

# Heurísticas Computacionais

---

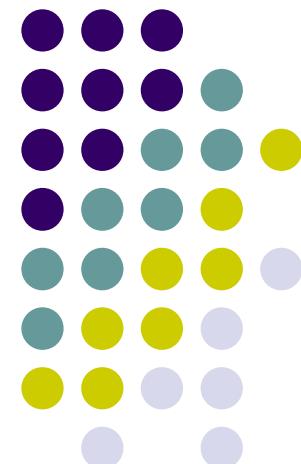
Marcone Jamilson Freitas Souza<sup>1,2,3</sup>

Departamento de Computação

<sup>1</sup> Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação  
Universidade Federal de Ouro Preto

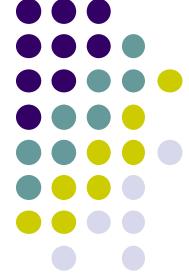
<sup>2</sup> Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e  
Computacional / CEFET-MG

<sup>3</sup> Programa de Pós-graduação em Instrumentação, Controle  
e Automação de Processos em Mineração / ITV/UFOP



[www.decom.ufop.br/prof/marcone](http://www.decom.ufop.br/prof/marcone)

E-mail: [marcone@ufop.edu.br](mailto:marcone@ufop.edu.br)



# Ementa

- Introdução
  - Motivação
  - Conceitos básicos
- Heurísticas clássicas
  - Heurísticas construtivas
  - Heurísticas de refinamento
    - Best Improvement
    - First Improvement
    - Random Descent
- Metaheurísticas
  - *Simulated Annealing*
  - *Variable Neighborhood Search (VNS)*
  - *Iterated Local Search (ILS)*
  - *Busca Tabu*
  - *GRASP*
  - *Late Acceptance Hill-Climbing (LAHC)*
  - Algoritmos Genéticos
  - Algoritmos Meméticos
  - Biased Random Key Genetic Algorithm (BRKGA)
  - Scatter Search
  - Colônia de Formigas
  - Otimização por Nuvem de Partículas
- Aplicações de técnicas de otimização a processos produtivos



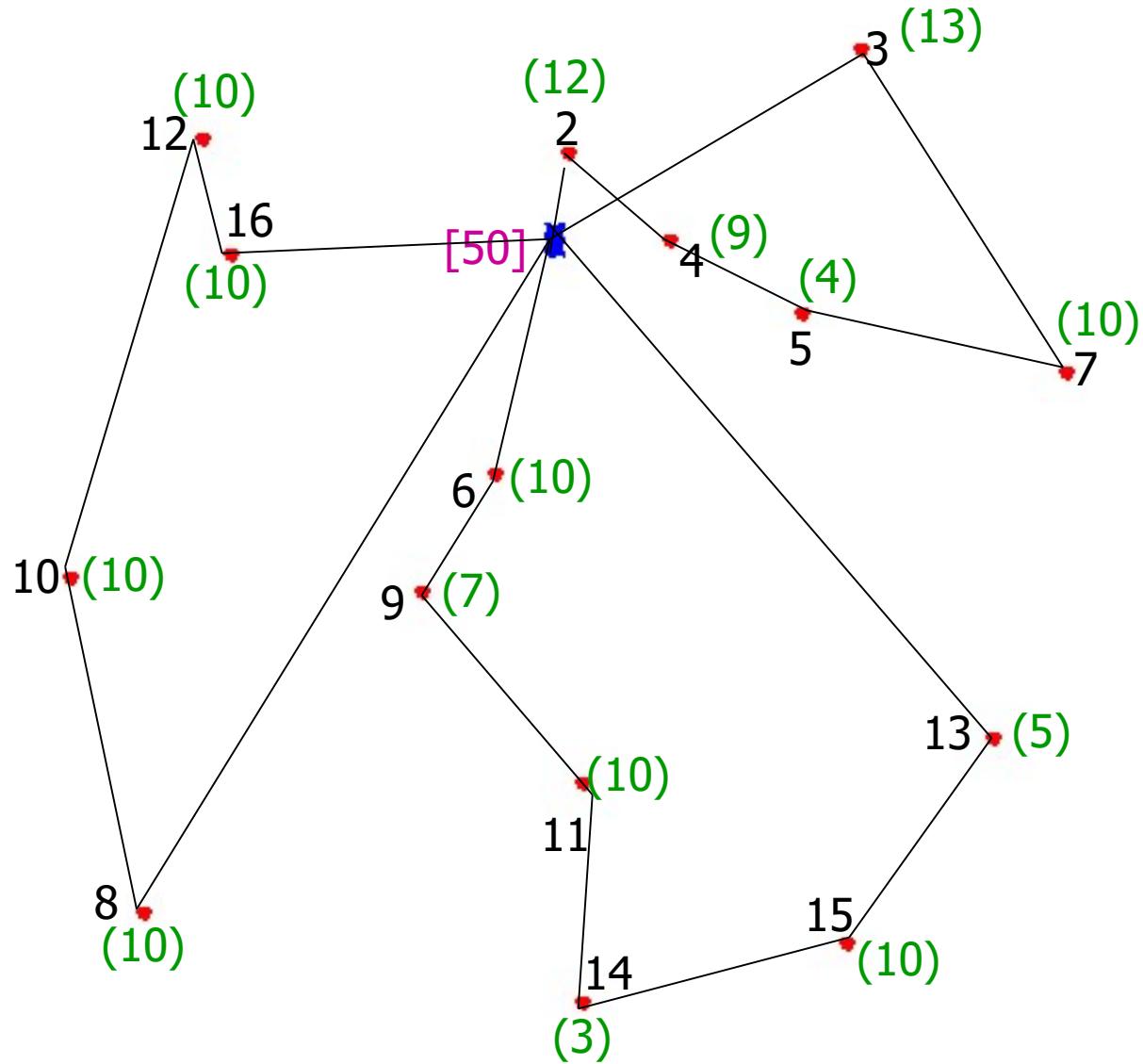
# Introdução

- Heurísticas
  - Métodos para resolver problemas “complexos” de otimização
- Otimização:
  - Área da Pesquisa Operacional que utiliza o método científico para apoiar a tomada de decisões, procurando determinar como melhor projetar e operar um sistema, usualmente sob condições que requerem a alocação de recursos escassos.
  - Trabalha com modelos determinísticos
  - As informações relevantes são assumidas como conhecidas (sem incertezas)
- Aplicações típicas:
  - Planejamento da produção
  - Roteamento de veículos
  - Escala de pessoal

