor custo?