

Colônia de Formigas (*Ant Colony Optimization*)

Marcone Jamilson Freitas Souza^{1,2,3}

Puca Huachi Vaz Penna¹

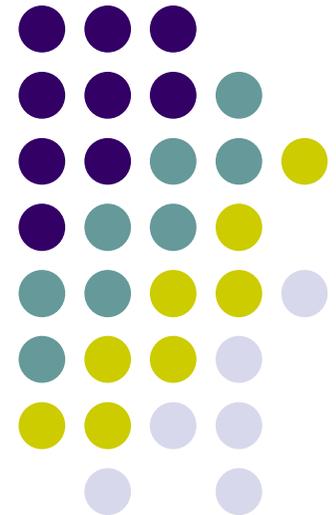
¹ Departamento de Computação

¹ Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação
Universidade Federal de Ouro Preto

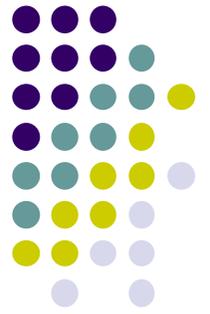
² Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e
Computacional / CEFET-MG

³ Programa de Pós-graduação em Instrumentação, Controle e
Automação de Processos de Mineração / ITV/UFOP

www.decom.ufop.br/prof/marcone, www.decom.ufop.br/puca
E-mail: {marcone,puca}@ufop.edu.br

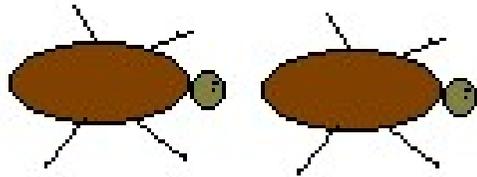
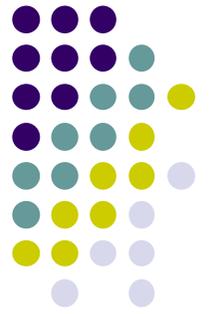


Colônia de Formigas (*Ant Colonies*)



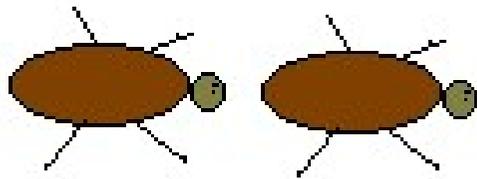
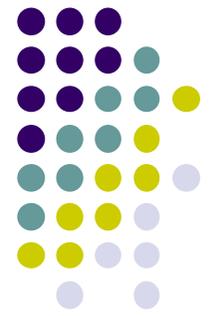
- Método de busca populacional
- Proposto por Dorigo et al. (1991)
- **Princípio:**
 - Simula o comportamento de um conjunto de agentes (**formigas**) que se cooperam para resolver um problema de otimização por meio de comunicações muito simples
 - Ao deslocarem-se as formigas deixam um rastro (substância chamada **feromônio**), que é usado para comunicarem-se quimicamente

Rota das formigas ao encontrarem um alimento



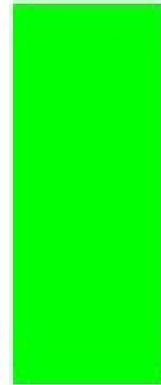
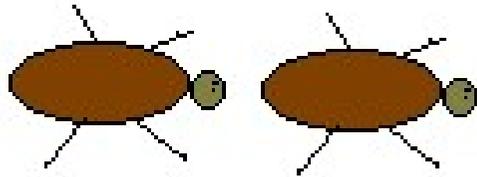
ALIMENTO

