

Técnicas Meta-heurísticas para Otimização Combinatória



Marcone Jamilson Freitas Souza^{1,2,3}

Puca Huachi Vaz Penna¹

¹ Departamento de Computação

¹ Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação
Universidade Federal de Ouro Preto

² Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e
Computacional / CEFET-MG

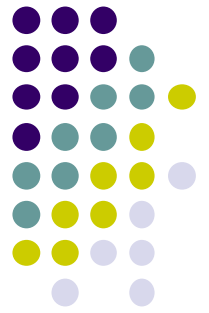
³ Programa de Pós-graduação em Instrumentação, Controle e
Automação de Processos de Mineração / ITV/UFOP

www.decom.ufop.br/prof/marcone, www.decom.ufop.br/puca

E-mail: {marcone,puca}@ufop.edu.br

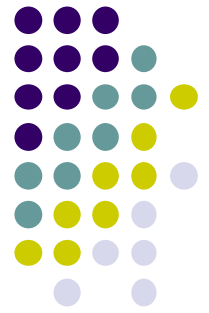


Ementa



- **Introdução**
 - Motivação
 - Conceitos básicos
- **Heurísticas clássicas**
 - Heurísticas construtivas
 - Heurísticas de refinamento
 - Best Improvement
 - First Improvement
 - Random Descent
- **Metaheurísticas**
 - *Simulated Annealing*
 - *Variable Neighborhood Search (VNS)*
 - *Iterated Local Search (ILS)*
 - *Busca Tabu*
 - *GRASP*
 - *Late Acceptance Hill-Climbing (LAHC)*
 - Algoritmos Genéticos
 - Algoritmos Meméticos
 - Biased Random Key Genetic Algorithm (BRKGA)
 - Scatter Search
 - Colônia de Formigas
 - Otimização por Nuvem de Partículas
- Aplicações de técnicas de otimização a processos produtivos

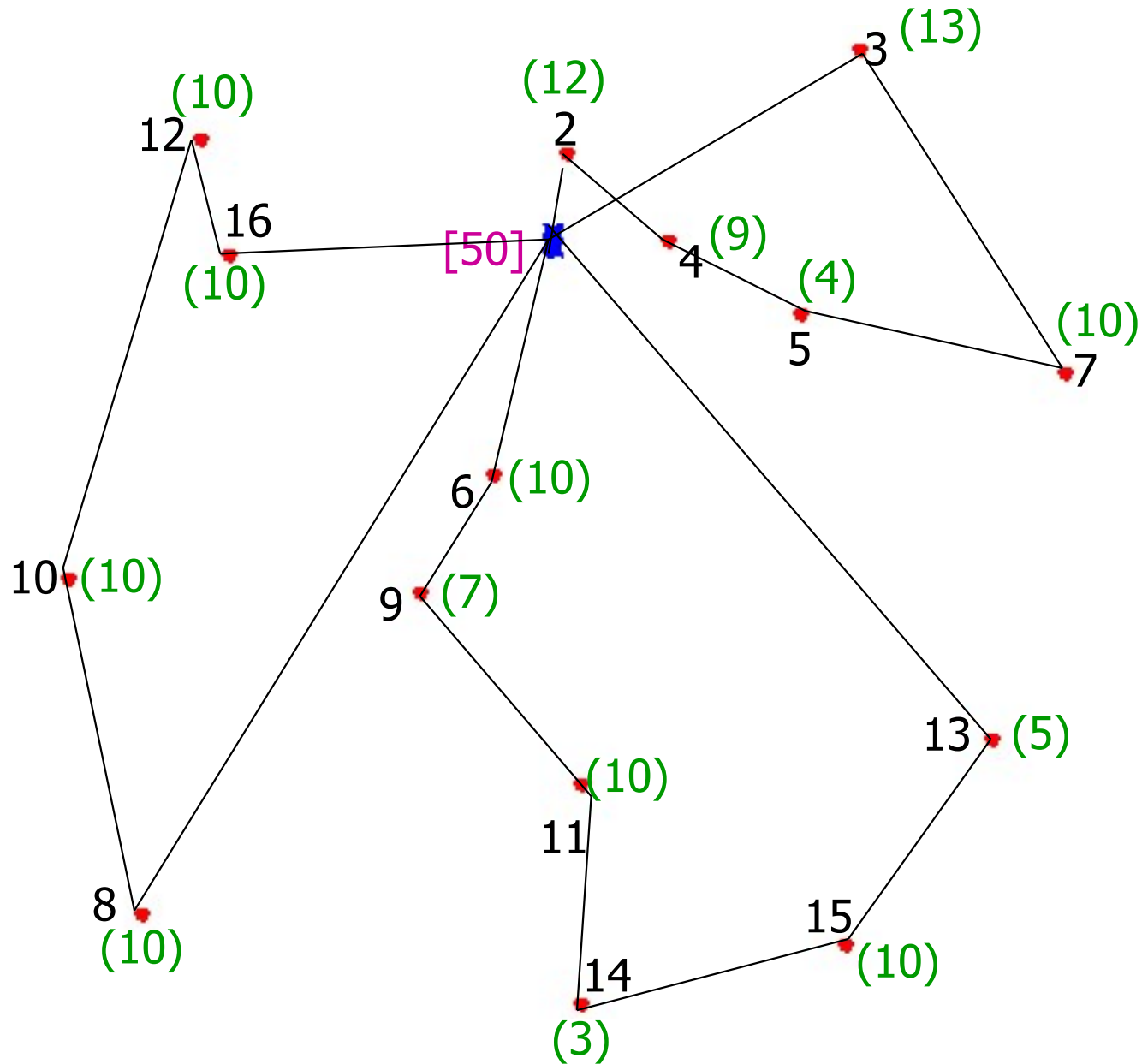
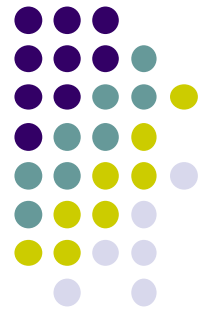
Introdução



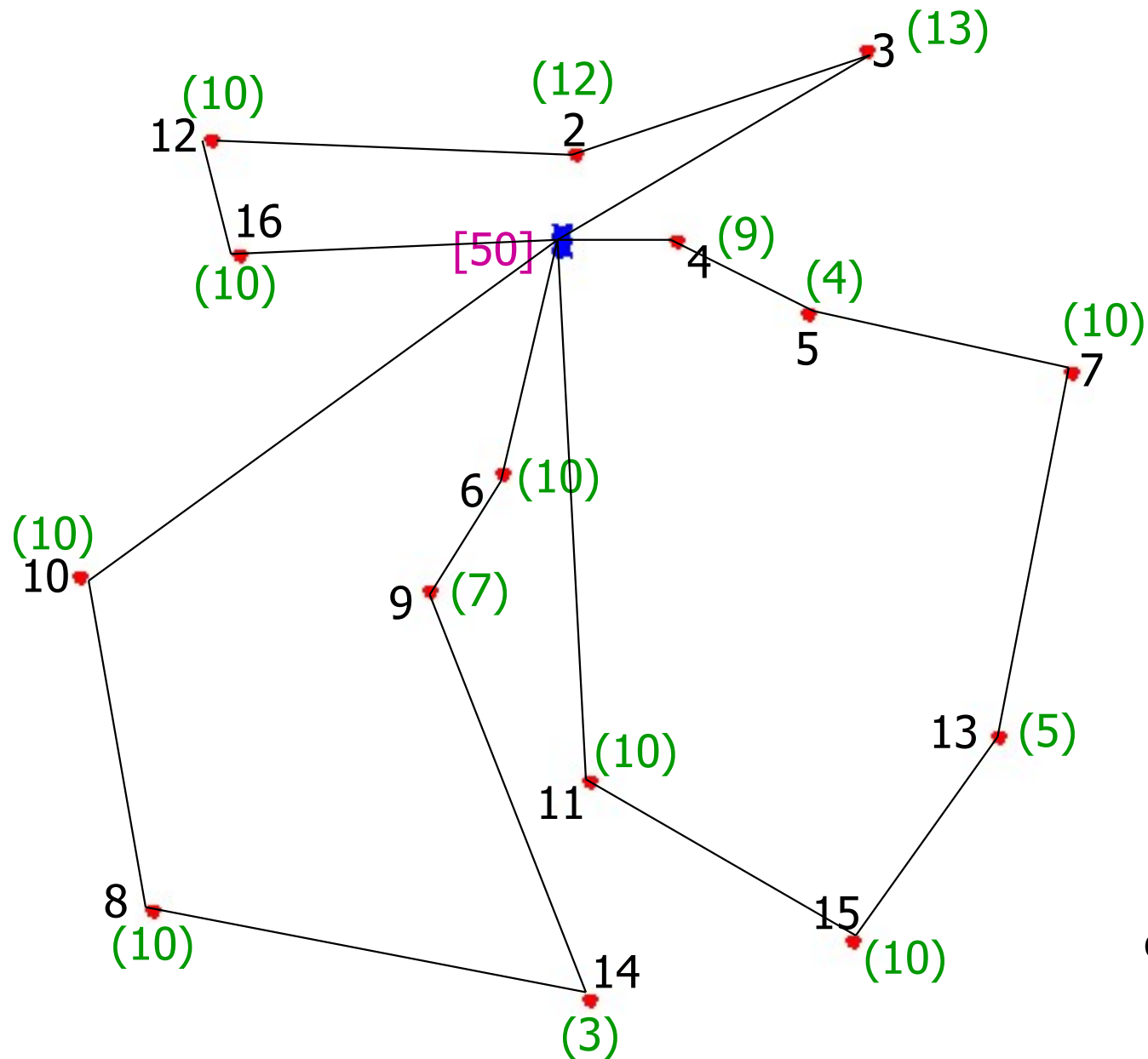
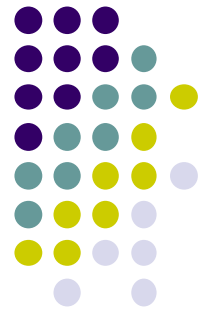
- Heurísticas
 - Métodos para resolver problemas “complexos” de otimização
- Otimização:
 - Área da Pesquisa Operacional que utiliza o método científico para apoiar a tomada de decisões, procurando determinar como melhor projetar e operar um sistema, usualmente sob condições que requerem a alocação de recursos escassos.
 - Na versão determinística do problema:
 - As informações relevantes são assumidas como conhecidas (sem incertezas)
 - Na versão estocástica do problema:
 - Considera incerteza nos dados de entrada
- Aplicações típicas:
 - Planejamento da produção
 - Roteamento de veículos
 - Escala de pessoal