# ROTEAMENTO DE VEÍCULOS

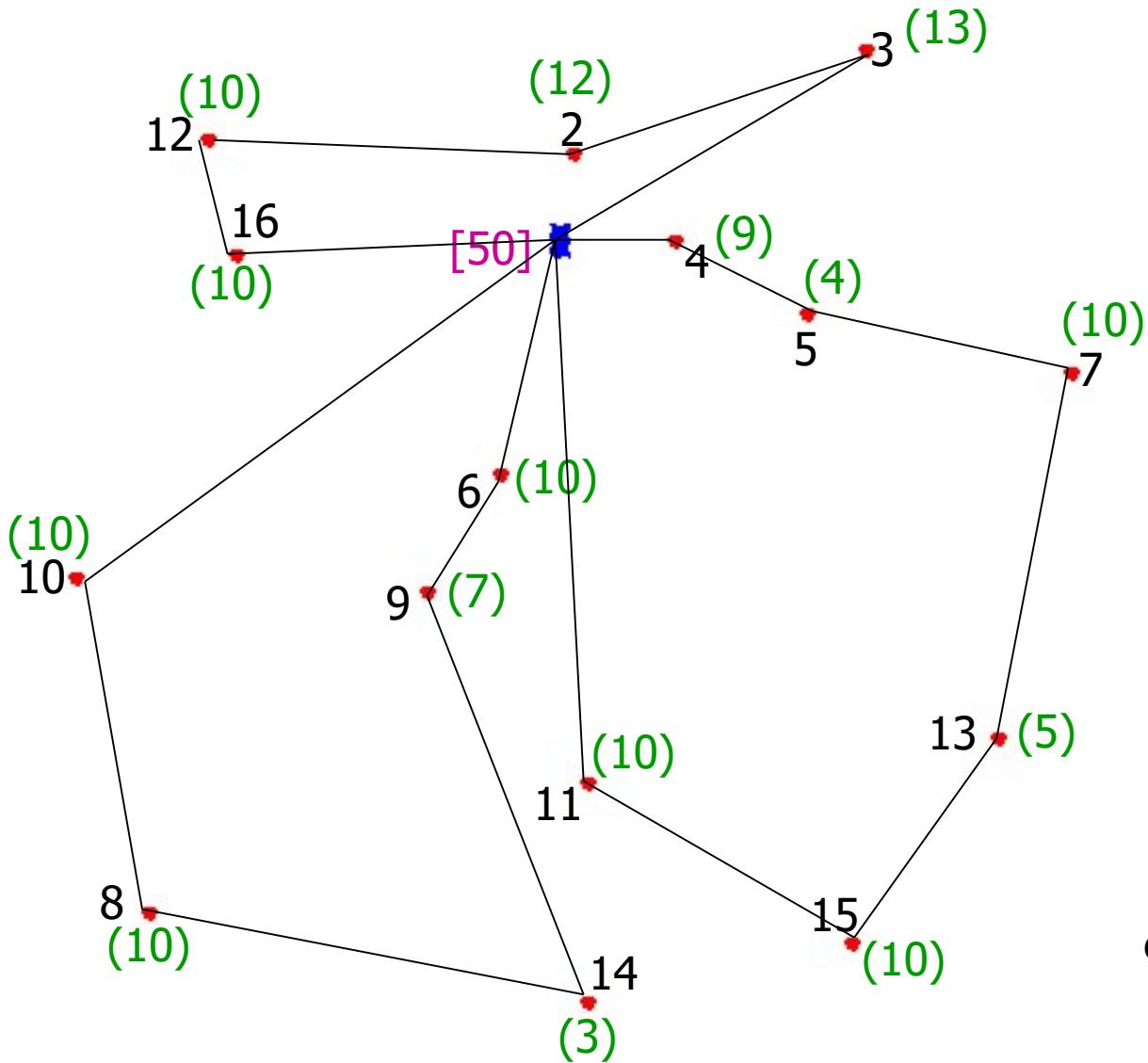


# Problema de Roteamento de Veículos (*Vehicle Routing Problem*)





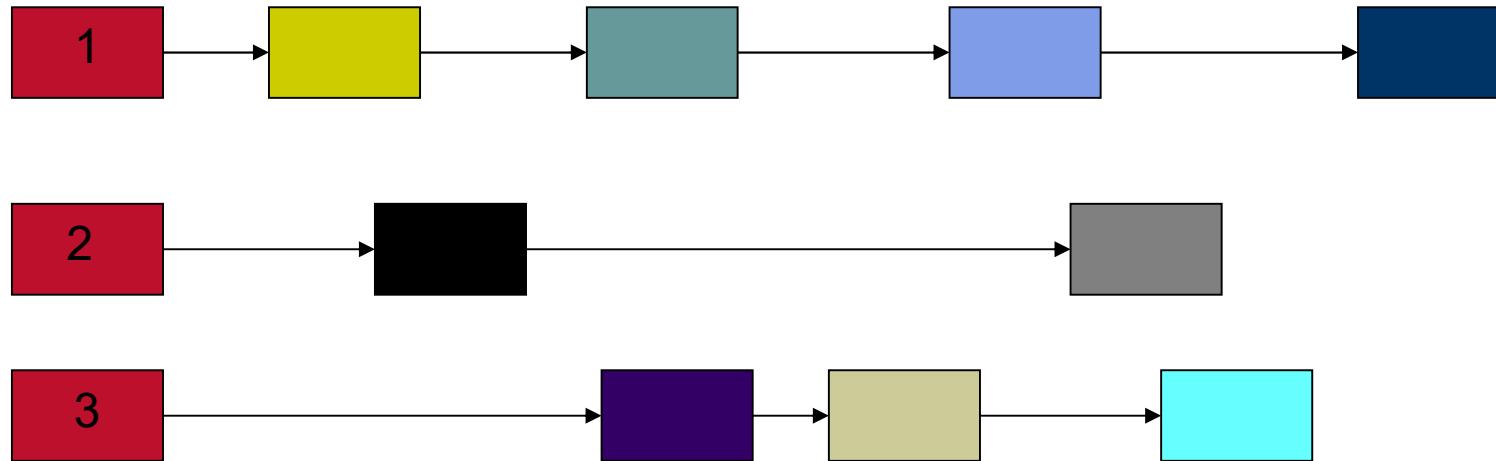
# Problema de Roteamento de Veículos (*Vehicle Routing Problem*)



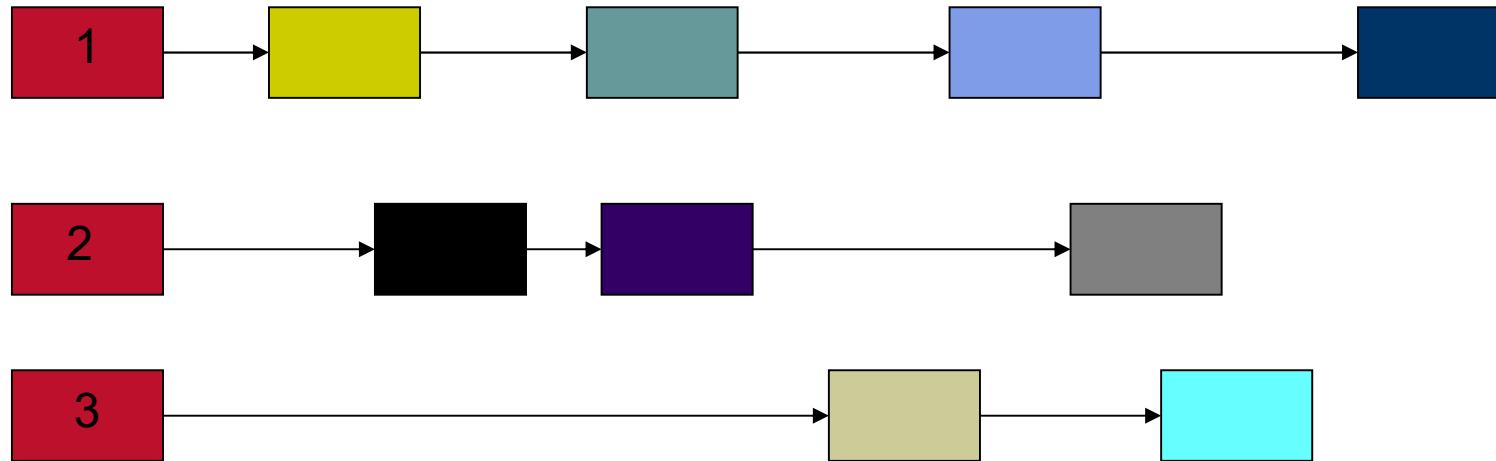
Dentre todas as possíveis roteirizações, determine aquela que minimiza a distância total percorrida<sup>6</sup>

# CREW SCHEDULING

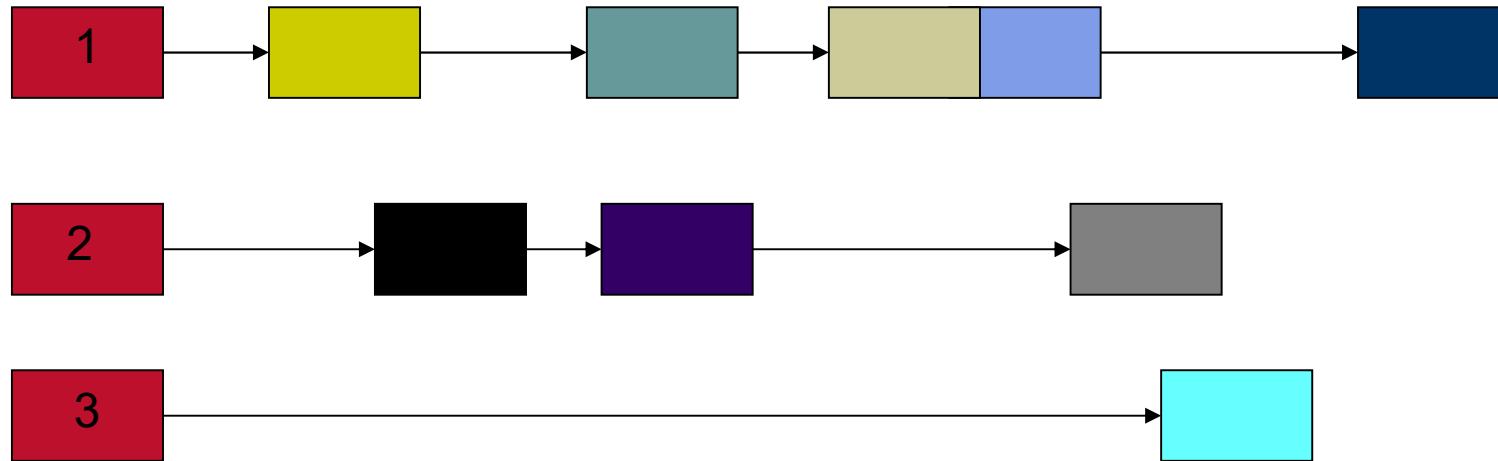
# Escala de Motoristas (*Crew Scheduling*)



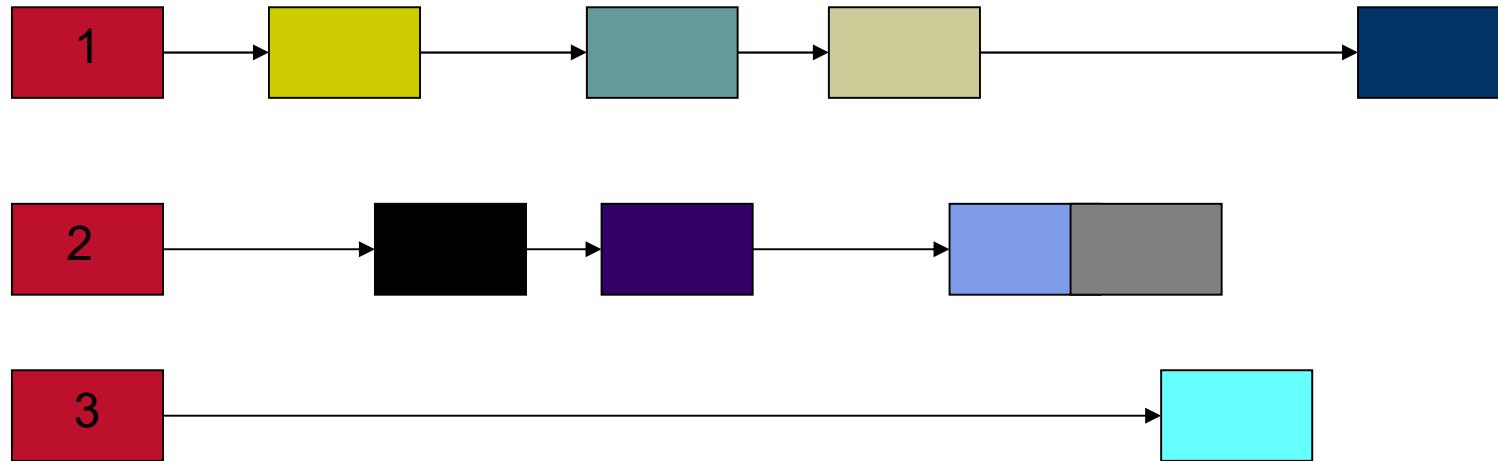
# Escala de Motoristas (*Crew Scheduling*)