Rota das formigas ao encontrarem um alimento



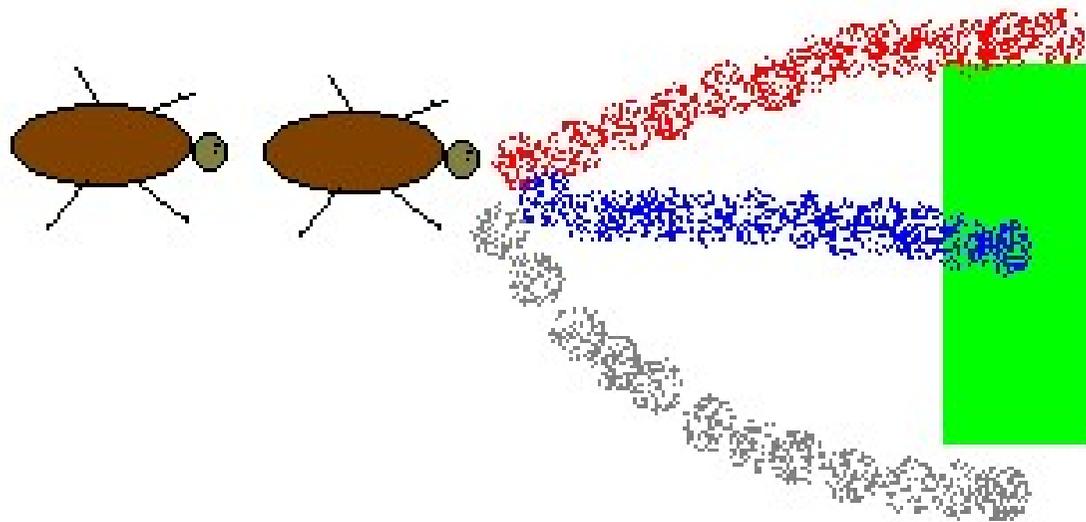
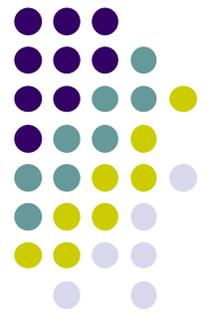
ALIMENTO

Formigas encontram um obstáculo



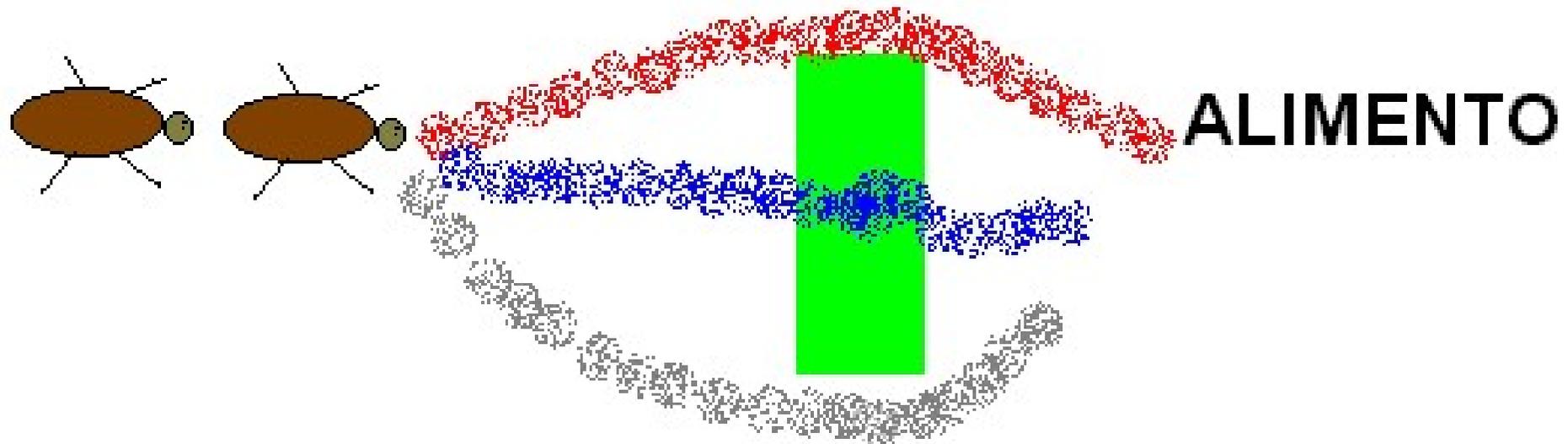
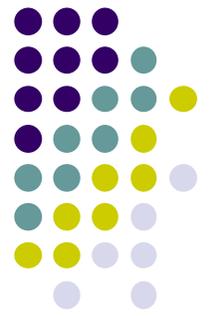
ALIMENTO