ROTEAMENTO DE VEÍCULOS

Problema de Roteamento de Veículos (*Vehicle Routing Problem*)



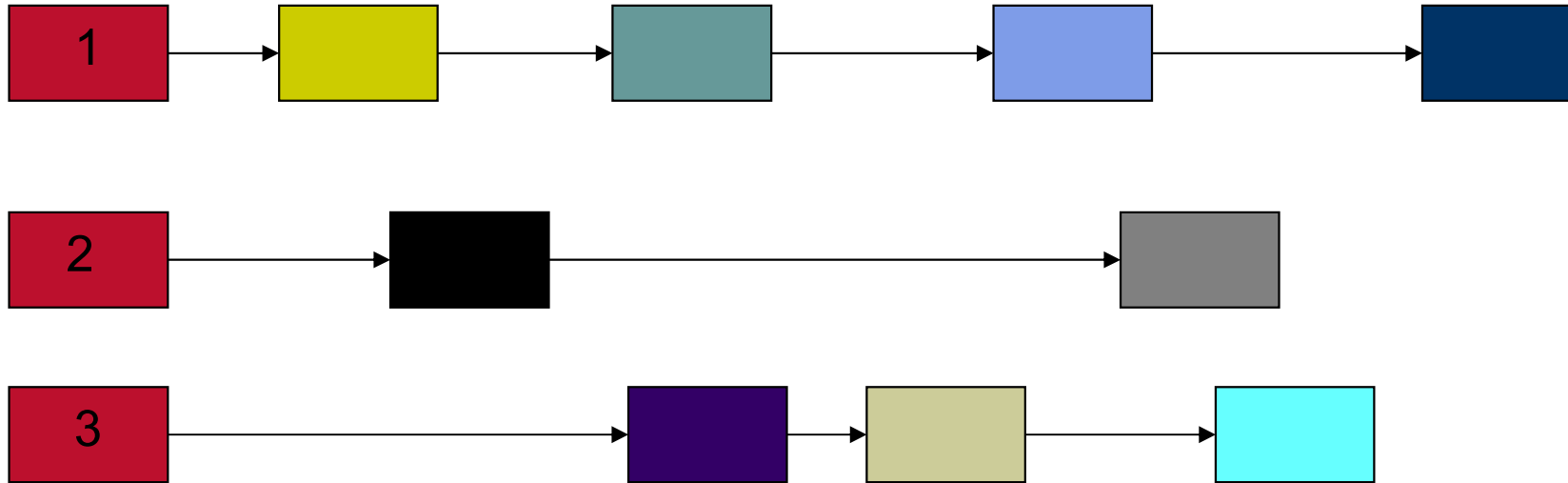
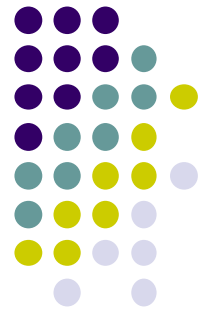
Problema de Roteamento de Veículos (*Vehicle Routing Problem*)



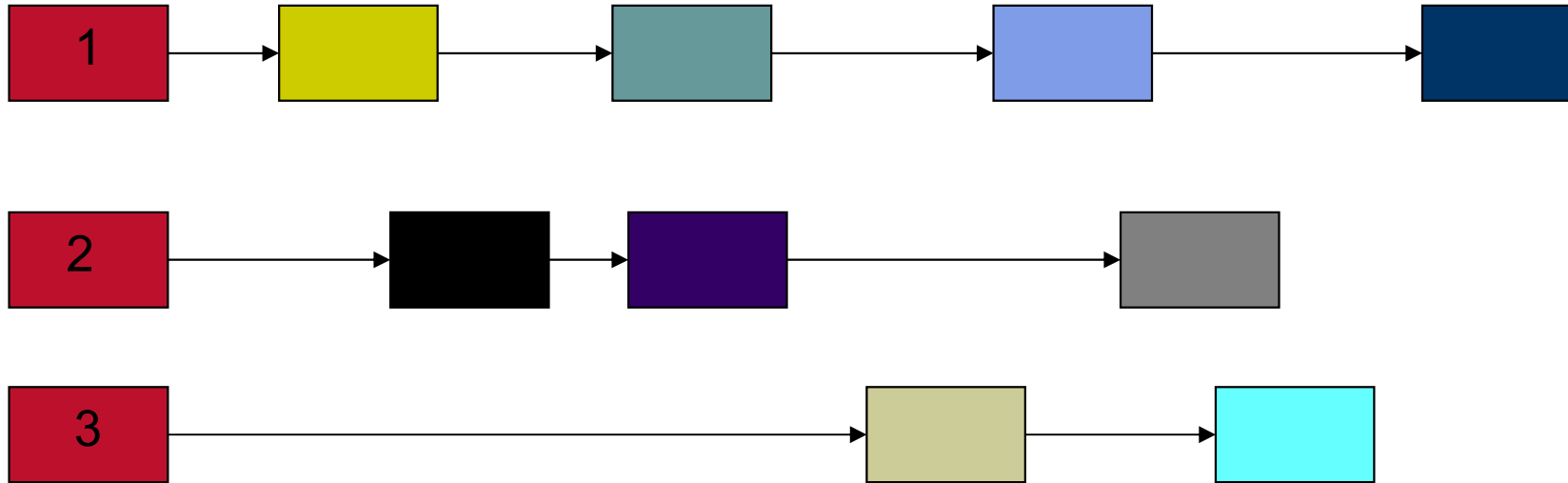
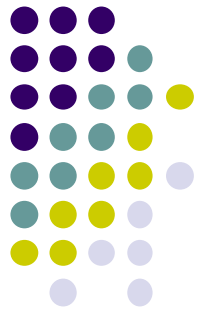
Dentre todas as possíveis roteirizações, determine aquela que minimiza a distância total percorrida⁶

CREW SCHEDULING

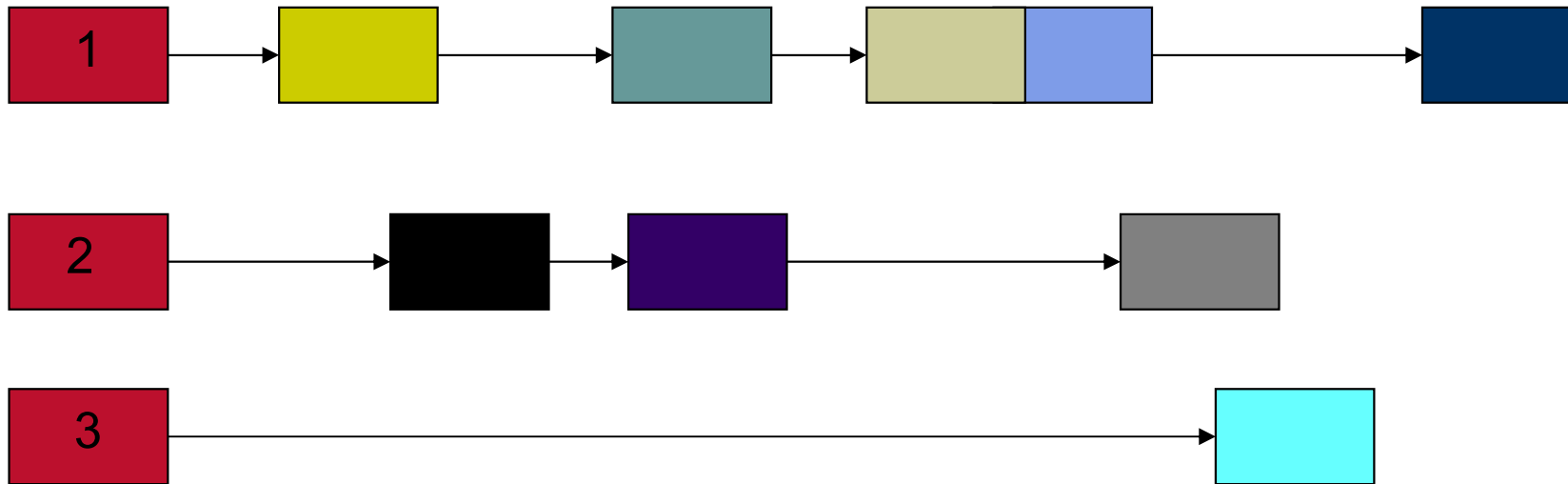
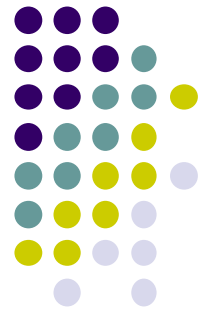
Escala de Motoristas (*Crew Scheduling*)



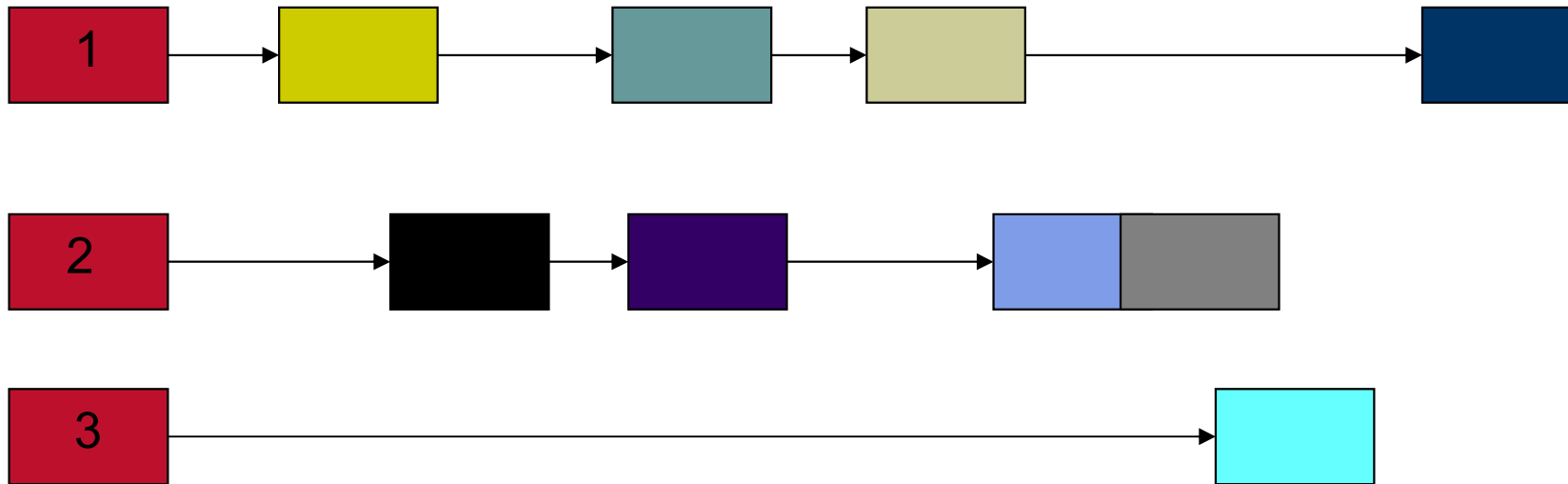
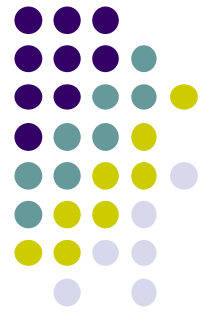
Escala de Motoristas (*Crew Scheduling*)