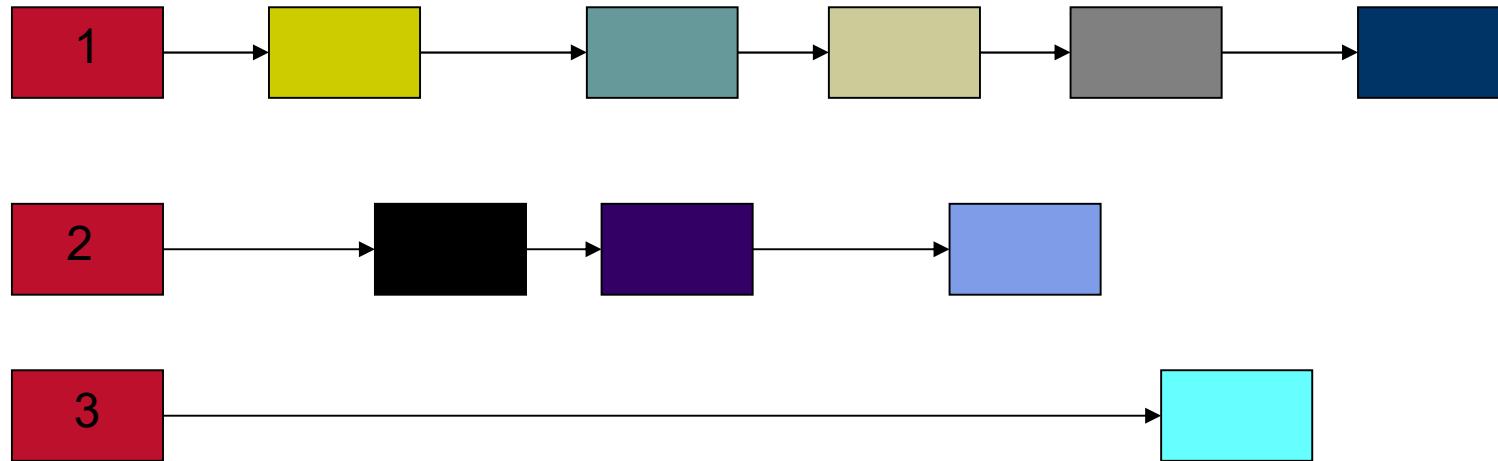
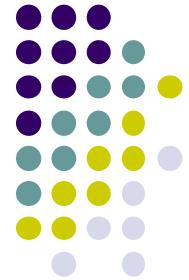
# Escala de Motoristas (*Crew Scheduling*)



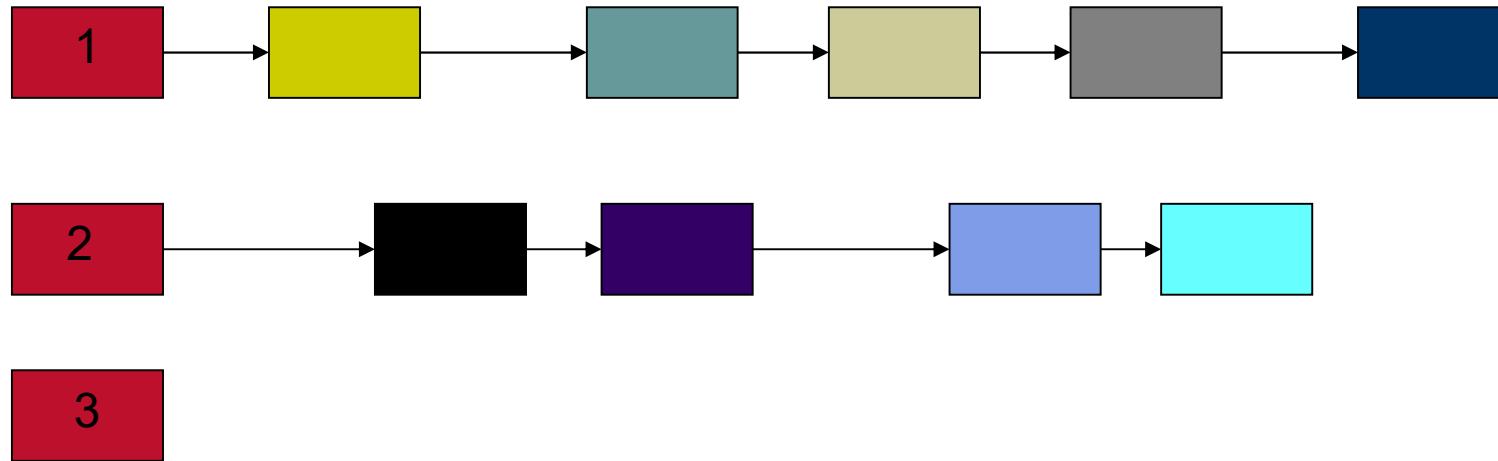
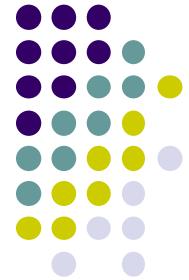
# Escala de Motoristas (*Crew Scheduling*)



# Escala de Motoristas (*Crew Scheduling*)



# Escala de Motoristas (*Crew Scheduling*)



Redução de uma tripulação!

# CONTROLE DE PÁTIO DE MINÉRIOS

# Controle de Pátio de Minérios



- Aplicação na mina Cauê, Itabira (MG), da CVRD
- 3 pátios de estocagem de minérios
- Minérios empilhados em balizas
- Pilhas formadas por subprodutos com composição química e granulométrica diferentes
- Objetivo é compor um lote de vagões ( $\pm 80$ ), atendendo às metas de qualidade e produção de um dado produto
- Exemplos de algumas restrições operacionais:
  - Retomar uma pilha toda sempre que possível
  - Concentrar retomada
  - Retomar minério da esquerda para a direita e de cima para baixo

# Controle de Pátio de Minérios



*Pátio de Estocagem Cauê*



# Controle de Pátio de Minérios

***Equipamentos de empilhamento e recuperação***



Recuperadora (Bucket Wheel)



Recuperadora Tambor (Drum)



Empilhadeira (Stacker)