Posicionamento das formigas ao encontrarem um obstáculo

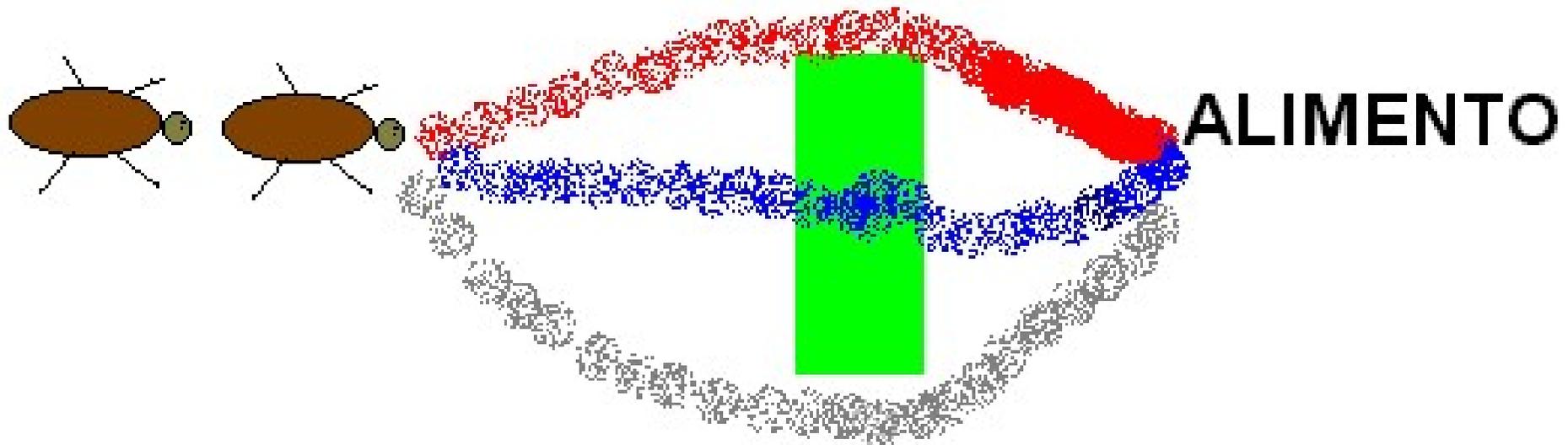
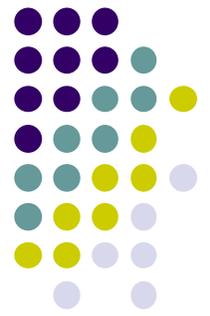