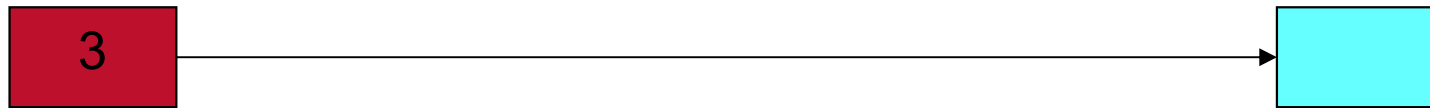
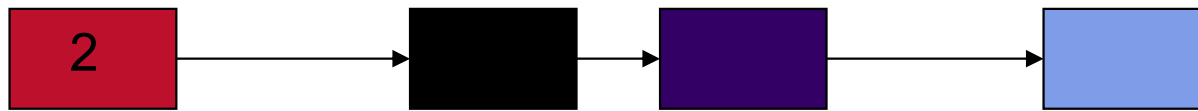
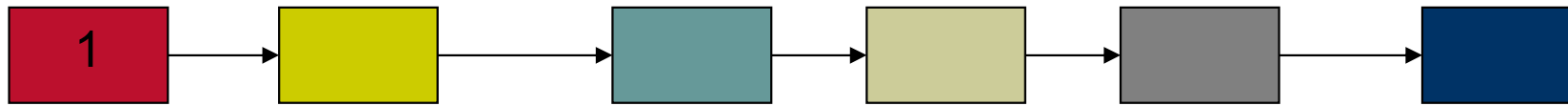
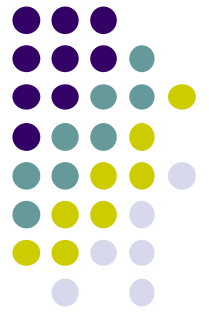
Escala de Motoristas (*Crew Scheduling*)



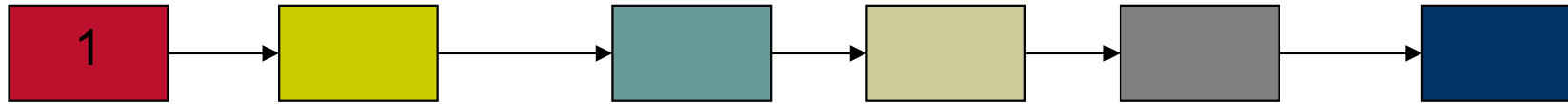
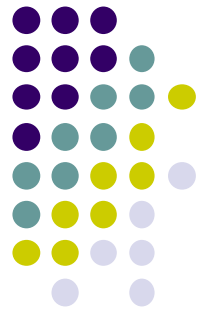
Escala de Motoristas (*Crew Scheduling*)



Escala de Motoristas (*Crew Scheduling*)



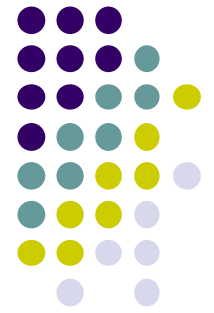
Escala de Motoristas (*Crew Scheduling*)



Redução de uma tripulação!

CONTROLE DE PÁTIO DE MINÉRIOS

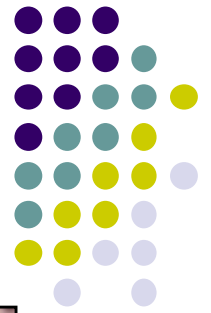
Controle de Pátio de Minérios



- Aplicação na mina Cauê, Itabira (MG), da CVRD
- 3 pátios de estocagem de minérios
- Minérios empilhados em balizas
- Pilhas formadas por subprodutos com composição química e granulométrica diferentes
- Objetivo é compor um lote de vagões (± 80), atendendo às metas de qualidade e produção de um dado produto
- Exemplos de algumas restrições operacionais:
 - Retomar uma pilha toda sempre que possível
 - Concentrar retomada
 - Retomar minério da esquerda para a direita e de cima para baixo

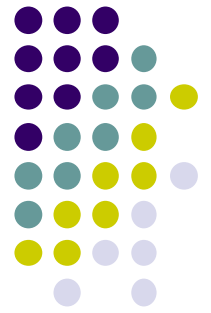
Controle de Pátio de Minérios

Pátio de Estocagem Cauê



Controle de Pátio de Minérios

Equipamentos de empilhamento e recuperação



Recuperadora (Bucket Wheel)



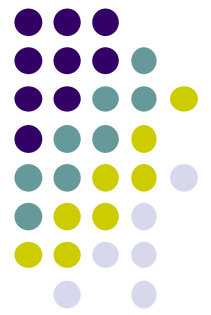
Recuperadora Tambor (Drum)



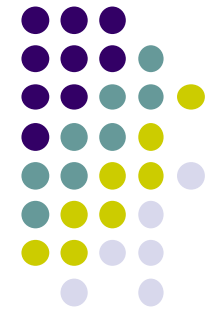
Empilhadeira (Stacker)