# Controle de Pátio de Minérios



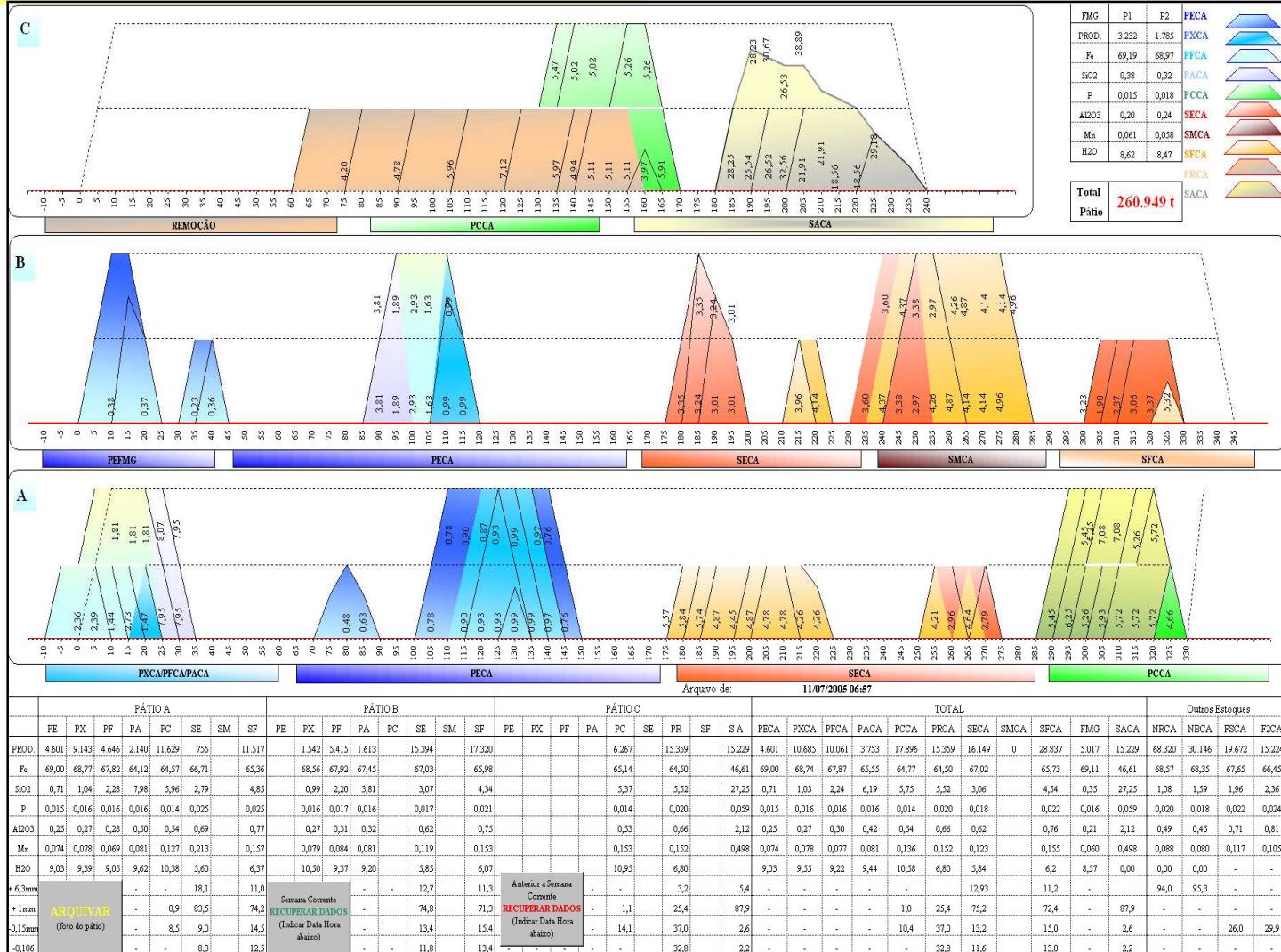
## *Silos de embarque*



# Controle de Pátio de Minérios



## Programação/Simulação



# Controle de Pátio de Minérios

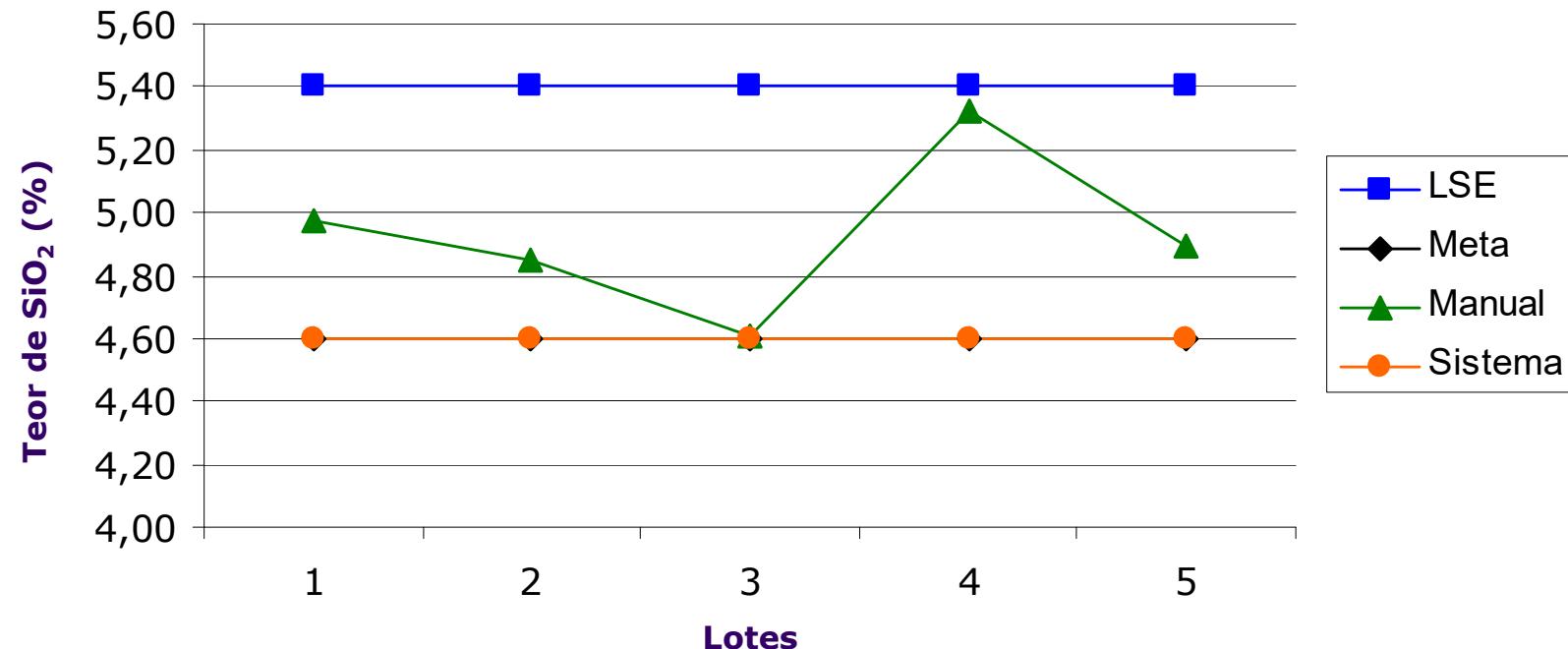


SECA	Fe	SiO <sub>2</sub>	P	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Mn	MgO	H2O	+6,3	+1,0	-0,15
LSG	-	4,35	0,040	1,00	0,600	-	-	11,00	-	37,00
	-	3,85	0,028	0,80	0,300	-	6,50	8,00	-	27,00
	-	3,60	0,022	0,70	0,150	-	-	6,50	61,00	22,00
	-	-	-	-	-	-	-	-	58,00	-
	-	-	-	-	-	-	-	-	52,00	-
CRIT.	-	CR	CR	CR	-	-	-	-	-	CR

SFCA	Fe	SiO <sub>2</sub>	P	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Mn	MgO	H2O	+6,3	+1,0	-0,15
LSG	-	5,10	0,059	1,80	-	-	7,50	-	-	44,00
	-	4,50	0,043	1,40	-	-	6,50	-	-	36,00
	-	4,20	0,035	1,20	0,170	-	6,00	-	53,00	32,00
	65,00	3,70	-	-	-	-	-	-	-	-
	-	2,70	-	-	-	-	-	-	-	-
CRIT.	-	CR	MI	CR	-	-	MI	-	-	CR