ALIMENTO

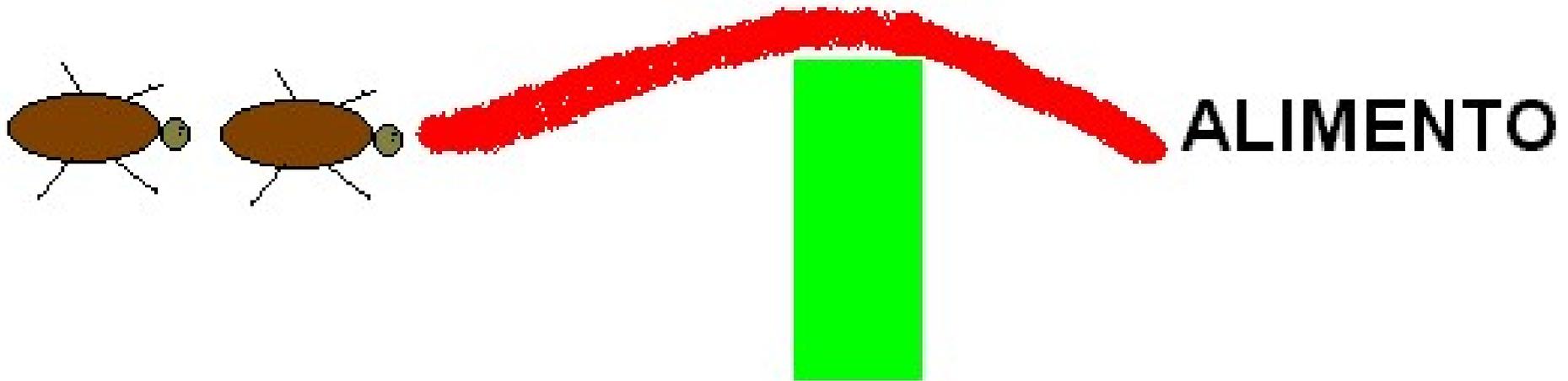
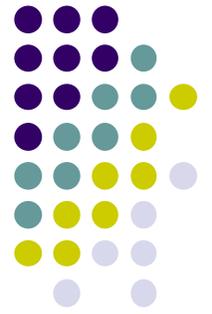
Posicionamento das formigas ao encontrarem um obstáculo