Controle de Pátio de Minérios

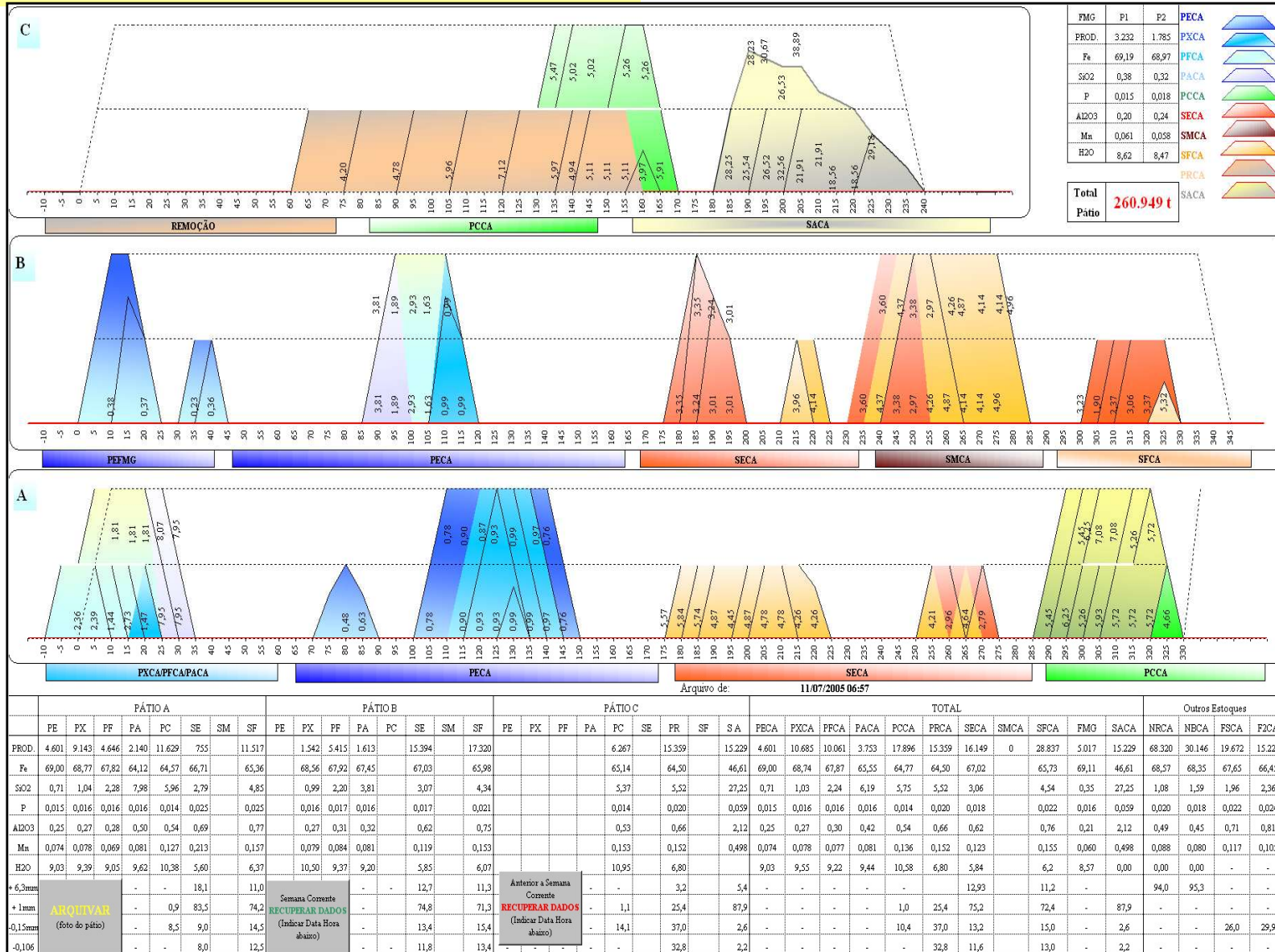
Silos de embarque



Controle de Pátio de Minérios



Programação/Simulação



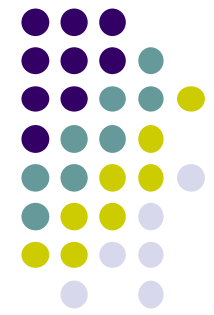
Controle de Pátio de Minérios



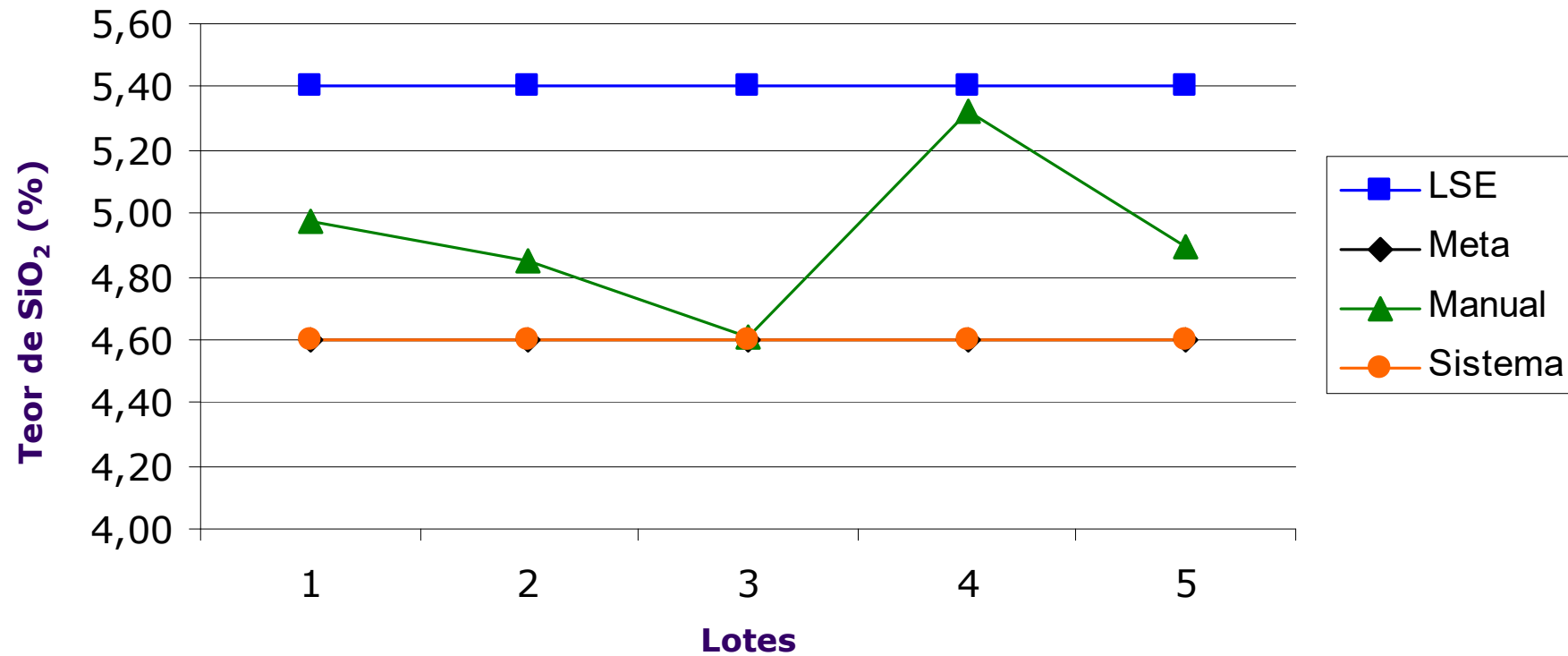
SECA	Fe	SiO ₂	P	Al ₂ O ₃	Mn	MgO	H ₂ O	+6,3	+1,0	-0,15
LSG	-	4,35	0,040	1,00	0,600	-	-	11,00	-	37,00
LSE	-	3,85	0,028	0,80	0,300	-	6,50	8,00	-	27,00
META	-	3,60	0,022	0,70	0,150	-	-	6,50	61,00	22,00
LIE	-	-	-	-	-	-	-	-	58,00	-
LIG	-	-	-	-	-	-	-	-	52,00	-
CRIT.	-	CR	CR	CR	-	-	-	-	-	CR

SFCA	Fe	SiO ₂	P	Al ₂ O ₃	Mn	MgO	H ₂ O	+6,3	+1,0	-0,15
LSG	-	5,10	0,059	1,80	-	-	7,50	-	-	44,00
LSE	-	4,50	0,043	1,40	-	-	6,50	-	-	36,00
META	-	4,20	0,035	1,20	0,170	-	6,00	-	53,00	32,00
LIE	65,00	3,70	-	-	-	-	-	-	-	-
LIG	-	2,70	-	-	-	-	-	-	-	-
CRIT.	-	CR	MI	CR	-	-	MI	-	-	CR