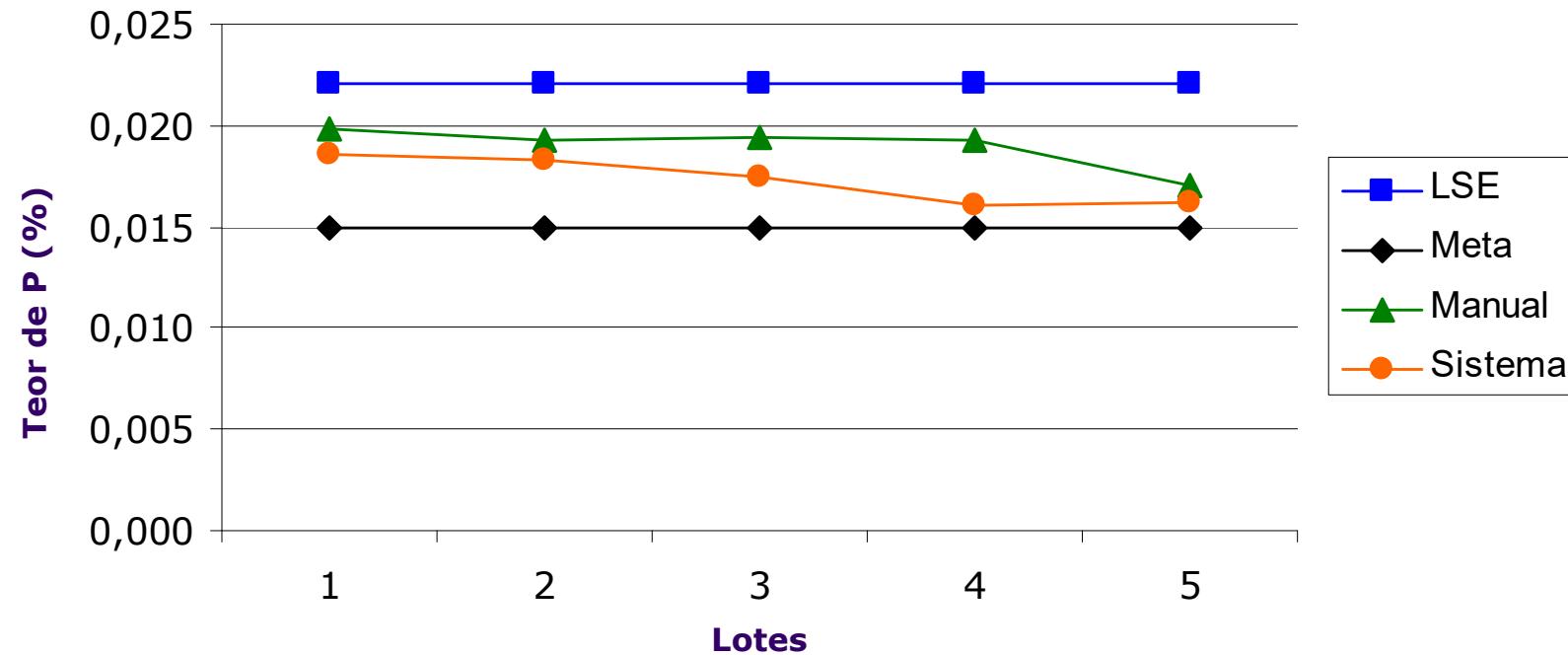
# Controle de Pátio de Minérios

PCCA



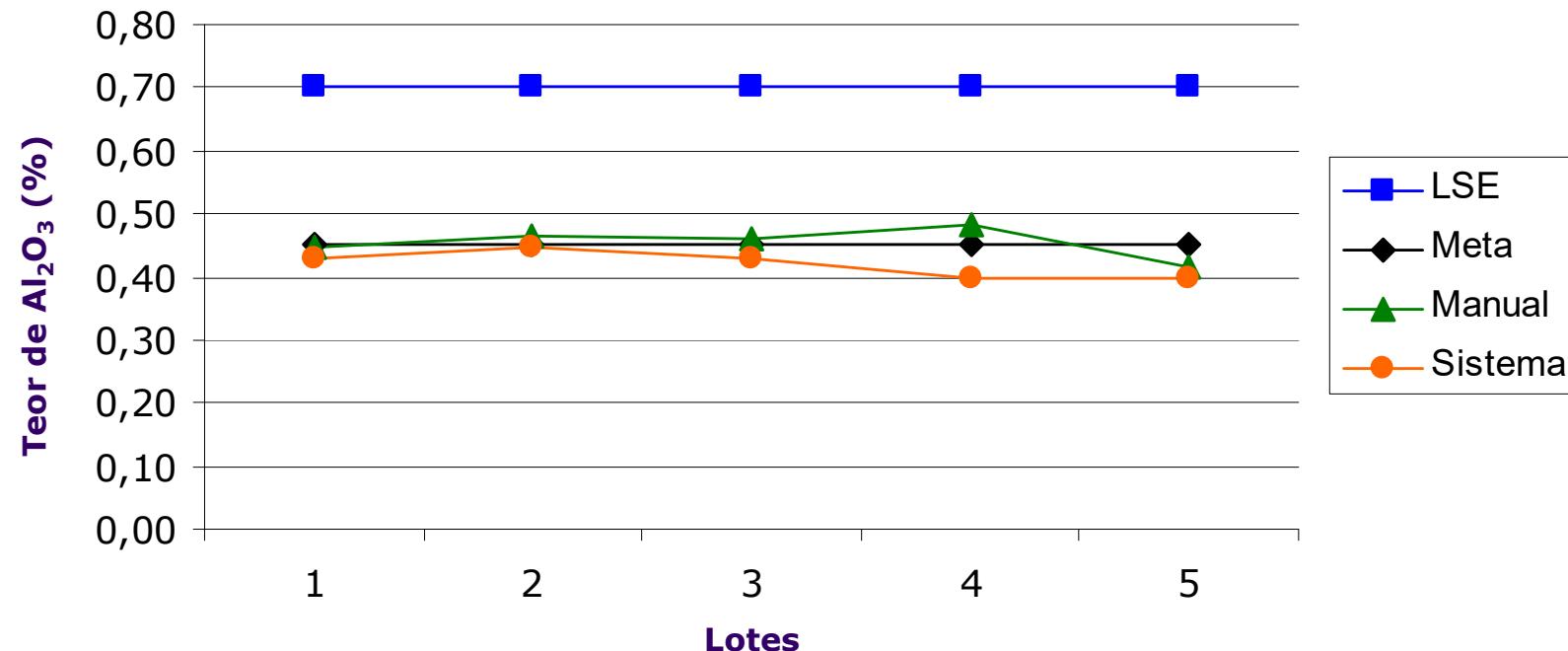
# Controle de Pátio de Minérios

**PCCA**



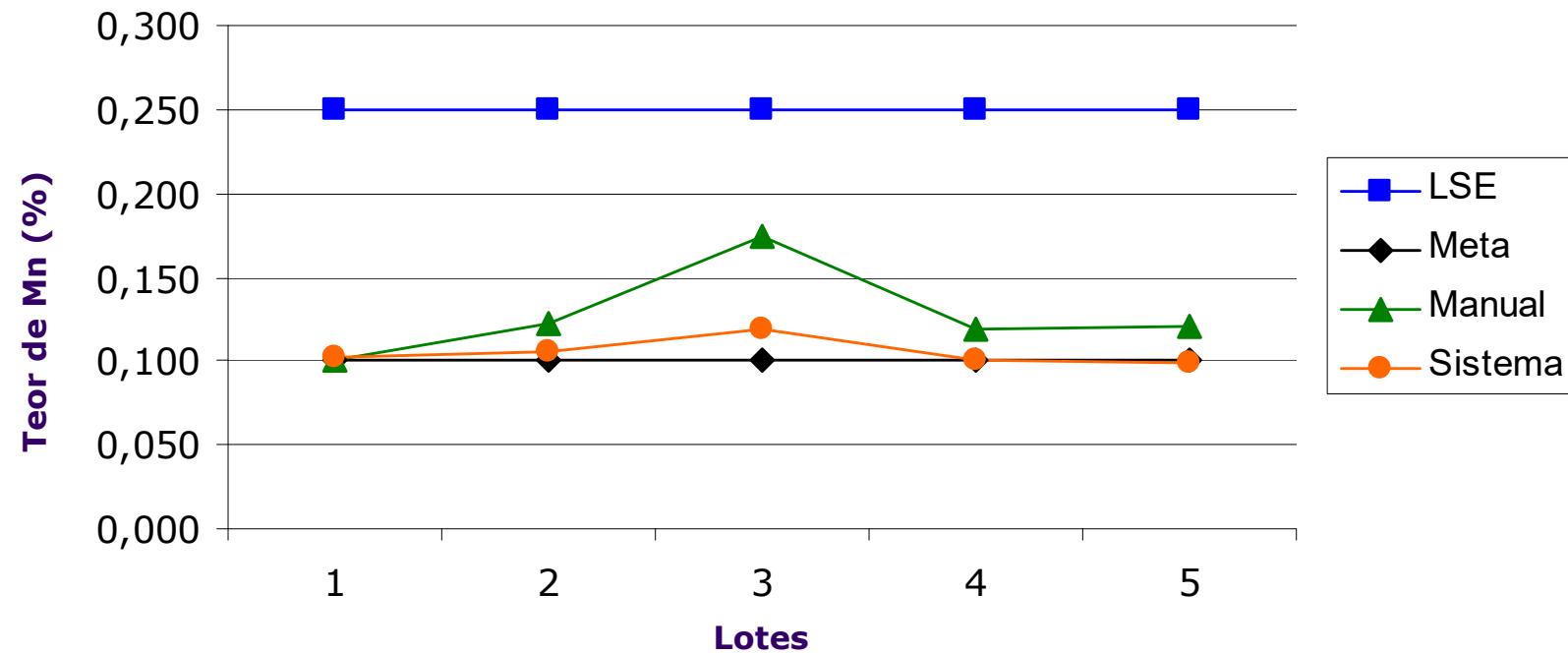
# Controle de Pátio de Minérios

PCCA



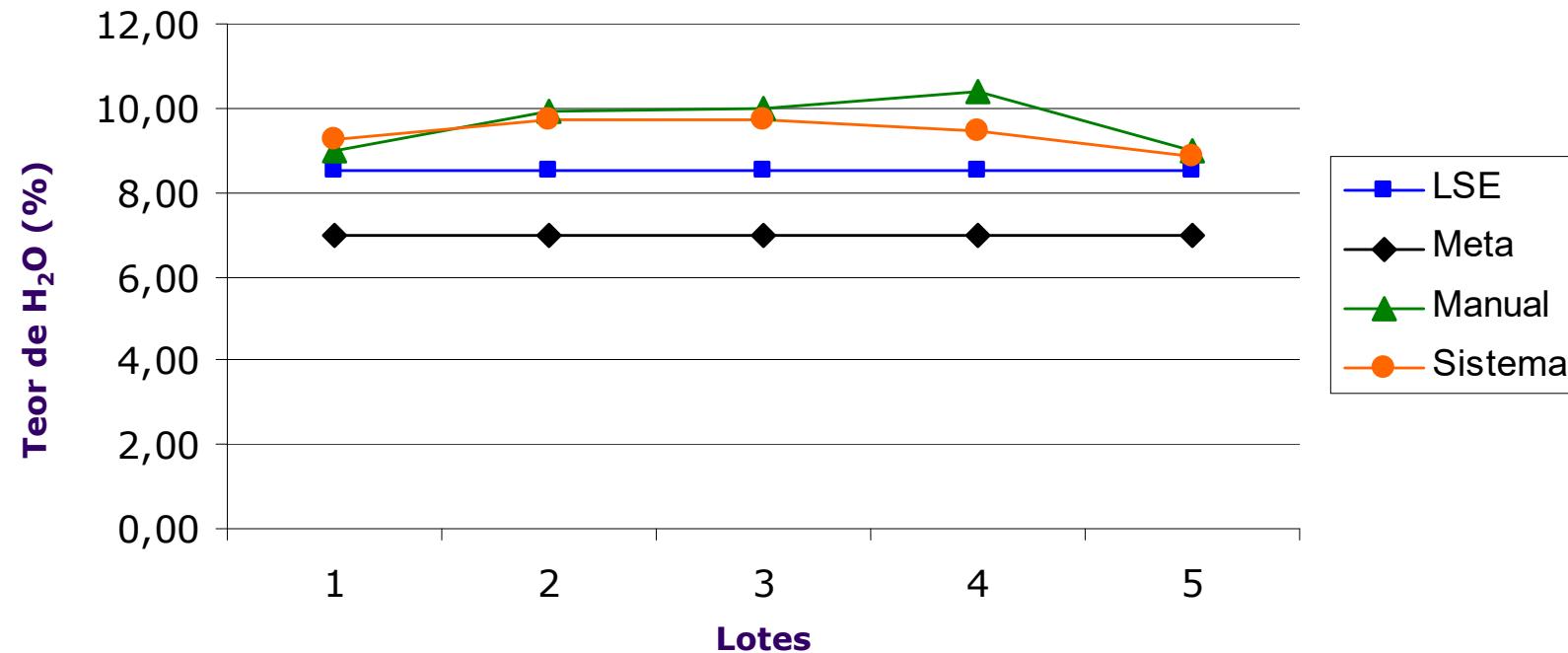
# Controle de Pátio de Minérios

**PCCA**



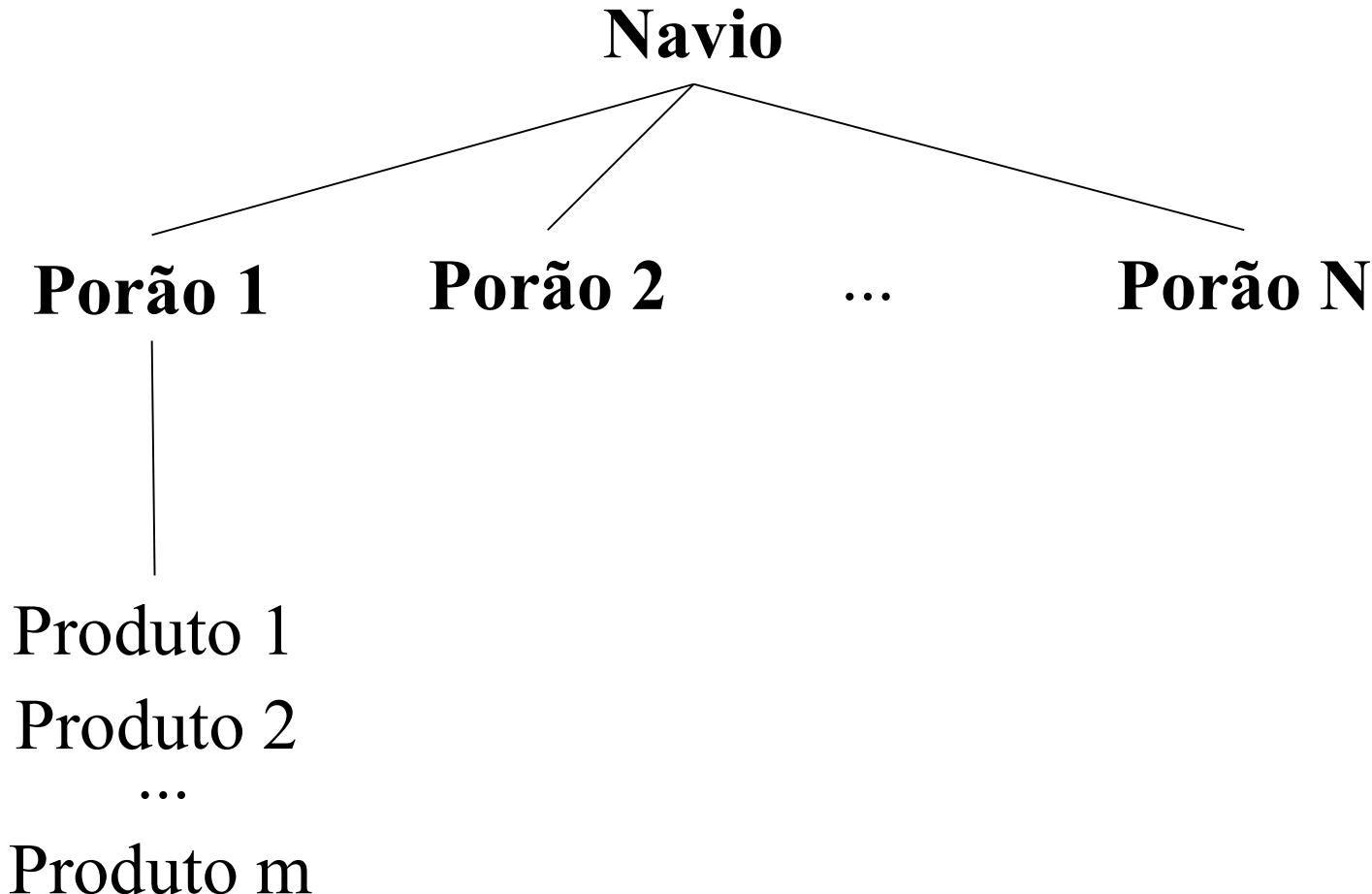
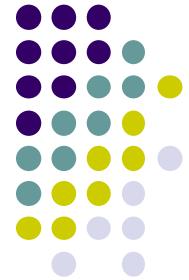
# Controle de Pátio de Minérios

**PCCA**



# CARREGAMENTO DE PRODUTOS EM NAVIOS

# Carregamento de produtos em Navios



# Carregamento de produtos em Navios



- Turnos de 6 horas de trabalho:
  - 7h-13h
  - 13h-19h
  - 19h-1h
  - 1h-7h
- 8 tipos de turnos:
  - Dia útil (horários normal e noturno)
  - Sábado (horários normal e noturno)
  - Domingo (horários normal e noturno)
  - Feriado (horários normal e noturno)
- Terno: equipe de trabalho atuando em um porão durante um turno

# Carregamento de produtos em Navios



- Existe um certo número de máquinas disponíveis para fazer o carregamento do navio: CN, CG e GB.
- Cada máquina possui uma produtividade diferente para cada tipo de produto.

# Carregamento de produtos em Navios



- **Produtos carregados em uma ordem preestabelecida.**
- **As equipes são remuneradas de acordo com a produção (ton.).**
- **Os custos variam de acordo com o produto carregado e o tipo do turno em que ocorre o turno.**
- **O custo total é dado pelo somatório dos custos com docas, encarregados, guincheiros, conferentes, estivadores e equipamento utilizado.**

# Carregamento de produtos em Navios



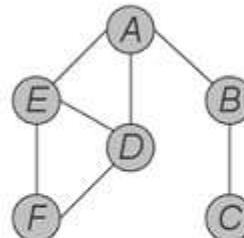