Posicionamento das formigas ao encontrarem um obstáculo

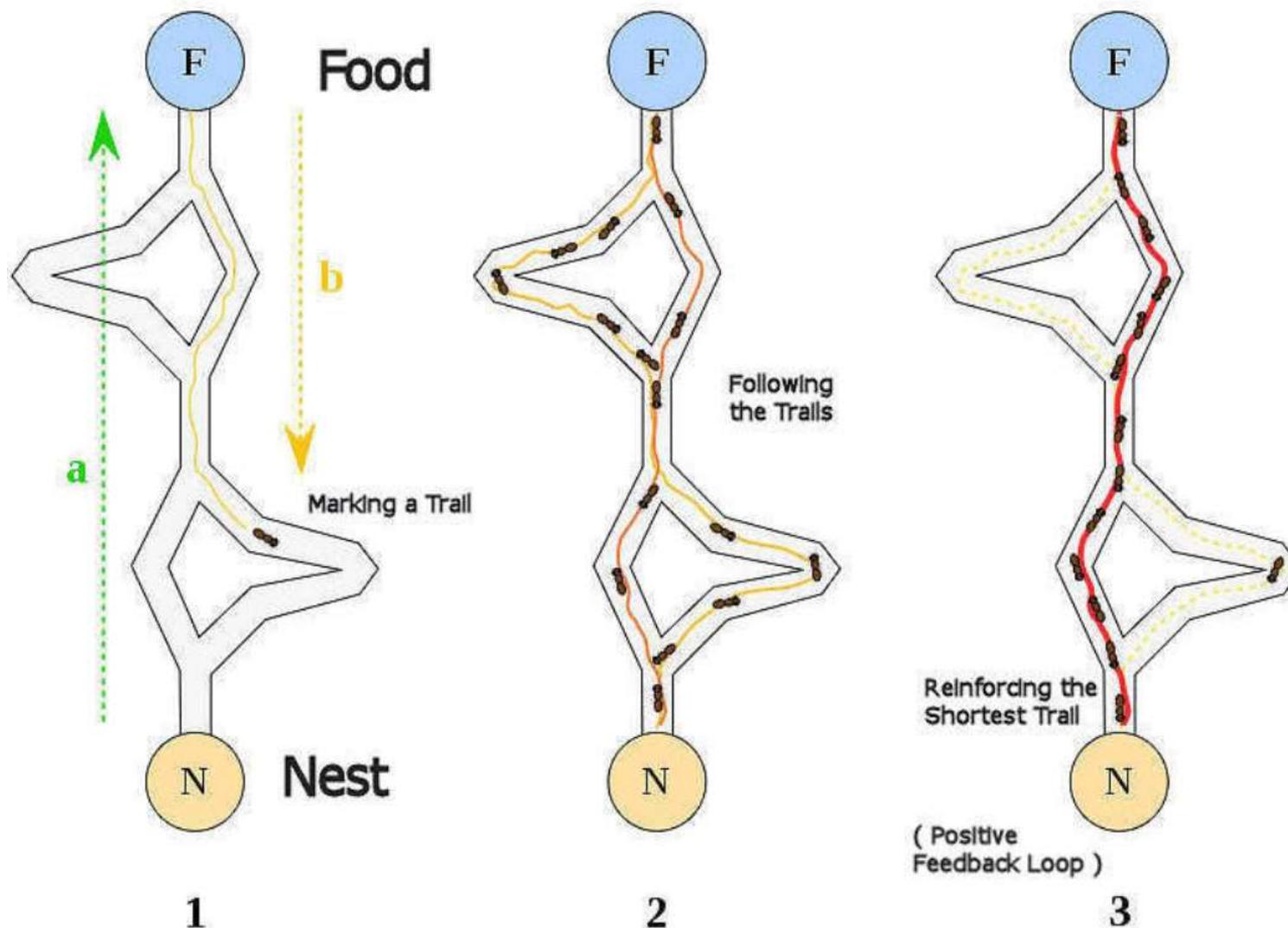


Rota final das formigas após um certo tempo

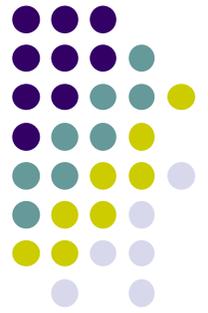




Sequência de percursos das formigas até encontrarem o menor caminho

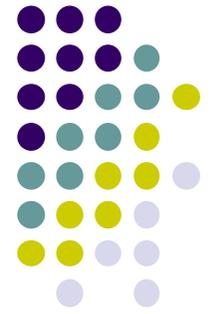


Colônia de Formigas aplicada ao Problema do Caixeiro Viajante



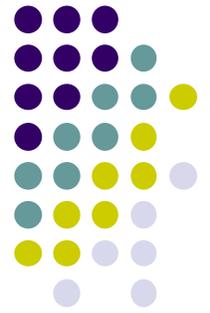
- Considera-se um conjunto de m formigas, cada qual localizada em uma certa cidade
- Pressuposto:
 - Considerando o efeito da presença simultânea de muitas formigas, então cada uma contribuirá com uma parte da distribuição de feromônio.
 - Bons conjuntos de arcos serão utilizados por muitas formigas e, portanto, receberão uma quantidade maior de feromônio
- Aproximação para o modelo computacional:
 - Formigas deixam o feromônio em cada arco visitado após chegar ao destino
 - Na vida real, as formigas deixam o feromônio durante o movimento e não após chegar ao seu destino

Colônia de Formigas aplicada ao Problema do Caixeiro Viajante



- Funcionamento do método: superposição concorrente de m procedimentos usando uma única formiga
- Cada formiga atua como segue:
 1. Em cada passo a formiga escolhe uma cidade para mover-se dentre aquelas ainda não visitadas
 2. A probabilidade de a formiga escolher o arco (i,j) é **diretamente proporcional** à quantidade Γ_{ij} de feromônio no arco (i,j) e **inversamente** ao comprimento d_{ij} do arco