Controle de Pátio de Minérios



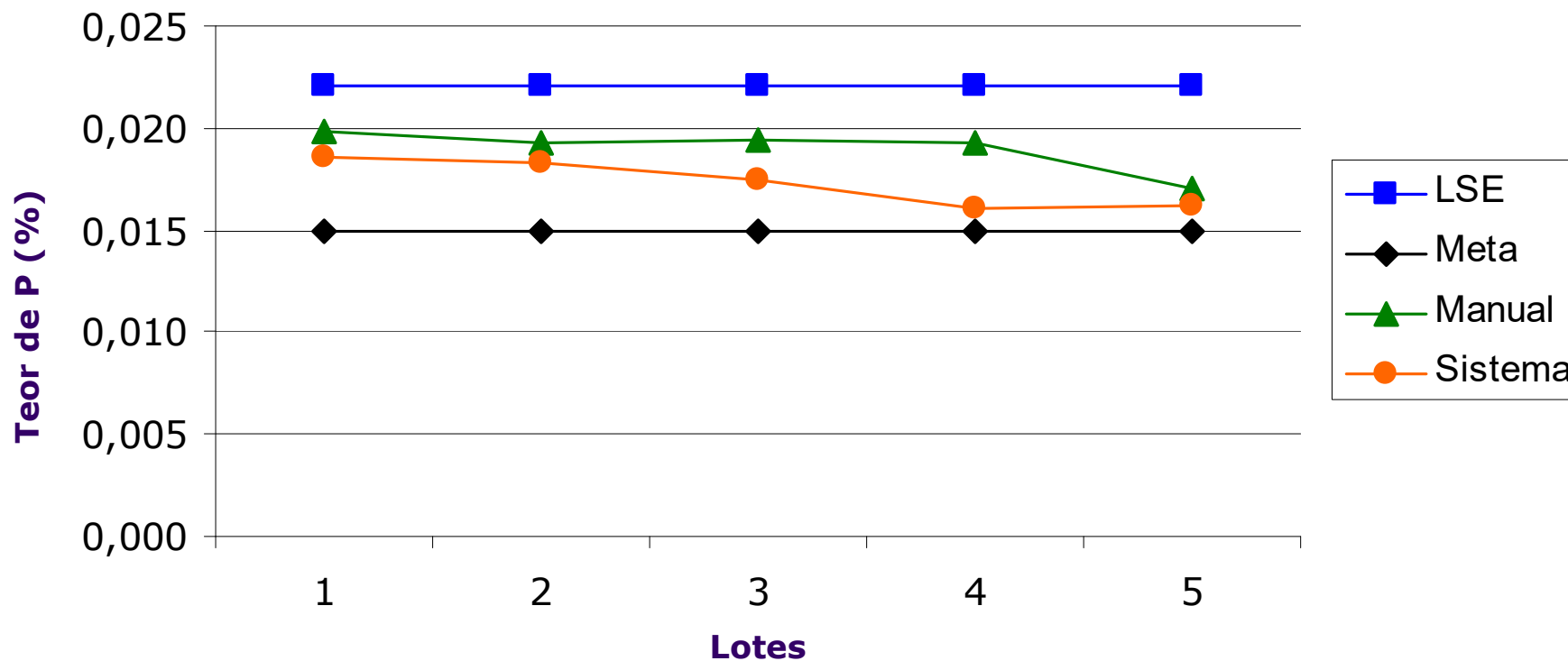
PCCA



Controle de Pátio de Minérios



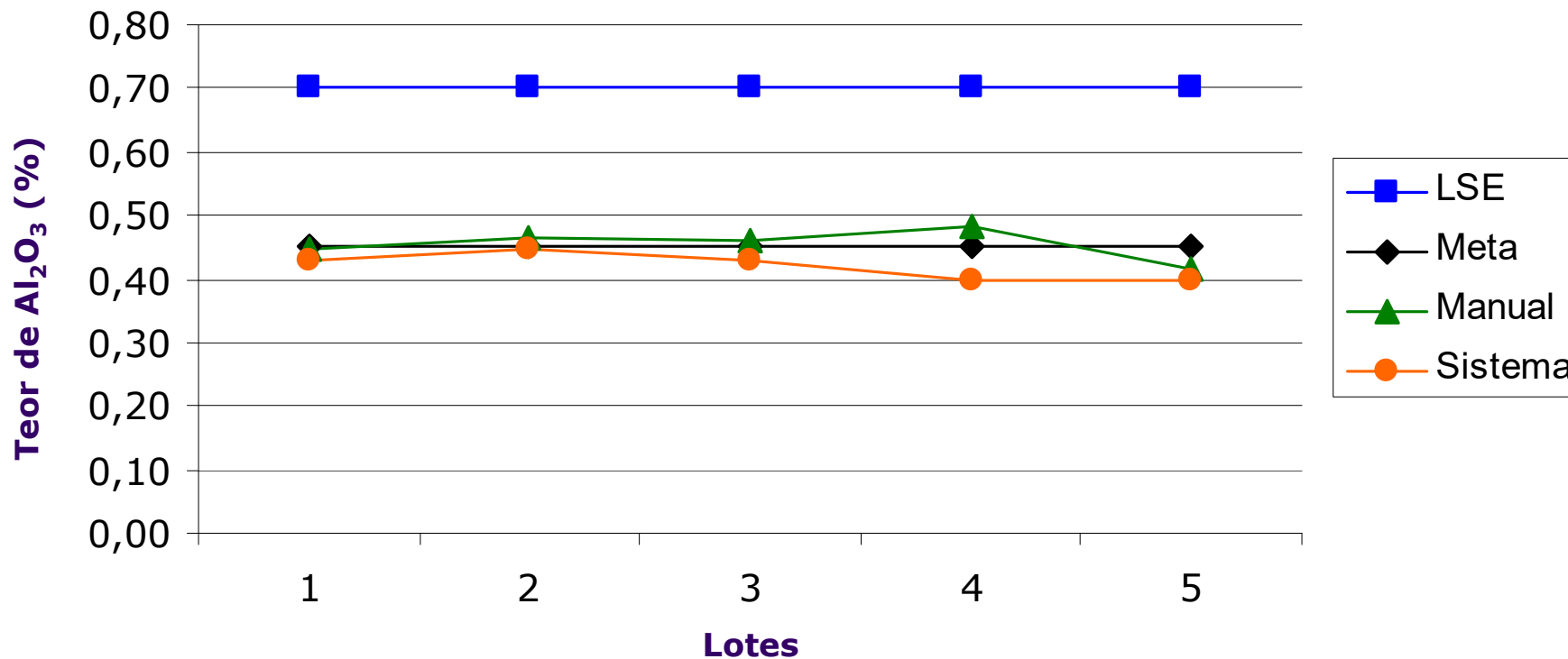
PCCA



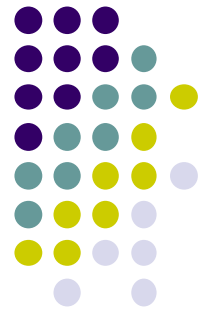
Controle de Pátio de Minérios



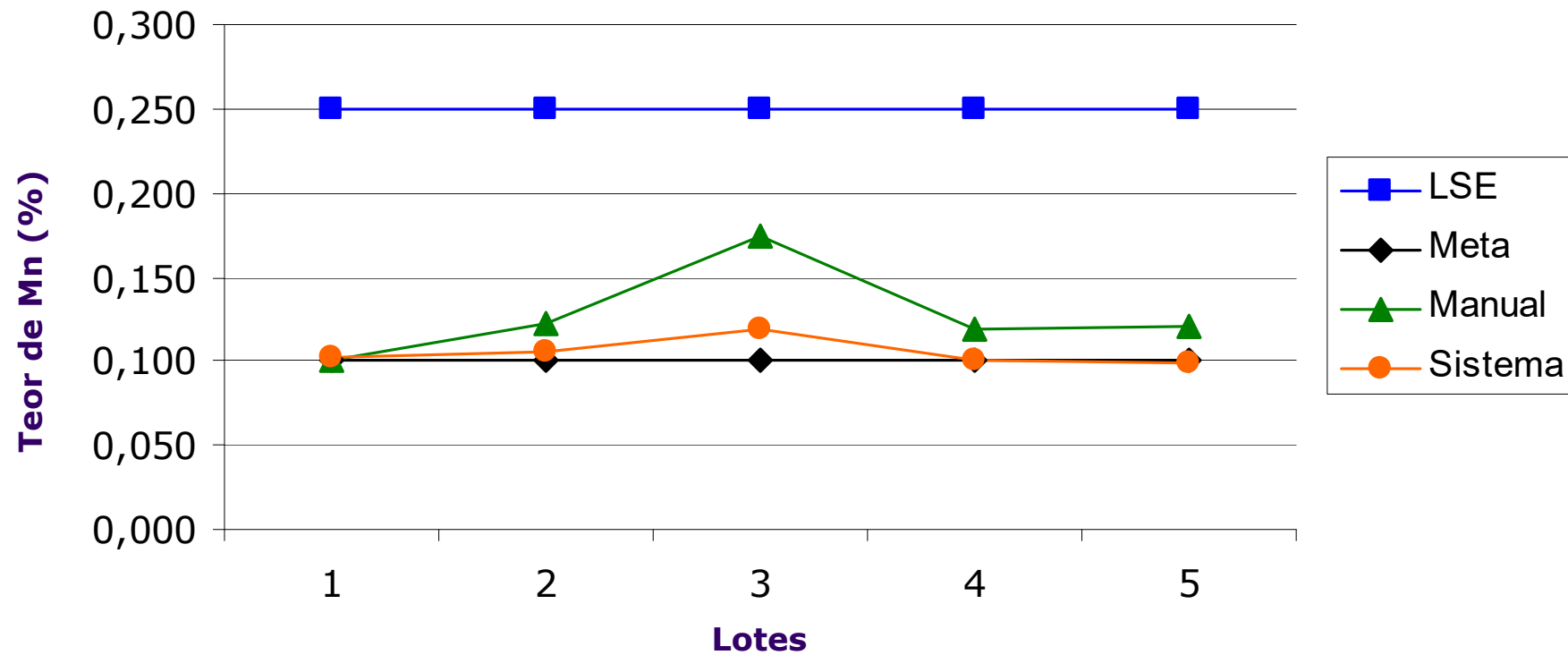
PCCA



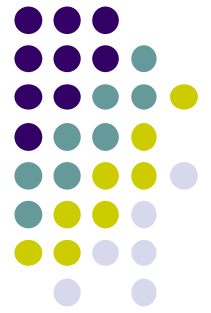
Controle de Pátio de Minérios



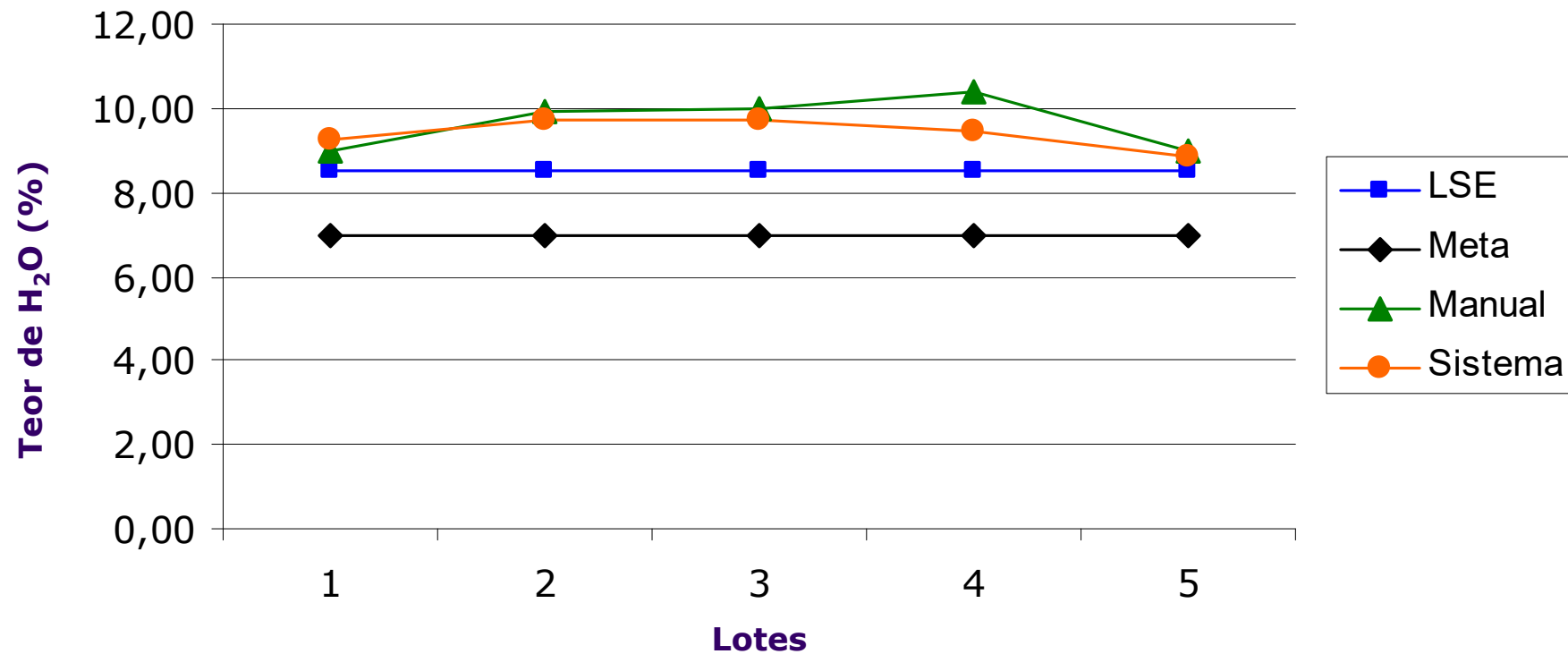
PCCA



Controle de Pátio de Minérios

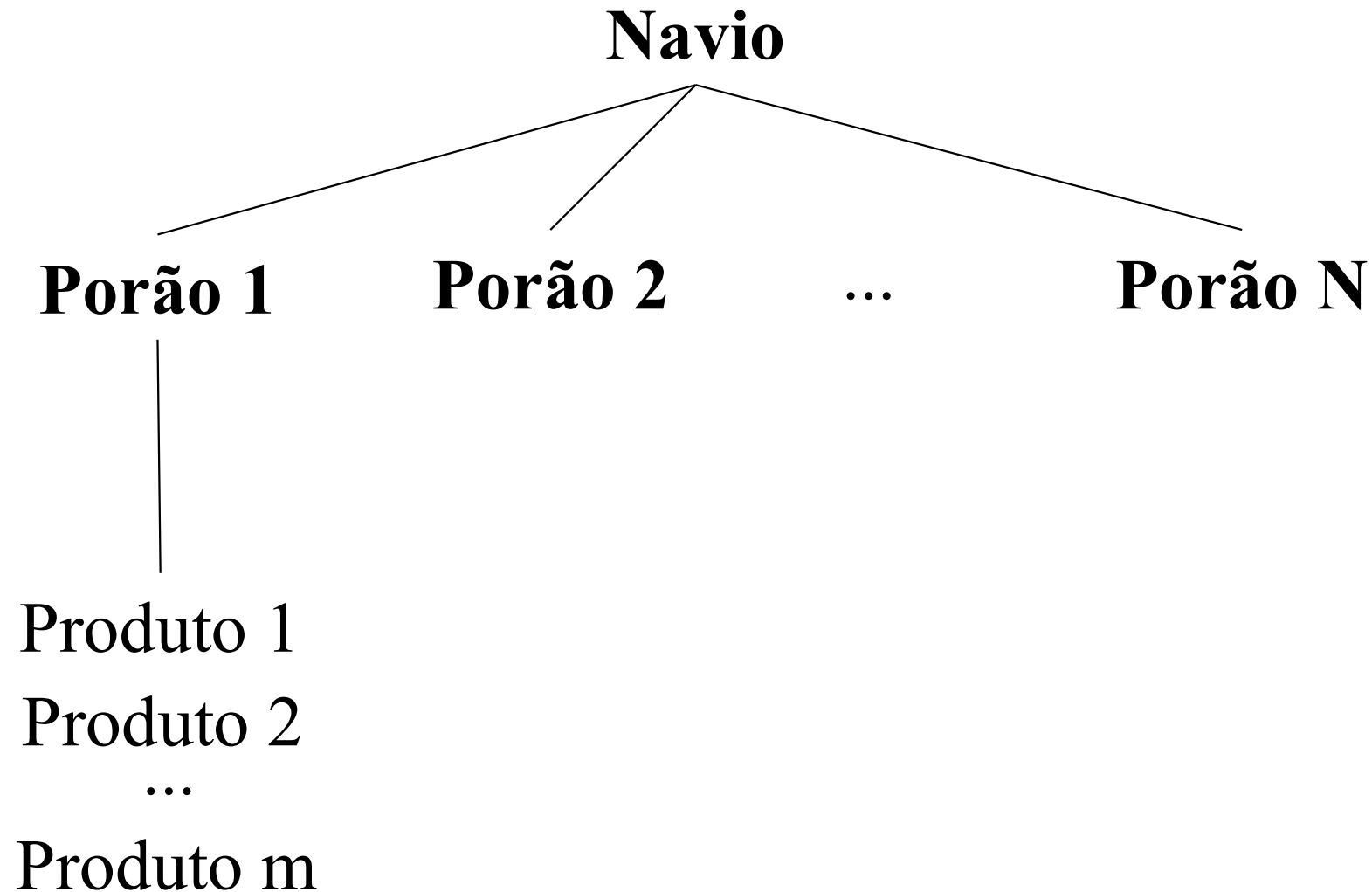
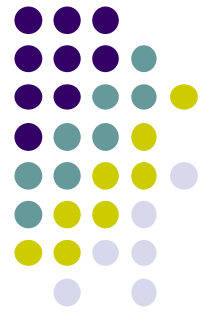