- **Custo do carregamento dado pelo somatório dos custos dos ternos**
- **Carregamento concluído depois da data prevista em contrato:**
  - *Demurrage* (multa por dia de atraso)
- **Carregamento concluído antes da data prevista em contrato:**
  - Prêmio (metade da multa)
- **Objetivo é reduzir os custos com a mão-de-obra**

# LAYOUT DE CIRCUITOS

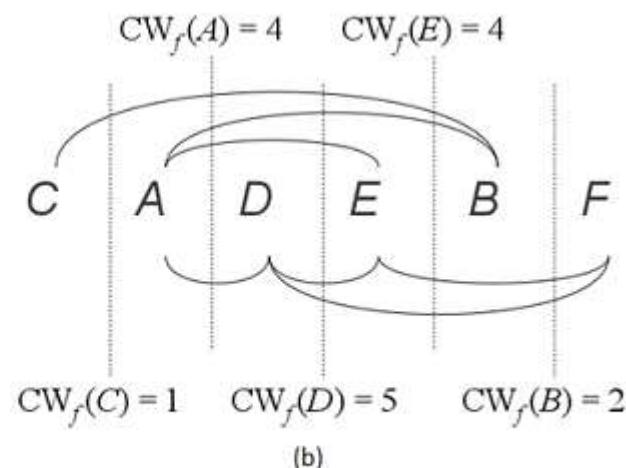


# Cutwidth Minimization Problem

- Encontrar um layout linear  $f$  de um grafo  $G$  tal que o número máximo de arcos que cortam uma ligação entre dois vértices consecutivos,  $CW(G)$ , seja minimizado:
- $CW(G) = CW_f(D) = 5$

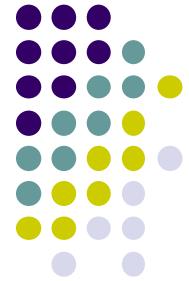


(a)



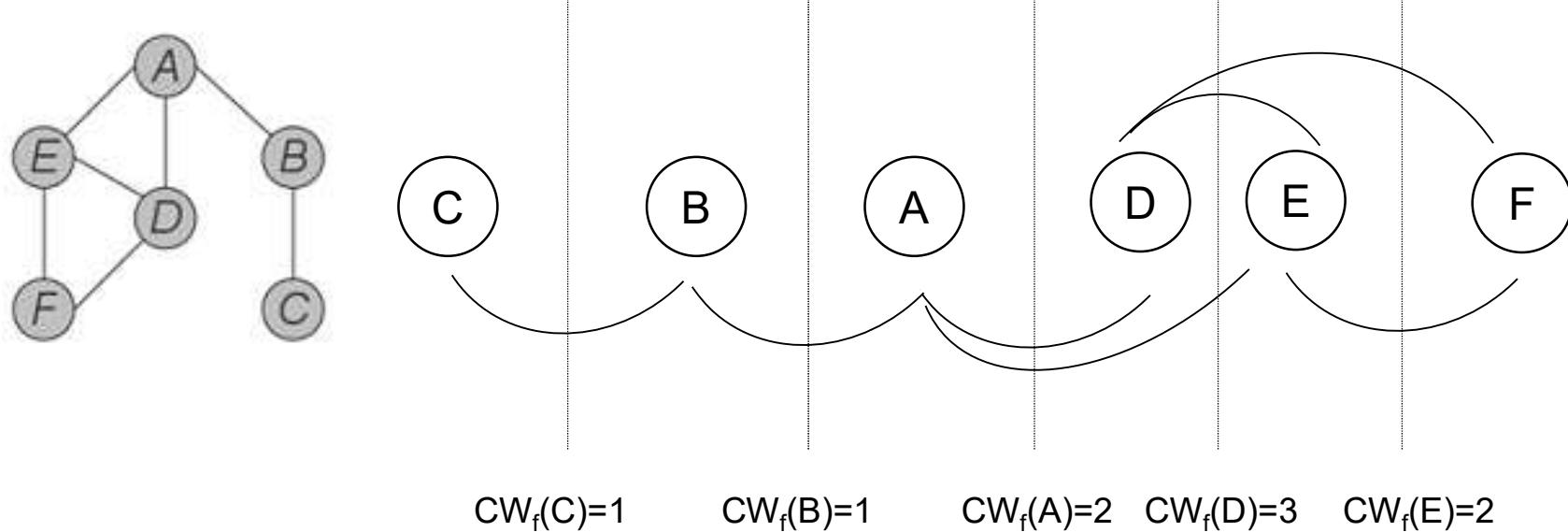
(b)

**Figure 1:** (a) Graph example, (b) Cutwidth of  $G$  for a labeling  $f$ .



# Cutwidth Minimization Problem

- Neste layout  $f$ ,  $CW(G) = CW_f(D) = 3$



# ALOCAÇÃO DE SALAS

# Problema de Alocação de Salas (*Classroom Assignment Problem*)



- Diz respeito à designação de salas para as aulas de uma instituição de ensino
- O horário das aulas é previamente conhecido
- O PAS é um subproblema do Problema de Programação de Horários (*timetabling*)
- Pode ser tratado de forma isolada ou de forma integrada à programação de horários

# Problema de Alocação de Salas (*Classroom Assignment Problem*)



- Restrições:
  - Não pode haver sobreposição de turmas;
  - As salas têm que comportar as turmas etc.
- Objetivos:
  - Manter as aulas de uma mesma turma em uma mesma sala ao longo da semana;
  - Minimizar o fluxo de alunos mudando de sala após uma aula;
  - Sempre que possível, alocar a uma mesma sala alunos de um mesmo curso e período etc.