Colônia de Formigas aplicada ao Problema do Caixeiro Viajante



3. A probabilidade de a formiga k sair da cidade i em direção à cidade j é calculada como:

$$p_{ij}^k = \frac{[\Gamma_{ij}]^\alpha \times [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{l \in N_i^k} [\Gamma_{il}]^\alpha \times [\eta_{il}]^\beta} \quad \forall j \in N_i^k$$

sendo:

$\eta_{ij} = 1/d_{ij}$: representa a informação heurística

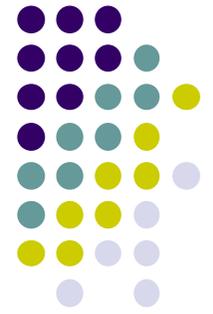
Γ_{ij} : quantidade de feromônio no arco (i,j)

N_{ik} : conjunto das cidades ainda não visitadas pela formiga k

α : parâmetro que define a influência da trilha de feromônio

β : parâmetro que define a influência da informação heurística

Colônia de Formigas aplicada ao Problema do Caixeiro Viajante



4. A formiga lembra-se de cada cidade já visitada
5. Após uma rota ser completada, a formiga deposita uma certa quantidade de feromônio ($\Delta\Gamma_{ij}$) em cada arco (i, j) da rota, formando uma trilha com rastros de feromônio
 - Para os arcos que não pertencem à rota $\Delta\Gamma_{ij} = 0$
6. Considera-se a **evaporação** de feromônio em cada arco (i, j), tomando-se um fator ρ de evaporação, com $\rho < 1$, dado por:

$$\Gamma_{ij} \leftarrow (1 - \rho) \times \Gamma_{ij} + \Delta\Gamma_{ij}$$



procedimento *ColoniaFormigas*

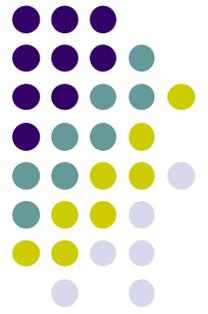
- 1 Seja Q e Γ_0 constantes;
 $f^* \leftarrow \infty$;
 - 2 Faça $\Delta\Gamma_{ij} \leftarrow 0$ e $\Gamma_{ij} \leftarrow \Gamma_0$ para todo arco (i, j) ;
 - 3 Para (cada formiga $k = 1, \dots, m$) faça
 - (a) Selecione a cidade inicial para a k -ésima formiga
 - (b) Obtenha uma rota R^k para cada formiga k
 - (c) Seja L^k o comprimento da rota R^k
 - (d) se ($L^k < f^*$) então $s^* \leftarrow R^k$ e $f^* \leftarrow f(s^*)$
 - (e) Calcule a quantidade de rastro deixado pela formiga k :
se (arco (i, j) pertence à rota R^k)
então $\Delta\Gamma_{ij}^k \leftarrow Q/L^k$
senão $\Delta\Gamma_{ij}^k \leftarrow 0$
fim-se
 - (f) Faça $\Delta\Gamma_{ij} \leftarrow \Delta\Gamma_{ij} + \Delta\Gamma_{ij}^k$
 - 4 fim-para;
 - 5 Faça $\Gamma_{ij} \leftarrow (1 - \rho) \times \Gamma_{ij} + \Delta\Gamma_{ij} \quad \forall (i, j)$
 - 6 se (a melhor rota s^* não foi alterada nas últimas *IterMax* iterações)
 - 7 então *PARE*: s^* é a melhor solução
 - 8 senão Retorne ao Passo 3
 - 9 fim-se
- fim** *ColoniaFormigas*;

Colônia de Formigas aplicada ao Problema do Caixeiro Viajante



- O algoritmo anterior, proposto em 1991, é referenciado na literatura como *Ant System* (AS)
- Posteriormente, surgiram outras versões, entre elas:
 - *Ant Colony System* (ACS):
 - Dorigo e Gambardella (1997)
 - *Max-Min Ant System* (MMAS):
 - Stutzle e Hoos (1997)
 - *Rank-based Ant System* (AS_{rank}):
 - Bullnheimer et al. (1999)