PCCA

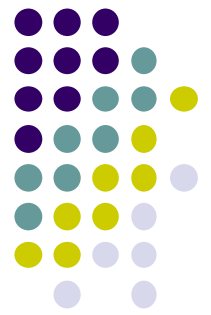


CARREGAMENTO DE PRODUTOS EM NAVIOS

Carregamento de produtos em Navios

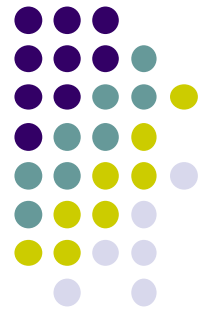


Carregamento de produtos em Navios



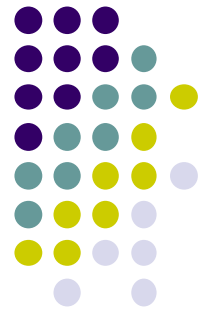
- **Turnos de 6 horas de trabalho:**
 - 7h-13h
 - 13h-19h
 - 19h-1h
 - 1h-7h
- **8 tipos de turnos:**
 - Dia útil (horários normal e noturno)
 - Sábado (horários normal e noturno)
 - Domingo (horários normal e noturno)
 - Feriado (horários normal e noturno)
- **Terno: equipe de trabalho atuando em um porão durante um turno**

Carregamento de produtos em Navios



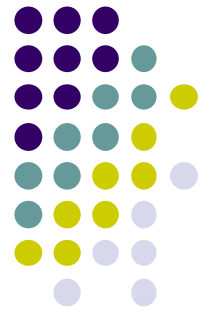
- **Existe um certo número de máquinas disponíveis para fazer o carregamento do navio: CN, CG e GB.**
- **Cada máquina possui uma produtividade diferente para cada tipo de produto.**

Carregamento de produtos em Navios



- **Produtos carregados em uma ordem preestabelecida.**
- **As equipes são remuneradas de acordo com a produção (ton.).**
- **Os custos variam de acordo com o produto carregado e o tipo do turno em que ocorre o turno.**
- **O custo total é dado pelo somatório dos custos com docas, encarregados, guincheiros, conferentes, estivadores e equipamento utilizado.**

Carregamento de produtos em Navios



- **Custo do carregamento dado pelo somatório dos custos dos ternos**
- **Carregamento concluído depois da data prevista em contrato:**
 - *Demurrage* (multa por dia de atraso)
- **Carregamento concluído antes da data prevista em contrato:**
 - Prêmio (metade da multa)
- **Objetivo é reduzir os custos com a mão-de-obra**

LAYOUT DE CIRCUITOS



Cutwidth Minimization Problem

- Encontrar um layout linear f de um grafo G tal que o número máximo de arcos que cortam uma ligação entre dois vértices consecutivos, $CW(G)$, seja minimizado:
- $CW(G) = CW_f(D) = 5$

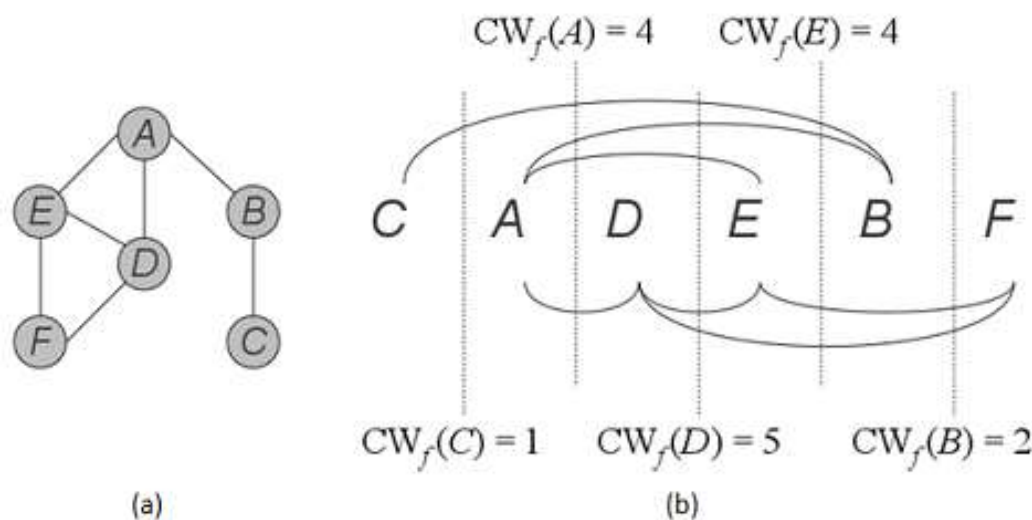
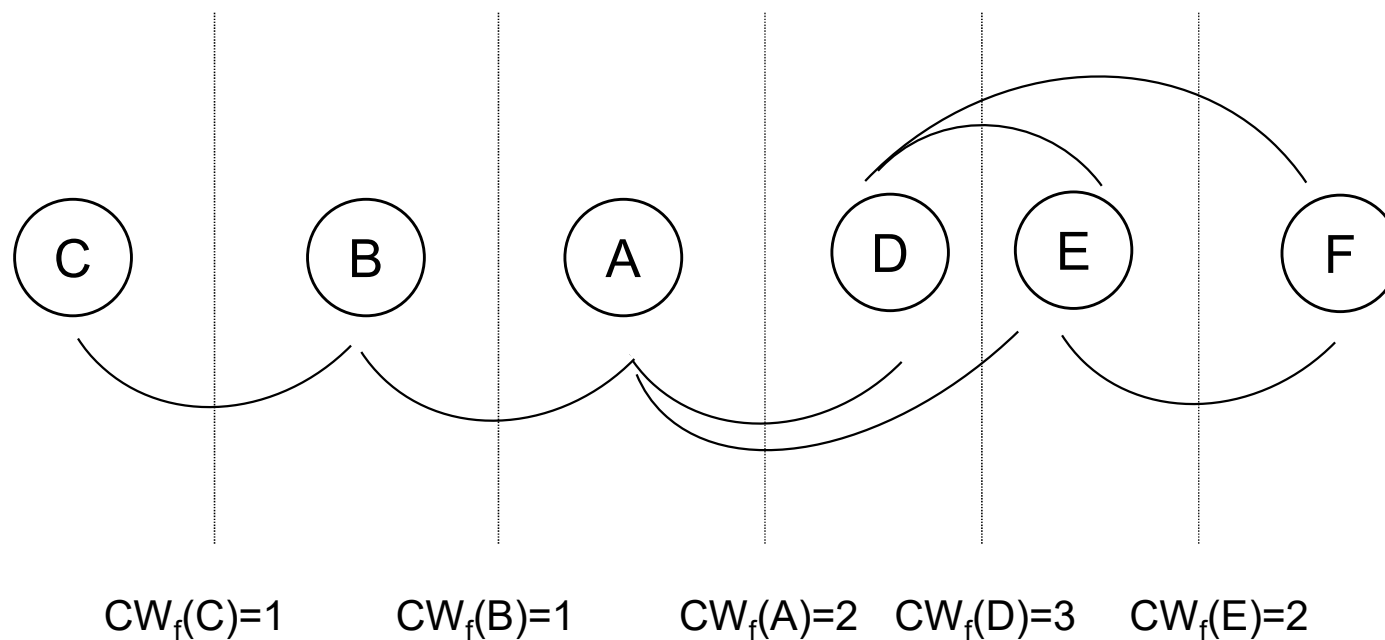
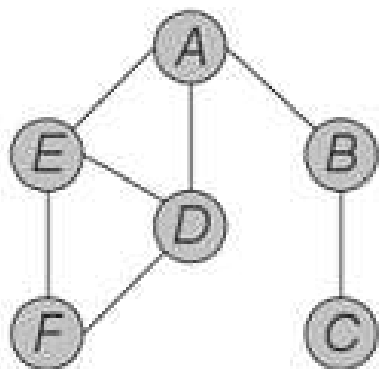


Figure 1: (a) Graph example, (b) Cutwidth of G for a labeling f .



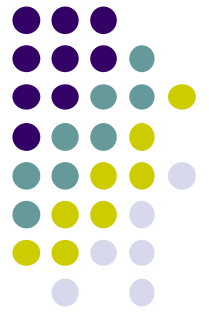
Cutwidth Minimization Problem

- Neste layout f , $CW(G) = CW_f(D) = 3$



ALOCAÇÃO DE SALAS

Problema de Alocação de Salas (*Classroom Assignment Problem*)



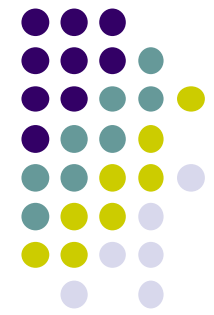
- Diz respeito à designação de salas para as aulas de uma instituição de ensino
- O horário das aulas é previamente conhecido
- O PAS é um subproblema do Problema de Programação de Horários (*timetabling*)
- Pode ser tratado de forma isolada ou de forma integrada à programação de horários



Problema de Alocação de Salas (*Classroom Assignment Problem*)

- Restrições:
 - Não pode haver sobreposição de turmas;
 - As salas têm que comportar as turmas etc.
- Objetivos:
 - Manter as aulas de uma mesma turma em uma mesma sala ao longo da semana;
 - Minimizar o fluxo de alunos mudando de sala após uma aula;
 - Sempre que possível, alocar a uma mesma sala alunos de um mesmo curso e período etc.