# Problema de Alocação de Salas (*Classroom Assignment Problem*)



Segunda-feira													
	Sala 1 (70)	Sala 2 (60)	Sala 3 (44)	Sala 4 (55)	Sala 5 (44)	Sala 6 (53)	Sala 7 (70)	Sala 8 (60)	Sala 9 (50)	Sala 10 (50)	Sala 14 (40)	Sala 18 (50)	
07:30 - 08:20													
08:20 - 09:10			FIS120-21- MTM131-85-T		QUI213-22-T		MTM122-9	MTM131-86-T		BEV174-21	QUI147-11-		
09:20 - 10	BEV214-11-T		FIS120-21- MTM131-8	QUI321-11	QUI213-22-T		MTM122-9	MTM131-86-T		BEV174-21	QUI147-11-		
10:10 - 11	BEV214-11	BEV176-21	FIS514-11- MTM131-8	QUI321-11-T		FIS132-71-	FIS629-11-	MTM122-9	MTM122-96	FIS521-11-T	MTM131-83		
11:10 - 12	BEV214-11	BEV176-21	FIS514-11- MTM131-8	QUI321-11-T		FIS132-71-	FIS629-11-	MTM122-9	MTM122-96	FIS521-11-T	MTM131-83		
12:00 - 13:30													
13:30 - 14	QUI117-61	63	65-T	FIS131-72-	QUI701-85	FIS130-81-	MTM131-8	QUI701-87	FIS130-83-1	MTM122-9	EST210-11-T	FIS700-11-T	MTM131-82
14:20 - 15	QUI117-61	EST209-11	FIS131-72-	QUI701-85		FIS130-81-	MTM131-8	QUI701-87	FIS130-83-1	MTM122-9	EST210-11-T	FIS700-11-T	MTM131-82
15:20 - 16	MTM124-7	EST209-11	FIS628-11-	MTM122-9	FIS130-82-	FIS214-64-	FIS131-78-	MTM122-9	FIS306-11-	QUI513-11-	FIS133-64-T	FIS304-11-T	
16:10 - 17	MTM124-7	EST209-11	FIS628-11-	MTM122-9	FIS130-82-	FIS214-64-	FIS131-78-	MTM122-9	FIS306-11-	QUI513-11-	FIS133-64-T	FIS304-11-T	
17:10 - 18:00			MTM251-11-T		QUI270-11-T				EST202-74	MTM500-31	FIS827-11-T	MTM326-11	
18:00 - 18:50			MTM251-11-T		QUI270-11	FIS701-11-T			EST202-74	MTM500-31	FIS827-11-T	MTM326-11	
Intervalo													
19:00 - 19	FIS214-66-	EST022-11	FIS133-65-	MTM122-9	BEV170-11	FIS701-11-	MTM120-1	MTM124-7	BEV500-11	MTM500-32	EST302-11-	BEV277-21	
19:50 - 20	FIS214-66-	EST022-11	FIS133-65-	MTM122-9	BEV170-11	FIS701-11-	MTM120-1	MTM124-7	BEV500-11	MTM500-32	EST302-11-	BEV277-21	
21:00 - 21	MTM131-8	EST304-11	BEV182-21	22-T		FIS307-11-	EST018-11-T		MTM122-9	MTM146-1	BEV193-21	EST013-11-	BEV276-11-
21:50 - 22	MTM131-8	EST304-11	BEV182-21	22-T		FIS307-11-	EST018-11-T		MTM122-9	MTM146-1	BEV193-21	EST013-11-	BEV276-11-

Exemplo de solução

# LOCALIZAÇÃO DE MAMÓGRAFOS

# Problema de Localização de Mamógrafos



- Câncer de mama é o segundo tipo de câncer mais prevalente na população feminina
- Exame de mamografia: principal meio de diagnóstico precoce deste mal
- Público alvo:
  - Mulheres de 40 a 49 anos: 20%
  - Mulheres de 50 a 59 anos: 58,9%

# Problema de Localização de Mamógrafos



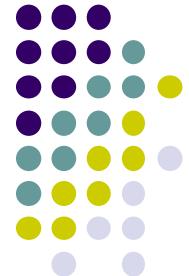
- A distribuição de mamógrafos no Brasil é desigual (Amaral *et al.*, 2017):
  - Há regiões com excesso de equipamentos e mal localizados e
  - outras em que a quantidade existente não é suficiente para atender à demanda

# Problema de Localização de Mamógrafos



- Trata da localização de mamógrafos
- Um mamógrafo simples tem capacidade de atender a 5069 exames por ano
- As mulheres não podem (ou não deveriam) deslocar mais do que 60 km para serem atendidas
- Um mamógrafo só pode ser instalado em uma cidade com infraestrutura hospitalar
- O objetivo é maximizar a demanda a ser atendida

# Problema de Localização de Mamógrafos



## ➤ Parâmetros:

- $N$  = conjunto de cidades
- $dem_j$  = demanda da cidade  $j$
- $cap$  = cap. do mamógrafo
- $S_i$  = conj. das cidades que distam 60 km da cidade  $i$
- $demMin$  = demanda mínima que justifica a instalação de um equipamento
- $p$  = número de mamógrafos a serem instalados

## ➤ Variáveis de decisão:

- $x_{ij} = 1$  se a cidade  $j$  for atendida por algum mamógrafo instalado na cidade  $i$
- $y_i$  = número de mamógrafos a serem instalados na cidade  $i$
- $z_i = 1$  se na cidade  $i$  for instalado algum mamógrafo

$$\max \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in S_i} dem_j \cdot x_{ij} \quad (1)$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{i \in S_j} x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in N \quad (2)$$

$$\sum_{i \in N} y_i = p \quad (3)$$

$$\sum_{j \in S_i} dem_j \cdot x_{ij} \leq cap \cdot y_i \quad \forall i \in N \quad (4)$$

$$z_i \geq y_i/p \quad \forall i \in N \quad (5)$$

$$z_i \geq x_{ij} \quad \forall i, j \in N \quad (6)$$

$$x_{ii} = z_i \quad \forall i \in N \quad (7)$$

$$y_i = 0 \quad \forall i \in N \mid dem_i < demMin \quad (8)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N \quad (9)$$

$$y_i \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i \in N \quad (10)$$

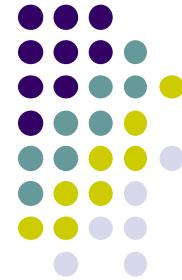
$$z_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N \quad (11)$$

# Problema de Localização de Mamógrafos



- Estudo de caso nas regiões de saúde num raio de 100 km de Ouro Preto:
  - 142 cidades em 12 regiões de saúde
  - Há 55 mamógrafos

# Problema de Localização de Mamógrafos



- Estudo de caso nas regiões de saúde num raio de 100 km de Ouro Preto:
  - 142 cidades em 12 regiões de saúde
  - Há 55 mamógrafos, mas que não atendem a toda a população feminina por estarem mal localizados

# Problema de Localização de Mamógrafos



- Estudo de caso nas regiões de saúde num raio de 100 km de Ouro Preto:
  - 142 cidades em 12 regiões de saúde
  - Há 55 mamógrafos, mas que não atendem a toda a população feminina por estarem mal localizados
  - Apenas 46 seriam necessários

# Problema de Localização de Mamógrafos - MG

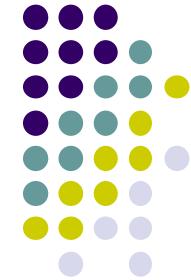


- Demanda projetada para 2020:
  - 1.727.487 exames (IBGE)
- Quantidade existente de mamógrafos:
  - 326 (DATASUS)
- Capacidade anual de exames de um mamógrafo:
  - 5069
- Distância entre as localidades:
  - Google maps (deslocamento por carro)
- Cobertura atual:
  - 1.151.092 (67% de cobertura)

# Problema de Localização de Mamógrafos: MG



# Problema de Localização de Mamógrafos: MG

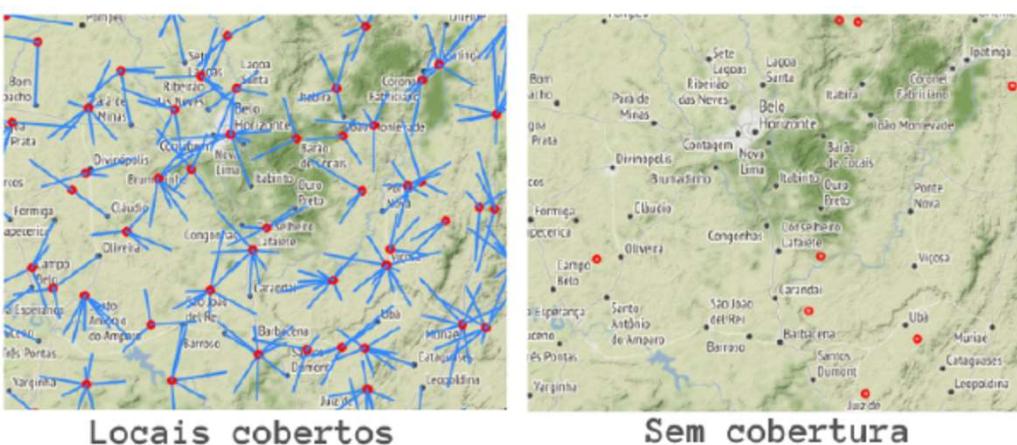


- Com microrregião:

X



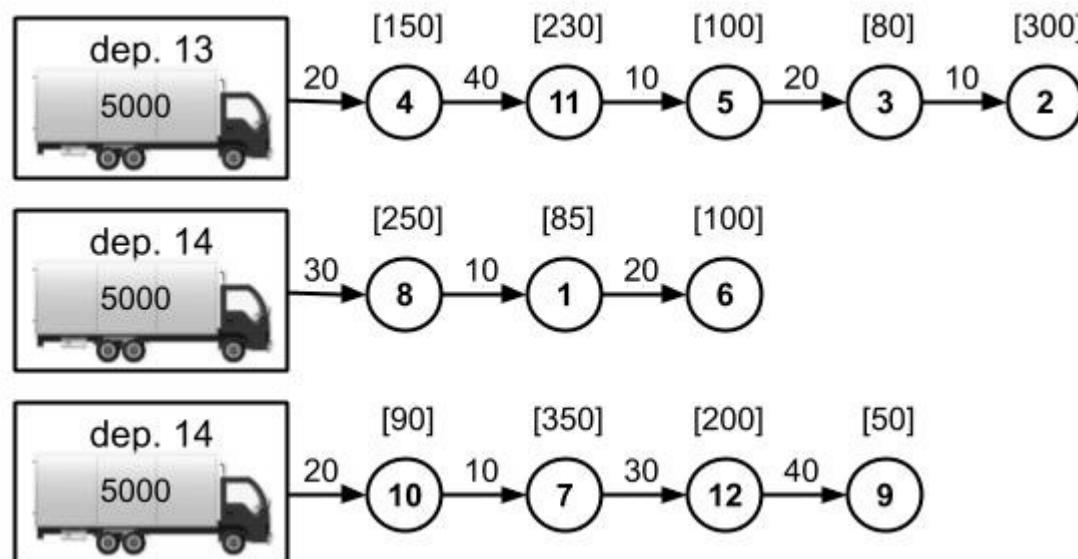
- Sem microrregião:



# Problema de Localização de Mamógrafos - MG



- Proposta de continuidade:
  - Adquirir mamógrafos até se alcançar uma taxa mínima de utilização, que justifique economicamente operá-los
  - Cidades não atendidas por mamógrafos fixos devem ser atendidas por unidades móveis de mamografia (MMU, *Mobile Mammography Unit*)





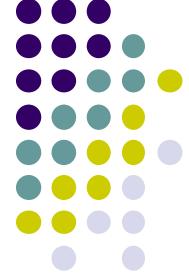
## Diferenças entre as metodologias usadas para resolver alguns dos problemas anteriores

- Problema do controle do pátio de minérios e Problema de localização de mamógrafos:
  - Resolvidos de forma “exata”
  - Fácil encontrar a solução ótima
- Problema de alocação de salas / carregamento de produtos em navios:
  - Resolvido apenas de forma “aproximada”
  - A solução final não é necessariamente ótima
- Problema de roteamento de veículos
  - Tempos proibitivos para encontrar a solução ótima na maioria dos casos reais



# Modelos de Otimização

- Programação matemática:
  - Fundamentados na matemática
  - Métodos exatos: garantem a geração da solução ótima
  - Método mais difundido: Programação Linear (PL)
  - Desvantagens:
    - Modelagem mais complexa
    - Em problemas combinatórios, podem exigir um tempo proibitivo para encontrar a solução ótima
- Heurísticos:
  - Fundamentados na Inteligência Artificial. Inspirados na forma humana de resolver o problema, em processos físicos, biológicos, comportamentais, etc.
  - Não garantem a optimalidade da solução final
  - Vantagens:
    - De fácil modelagem
    - Boas soluções podem ser obtidas rapidamente



# Exemplo: Problema da Mochila

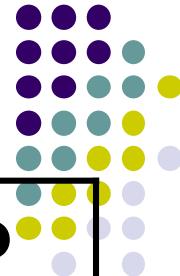
- Imagine que os alunos da disciplina sejam contemplados com um cruzeiro marítimo após o término do curso, patrocinado por uma grande empresa, que deseja aliar sua marca aos universitários;
- Em alto mar o navio começa a afundar ...
- Só existe um barco salva-vidas, que, no entanto, só pode levar **c** quilos

# Exemplo: Problema da Mochila



- Cada pessoa no navio tem um certo peso  $p_i$
- Cada pessoa  $i$  proporciona um benefício  $b_i$  se for levada para o barco salva-vidas
- O problema consiste em escolher as pessoas que trarão o maior benefício possível sem ultrapassar a capacidade do barco

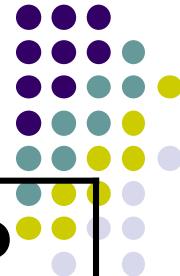
# Exemplo: Problema da Mochila



Pessoa	Peso (Kg)	Benefício

- ✓ Capacidade do barco: **250 Kg**

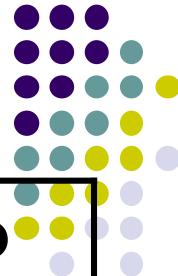
# Exemplo: Problema da Mochila



Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
cruzeirense	140	0

- ✓ Capacidade do barco: **250 Kg**

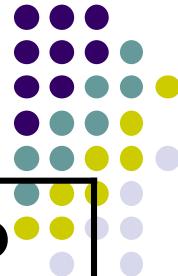
# Exemplo: Problema da Mochila



Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
cruzeirense	140	0
Recém-graduado	60	1

- ✓ Capacidade do barco: **250 Kg**

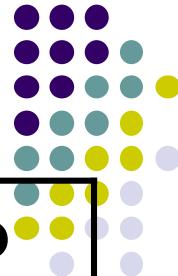
# Exemplo: Problema da Mochila



Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
cruzeirense	140	0
Recém-graduado	60	1
ATLETICANO	100	3

- ✓ Capacidade do barco: **250 Kg**

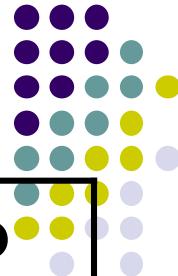
# Exemplo: Problema da Mochila



Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
cruzeirense	140	0
Recém-graduado	60	1
ATLETICANO	100	3
Professor de geografia	80	4

- ✓ Capacidade do barco: **250 Kg**

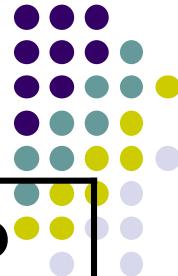
# Exemplo: Problema da Mochila



Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
cruzeirense	140	0
Recém-graduado	60	1
ATLETICANO	100	3
Professor de geografia	80	4
Morena	75	3

- ✓ Capacidade do barco: **250 Kg**

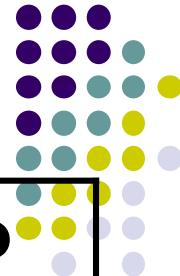
# Exemplo: Problema da Mochila



Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
cruzeirense	140	0
Recém-graduado	60	1
ATLETICANO	100	3
Professor de geografia	80	4
Morena	75	3
Loira	60	2

- ✓ Capacidade do barco: **250 Kg**

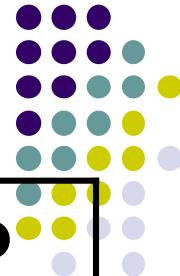
# Exemplo: Problema da Mochila



Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
cruzeirense	140	0
Recém-graduado	60	1
ATLETICANO	100	3
Professor de geografia	80	4
Morena	75	3
Loira	60	2
Marcone	90	10

- ✓ Capacidade do barco: 250 Kg
  - ✓ Solução 1: M + L + A (250 Kg) Benefício = 15

# Exemplo: Problema da Mochila



Pessoa	Peso (Kg)	Benefício
cruzeirense	140	0
Recém-graduado	60	1
ATLETICANO	100	3
Professor de geografia	80	4
Morena	75	3
Loira	60	2
Marcone	90	10

- ✓ Capacidade do barco: **250 Kg**
- ✓ Solução 1: M + L + A (250 Kg) Benefício = 15
- ✓ Solução 2: M + MOV + PG (245 Kg) Benefício = 17

# Problema da Mochila: Complexidade



- Problema NP-difícil
  - Não existem algoritmos que o resolva em tempo polinomial.
  - Em vista disso, pode requerer tempos de processamento proibitivos em instâncias “grandes”
- Para  $n$  pessoas há  $2^n$  configurações possíveis
- Exemplo: Para  $n = 50$  há  $10^{15}$  soluções para serem testadas
- Um computador que realiza uma avaliação em  $10^{-8}$  segundos gastaria cerca de 130 dias para encontrar a melhor solução por enumeração completa!
- Conclusão: O barco afundaria antes que fosse tomada a decisão de quem seriam os escolhidos

# Problema da Mochila: Observações



- Resolvido por métodos heurísticos
- Observação importantíssima:
  - O que torna um problema difícil de ser resolvido na optimalidade **não** é o número de possíveis soluções e, sim, o fato de ele pertencer à classe NP-difícil