Ant Colony System (ACS)



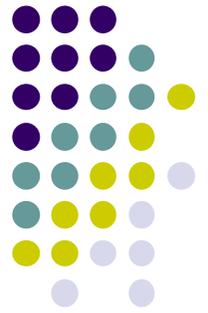
- A atualização da quantidade de feromônio Γ_{ij} é feita em dois níveis:
 - No nível local, cada vez que uma formiga passa pelo arco (i, j), ela deposita feromônio de acordo com a fórmula (já considerando a evaporação no fator φ):
$$\Gamma_{ij} = (1 - \varphi) \cdot \Gamma_{ij} + \varphi \cdot \Gamma_0, \varphi \in [0, 1]$$
 - No nível global, isto é, ao final da iteração com todas as formigas, apenas a formiga que produziu a melhor solução (na iteração corrente ou a melhor até então) deposita feromônio em cada arco de acordo com a seguinte fórmula:
 - $\Gamma_{ij} = (1 - \rho) \cdot \Gamma_{ij} + \rho \cdot (\Delta\Gamma_{ij})^{\text{best}}, \rho \in [0, 1]$
 - $\Delta\Gamma_{ij}^{\text{best}}$: trilha de feromônio deixada pela formiga que produziu a melhor solução



Ant Colony System (ACS)

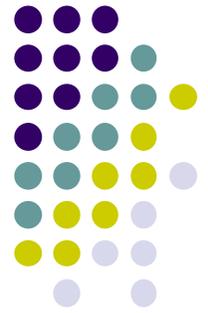
- A próxima cidade **c** a ser visitada é escolhida de acordo com a regra abaixo, que depende de um parâmetro $q_0 \in [0, 1]$ definido previamente e de um valor aleatório $q \in [0, 1]$ obtido a cada escolha:
 - Se $q \leq q_0$, então a escolha da cidade c é gulosa:
 - $c = \operatorname{argmax}\{(\Gamma_{ij})^\alpha \times (\eta_{ij})^\beta, j \in \mathcal{N}_i^k\}$
 - Isto é, c é a cidade com maior quantidade de feromônio por unidade de distância
 - Se $q > q_0$, então a cidade c é escolhida de acordo com a regra de probabilidade estabelecida anteriormente:
$$p_{ij}^k = \frac{[\Gamma_{ij}]^\alpha \times [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{l \in \mathcal{N}_i^k} [\Gamma_{il}]^\alpha \times [\eta_{il}]^\beta} \quad \forall j \in \mathcal{N}_i^k$$

Ant Colony System (ACS)



- Com esta escolha, faz-se um balanço entre intensificação e diversificação
 - A intensificação ocorre com a escolha gulosa
 - A diversificação ocorre com a escolha proporcional à probabilidade associada à cada cidade
- Esta versão considera a possibilidade de aplicar busca local na rota de cada formiga

Rank-based Ant System (AS_{rank})



- Assim como no AS, atualiza-se o feromônio ao final da iteração de todas as formigas
- Somente as formigas associadas às $\omega-1$ melhores rotas ($\omega < m$) e à melhor rota global podem depositar feromônio:

$$\Gamma_{ij} \leftarrow (1 - \rho) \times \Gamma_{ij} + \sum_{r=1}^{\omega-1} ((w - r) \times \Delta\Gamma_{ij}^r) + w \times \Delta\Gamma_{ij}^{gb} \quad \forall (i, j)$$

- $\Delta\Gamma_{ij}^{gb}$: trilha de feromônio deixada pela formiga que produziu a melhor solução global até então

Colônia de Formigas aplicada ao Problema do Caixeiro Viajante



- Vídeo explicativo do método disponível em:
<https://www.youtube.com/watch?v=sDBe6R0axAY&t=0s>