Problema de Alocação de Salas (Classroom Assignment Problem)

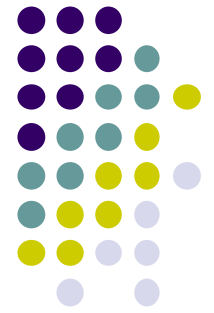


Segunda-feira													
	Sala 1 (70)	Sala 2 (60)	Sala 3 (44)	Sala 4 (55)	Sala 5 (44)	Sala 6 (53)	Sala 7 (70)	Sala 8 (60)	Sala 9 (50)	Sala 10 (50)	Sala 14 (40)	Sala 18 (50)	
07:30 - 08:20													
08:20 - 09:10			FIS120-21-	MTM131-85-T		QUI213-22-T		MTM122-9	MTM131-86-T		BEV174-21	QUI147-11-	
09:20 - 10	BEV214-11-T		FIS120-21-	MTM131-8	QUI321-11	QUI213-22-T		MTM122-9	MTM131-86-T		BEV174-21	QUI147-11-	
10:10 - 11	BEV214-11	BEV176-21	FIS514-11-	MTM131-8	QUI321-11-T		FIS132-71-	FIS629-11-	MTM122-9	MTM122-96	FIS521-11-T	MTM131-83	
11:10 - 12	BEV214-11	BEV176-21	FIS514-11-	MTM131-8	QUI321-11-T		FIS132-71-	FIS629-11-	MTM122-9	MTM122-96	FIS521-11-T	MTM131-83	
12:00 - 13:30													
13:30 - 14	QUI117-61	63	65-T	FIS131-72-	QUI701-85	FIS130-81-	MTM131-8	QUI701-87	FIS130-83-T	MTM122-9	EST210-11-T	FIS700-11-T	MTM131-82
14:20 - 15	QUI117-61	EST209-11		FIS131-72-	QUI701-85	FIS130-81-	MTM131-8	QUI701-87	FIS130-83-T	MTM122-9	EST210-11-T	FIS700-11-T	MTM131-82
15:20 - 16	MTM124-7	EST209-11		FIS628-11-	MTM122-9	FIS130-82-	FIS214-64-	FIS131-78-	MTM122-9	FIS306-11-	QUI513-11-	FIS133-64-T	FIS304-11-T
16:10 - 17	MTM124-7	EST209-11		FIS628-11-	MTM122-9	FIS130-82-	FIS214-64-	FIS131-78-	MTM122-9	FIS306-11-	QUI513-11-	FIS133-64-T	FIS304-11-T
17:10 - 18:00				MTM251-11-T		QUI270-11-T				EST202-74	MTM500-31	FIS827-11-T	MTM326-11
18:00 - 18:50				MTM251-11-T		QUI270-11	FIS701-11-T			EST202-74	MTM500-31	FIS827-11-T	MTM326-11
Intervalo													
19:00 - 19	FIS214-66-	EST022-11		FIS133-65-	MTM122-9	BEV170-11	FIS701-11-	MTM120-1	MTM124-7	BEV500-11	MTM500-32	EST302-11-	BEV277-21
19:50 - 20	FIS214-66-	EST022-11		FIS133-65-	MTM122-9	BEV170-11	FIS701-11-	MTM120-1	MTM124-7	BEV500-11	MTM500-32	EST302-11-	BEV277-21
21:00 - 21	MTM131-8	EST304-11		BEV182-21	22-T	FIS307-11-	EST018-11-T		MTM122-9	MTM146-1	BEV193-21	EST013-11-	BEV276-11-
21:50 - 22	MTM131-8	EST304-11		BEV182-21	22-T	FIS307-11-	EST018-11-T		MTM122-9	MTM146-1	BEV193-21	EST013-11-	BEV276-11-

Exemplo de solução

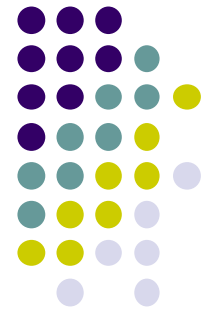
LOCALIZAÇÃO DE MAMÓGRAFOS

Problema de Localização- Alocação de Mamógrafos



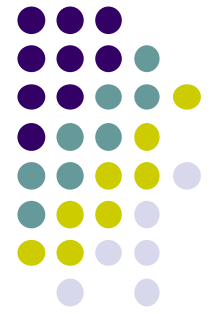
- Câncer de mama: tipo de câncer mais prevalente na população feminina mundial
- Responsável por um grande número de mortes
- Chance de cura: 95%, se o tumor for detectado nos estágios iniciais
- Exame de mamografia: principal meio de diagnóstico precoce desse mal
- Público alvo:
 - Mulheres de 40 a 49 anos: 20%
 - Mulheres de 50 a 69 anos: 58,9%

Problema de Localização-Alocação de Mamógrafos



- A distribuição de mamógrafos no Brasil é desigual (Amaral *et al.*, 2017):
 - Há regiões com excesso de equipamentos e mal localizados e
 - outras em que a quantidade existente não é suficiente para atender à demanda

Problema de Localização-Alocação de Mamógrafos



- Trata da localização de mamógrafos
- Um mamógrafo simples tem capacidade de atender a 6758 exames por ano
- As mulheres não podem (ou não deveriam) deslocar mais do que 60 km para serem atendidas
- Um mamógrafo só pode ser instalado em uma cidade com infraestrutura hospitalar
- O objetivo é maximizar a demanda a ser atendida

Problema de Localização-Alocação de Mamógrafos



➤ Dados de entrada:

- N = conjunto de cidades
- dem_j = demanda da cidade j
- cap = cap. do mamógrafo
- S_i = conj. das cidades que distam 60 km da cidade i
- $Infra_i = 1$ se a cidade i tem infraestrutura hospitalar e 0, caso contrário
- p = número de mamógrafos a serem instalados

➤ Variáveis de decisão:

- $x_{ij} = 1$ se a cidade j for atendida por algum mamógrafo instalado na cidade i
- y_i = número de mamógrafos a serem instalados na cidade i
- $z_i = 1$ se na cidade i for instalado algum mamógrafo

$$\begin{aligned}
 & \max && \sum_{i \in N} \sum_{j \in S_i} dem_j \cdot x_{ij} \\
 & \text{s. t.} && \sum_{i \in S_j} x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in N \\
 & && \sum_{i \in N} y_i \leq p \\
 & && \sum_{j \in S_i} dem_j \cdot x_{ij} \leq cap \cdot y_i \quad \forall i \in N \\
 & && z_i \geq y_i/p \quad \forall i \in N \\
 & && z_i \geq x_{ij} \quad \forall i, j \in N \\
 & && x_{ii} = z_i \quad \forall i \in N \\
 & && y_i = 0 \quad \forall i \in N \mid infra_i \neq 1 \\
 & && x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N \\
 & && y_i \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i \in N \\
 & && z_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N
 \end{aligned}$$

Problema de Localização- Alocação de Mamógrafos



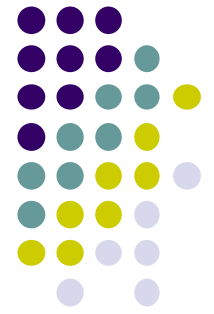
- Estudo de caso nas regiões de saúde num raio de 100 km de Ouro Preto:
 - 142 cidades em 12 regiões de saúde
 - Há 55 mamógrafos

Problema de Localização- Alocação de Mamógrafos

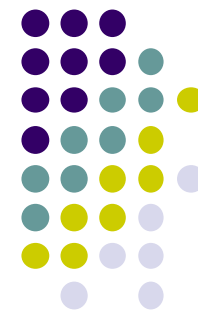


- Estudo de caso nas regiões de saúde num raio de 100 km de Ouro Preto:
 - 142 cidades em 12 regiões de saúde
 - Há 55 mamógrafos, mas que não atendem a toda a população feminina por estarem mal localizados

Problema de Localização- Alocação de Mamógrafos



- Estudo de caso nas regiões de saúde num raio de 100 km de Ouro Preto:
 - 142 cidades em 12 regiões de saúde
 - Há 55 mamógrafos, mas que não atendem a toda a população feminina por estarem mal localizados
 - Apenas 46 seriam necessários



Problema de Localização- Alocação de Mamógrafos - MG

- Demanda projetada para 2020:
 - 1.727.487 exames (IBGE)
- Quantidade existente de mamógrafos:
 - 326 (DATASUS)
- Capacidade anual de exames de um mamógrafo:
 - 5069 (Parâmetro estabelecido em 2015). Atualmente é 6758
- Distância entre as localidades:
 - Google maps (deslocamento por carro)
- Cobertura atual:
 - 1.151.092 (67% de cobertura)

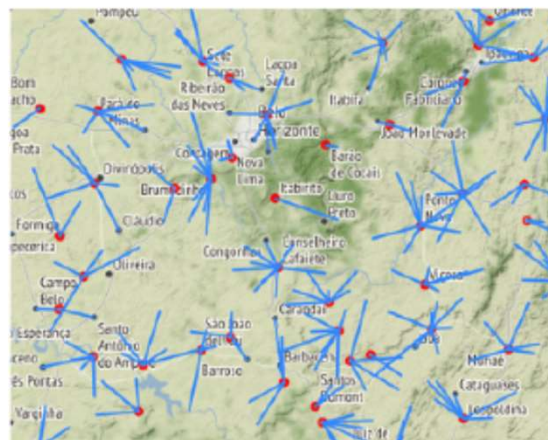
Problema de Localização- Alocação de Mamógrafos: MG



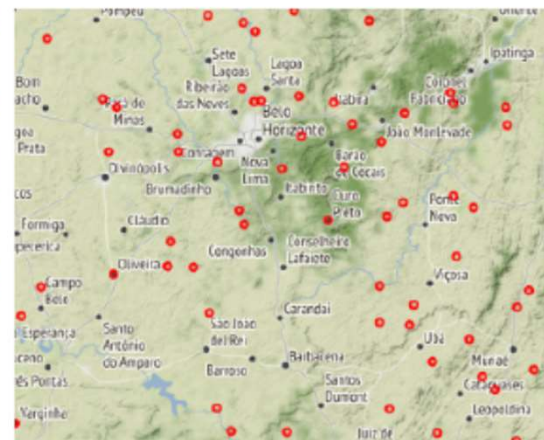


Problema de Localização- Alocação de Mamógrafos: MG

- Com microrregião:



Locais cobertos



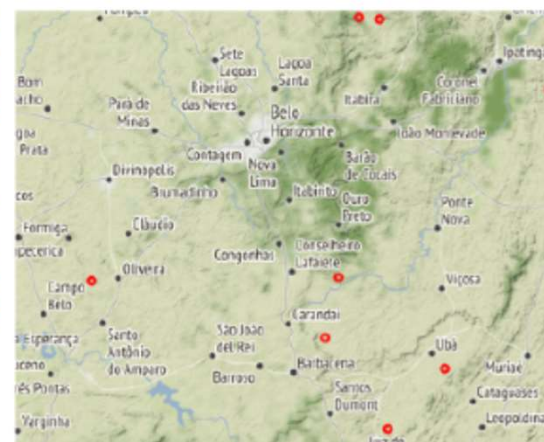
Sem cobertura

X

- Sem microrregião:



Locais cobertos

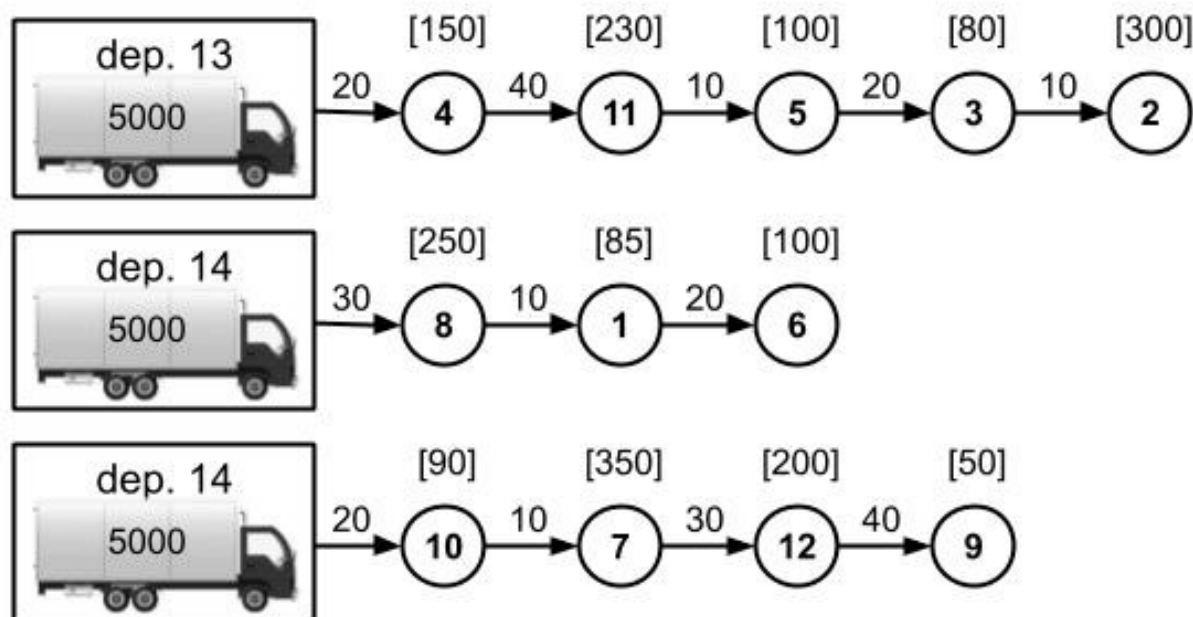


Sem cobertura

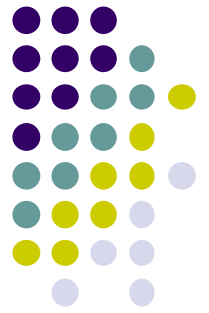


Problema de Localização-Alocação de Mamógrafos: MG

- Ideia para aumentar a cobertura de exames:
 - Adquirir mamógrafos até se alcançar uma taxa mínima de utilização, que justifique economicamente operá-los
 - Cidades não atendidas por mamógrafos fixos devem ser atendidas por unidades móveis de mamografia (MMU, *Mobile Mammography Unit*)

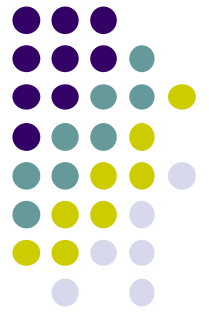


Diferenças entre as metodologias usadas para resolver alguns dos problemas anteriores



- Problema do controle do pátio de minérios: resolvido de forma “exata”:
 - Fácil encontrar a solução ótima;
- Problema de alocação de salas / carregamento de produtos em navios:
 - Resolvido de forma “aproximada”
 - A solução final não é necessariamente ótima
- Problema de roteamento de veículos
 - Em geral, pode ser resolvido rapidamente quando há “poucos” clientes para serem atendidos
 - À medida que o número de clientes aumenta, fica mais difícil encontrar a solução ótima em tempo de tomada de decisão

Modelos de Otimização



- Programação matemática:
 - Fundamentados na matemática
 - Métodos exatos: garantem a geração da solução ótima
 - Método mais difundido: Programação Linear (PL)
 - Desvantagens:
 - Modelagem mais complexa
 - Em problemas combinatórios, podem exigir um tempo proibitivo para encontrar a solução ótima ou mesmo para encontrar uma solução viável
- Heurísticos:
 - Fundamentados na Inteligência Artificial. Inspirados na forma humana de resolver o problema, em processos físicos, biológicos, comportamentais, etc.
 - Não garantem a otimalidade da solução final
 - Vantagens:
 - De fácil modelagem
 - Boas soluções podem ser obtidas rapidamente
- Híbridos:
 - Programação Matemática + Heurísticas (*Matheuristics*)



Problema da Mochila

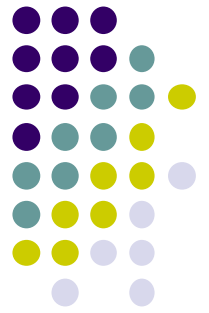
- Imagine que os alunos da disciplina sejam contemplados com um cruzeiro marítimo após o término do curso, patrocinado por uma grande empresa, que deseja aliar sua marca aos universitários
- Em alto mar o navio começa a afundar ...
- Só existe um barco salva-vidas, que, no entanto, só pode levar **c** quilos



Problema da Mochila

- Cada pessoa no navio tem um certo peso p_i
- Cada pessoa i proporciona um benefício b_i se for levada para o barco salva-vidas
- O problema consiste em escolher as pessoas que trarão o maior benefício possível sem ultrapassar a capacidade do barco

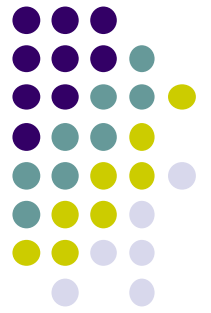
Problema da Mochila



Pessoa	Peso (Kg)	Benefício

✓ Capacidade do barco: 220 Kg.

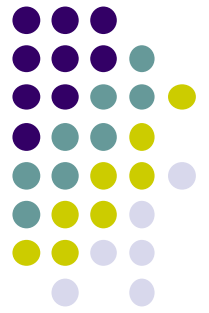
Problema da Mochila



Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
cruzeirense	140	0

✓ Capacidade do barco: 220 Kg.

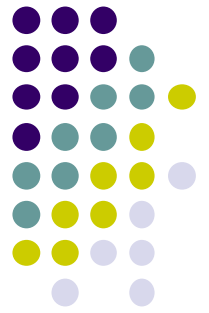
Problema da Mochila



Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
cruzeirense	140	0
Recém-graduado	60	1

✓ Capacidade do barco: 220 Kg.

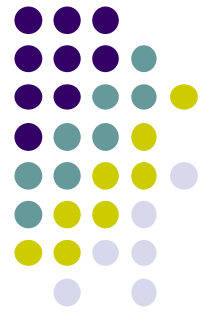
Problema da Mochila



Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
cruzeirense	140	0
Recém-graduado	60	1
ATLETICANO	110	5

✓ Capacidade do barco: 220 Kg.

Problema da Mochila



Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
cruzeirense	140	0
Recém-graduado	60	1
ATLETICANO	110	5
Professor de geografia	80	4

✓ Capacidade do barco: 220 Kg.

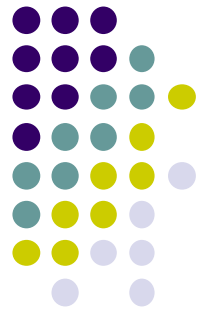


Problema da Mochila

Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
cruzeirense	140	0
Recém-graduado	60	1
ATLETICANO	110	5
Professor de geografia	80	4
Doutorando	75	4

✓ Capacidade do barco: 220 Kg.

Problema da Mochila



Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
cruzeirense	140	0
Recém-graduado	60	1
ATLETICANO	110	5
Professor de geografia	80	4
Doutorando	75	4
Mestrando	50	2

✓ Capacidade do barco: 220 Kg.



Problema da Mochila

Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
cruzeirense	140	0
Recém-graduado	60	1
ATLETICANO	110	5
Professor de geografia	80	4
Doutorando	75	4
Mestrando	50	2
Marcone	60	10

✓ Capacidade do barco: 220 Kg.



Problema da Mochila

Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
cruzeirense	140	0
Recém-graduado	60	1
ATLETICANO	110	5
Professor de geografia	80	4
Doutorando	75	4
Mestrando	50	2
Marcone	60	10

- ✓ Capacidade do barco: 220 Kg.
- ✓ Solução 1: M + A + Me (220 Kg)

Benefício: 17



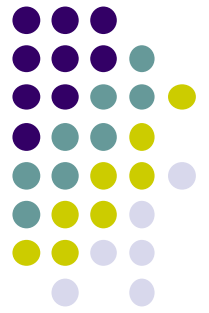
Problema da Mochila

Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
cruzeirense	140	0
Recém-graduado	60	1
ATLETICANO	110	5
Professor de geografia	80	4
Doutorando	75	4
Mestrando	50	2
Marcone	60	10

- ✓ Capacidade do barco: **220 Kg.**
- ✓ Solução 1: M + A + Me (220 Kg)
- ✓ Solução 2: M + D + PG (215 Kg)

Benefício: 17
Benefício: 18

Problema da Mochila: complexidade



- Problema NP-difícil
 - Ainda não existem algoritmos que o resolva em tempo polinomial
 - Podem requerer tempos de processamento proibitivos para encontrar a solução ótima
- Para n pessoas há 2^n configurações possíveis
- Exemplo: Para $n = 50$ há $2^{50} \cong 10^{15}$ soluções para serem testadas
- Um computador que realiza uma avaliação em 10^{-8} segundos gastaria cerca de 130 dias para encontrar a melhor solução por enumeração completa!
- Conclusão: o barco afundaria antes que fosse tomada a decisão de quem seriam os escolhidos

Problema da Mochila: observações



- O que torna um problema difícil de ser resolvido na otimalidade não é o número de possíveis soluções e, sim, o fato de ele pertencer à classe NP-difícil
- Instâncias “pequenas” do problema da mochila podem ser resolvidas na otimalidade por otimizadores (*solvers*), tais como Gurobi, CPLEX, LINGO, etc.
- Instâncias “grandes” são, em geral, resolvidas por métodos heurísticos