Substitutivas das Provas Teóricas de Cálculo Numérico

Aluno: ______________________________ **Matr.:** ______________

(1) Calcular a raiz da equação $f(x) = x^2 + \ln x$, com erro $\varepsilon \leq 0,1$, usando qualquer método numérico.

(2) Dada a equação $f(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$, pede-se:

(a) O intervalo onde podem existir raizes positivas.

(b) Sabendo-se que a sequência de Sturm relativa ao polinômio P(x) é:

(1) $p_0(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$
(2) $p_1(x) = 4x^3 + 6x^2 - 26x - 14$
(3) $p_2(x) = 7,25x^2 + 7,25x - 25,75$
(4) $p_3(x) = 13,79x + 6,90$
(5) $p_4(x) = 27,56$

Determine o número de raízes reais no intervalo assinalado abaixo:
( ) [-10, 0] ( ) [-5, 0] ( ) [0, 2] ( ) [0, 4] ( ) [0, 5]

(3) Para os itens abaixo, considere o seguinte sistema linear $Ax = b$, no qual n indica os <u>dois</u> últimos dígitos de seu número de matrícula na UFOP:

$$\begin{bmatrix} 60 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que este sistema pode ser resolvido por um método iterativo.

(b) Resolvê-lo pelo Método de Gauss-Seidel com precisão $\varepsilon < 10^{-2}$. Apresente a solução correspondente, bem como o erro associado.

(c) Faça a fatoração LU da matriz A. Apresente as matrizes L e U correspondentes a essa fatoração.

(d) Calcule o determinante da matriz A a partir da fatoração LU.

(e) Resolva esse sistema pelo Método da Decomposição LU. Apresente o vetor solução, o vetor resíduo associado, bem como o erro cometido.

(4) Dada a função f conhecida pelos seus pontos $y = f(x)$ da tabela abaixo, pede-se:

x	0,0	0,8	1,5	2,4	3,0	3,5	4,1	4,6	5,7	6,7	7,1	8,2	10,0
y	2	5	3	8	4	9	5	7	3	6	4	8	5

Determinar o valor de $f(4)$ utilizando um polinômio interpolador de grau 2.

(5) Calcular pela Primeira Regra de Simpson, com erro $\varepsilon \leq 0,1$, o valor da integral:

$$\int_1^5 (x^2 - 1)\ln(x)dx$$

Observação: Mostre que $\max_{x \in [1,5]} |f^{(4)}(x)| = 4$, sendo $f(x) = (x^2 - 1)\ln(x)$. Não sendo mostrado esse resultado, o valor da questão é depreciado em 30%.

Questões	1	2-a	2-b	3-a	3-b	3-c	3-d	3-e	4	5	Total
Valor-T	1,5	0,5	1,0	0,5	1,5	0,8	0,5	0,7	1,5	1,5	10.0
Valor-T1	5,0	1,5	3,5	–	–	–	–	–	–	–	10.0
Valor-T2	–	–	–	1,0	4,0	2,0	1,0	2,0	–	–	10.0
Valor-T3	–	–	–	–	–	–	–	–	5,0	5,0	10.0
Nota											

Formulários

1. Erro de truncamento da Primeira Regra de Simpson:
   $|E_T| \leq \frac{(b-a)^5 M_4}{180n^4}$, sendo $M_4 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$

2. Fórmula da integração pela Primeira Regra de Simpson:
   $I = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$

3. Polinômio Interpolador de Gregory-Newton:
   $P(x) = y_0 + z\Delta y_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!} + \cdots$
   sendo $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$; $\Delta^0 y_i = y_i$; $h = \frac{x - x_0}{n}$

4. Polinômio Interpolador de Newton:
   $P(x) = y_0 + (x-x_0)\Delta\!\!\!\!\mid\, y_0 + (x-x_0)(x-x_1)\Delta\!\!\!\!\mid^2 y_0 + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\Delta\!\!\!\!\mid^3 y_0 + \cdots$
   sendo $\Delta\!\!\!\!\mid^k y_i = \frac{\Delta\!\!\!\!\mid^{k-1} y_{i+1} - \Delta\!\!\!\!\mid^{k-1} y_i}{x_{i+k} - x_i}$; $\Delta\!\!\!\!\mid^0 y_i = y_i$

5. Equações de iteração do Método de Jacobi:

$$x_1^{(k)} = \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(k-1)} + a_{13}x_3^{(k-1)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k-1)})}{a_{11}}$$
$$x_2^{(k)} = \frac{b_2 - (a_{21}x_1^{(k-1)} + a_{23}x_3^{(k-1)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k-1)})}{a_{22}}$$
$$\vdots$$
$$x_n^{(k)} = \frac{b_n - (a_{n1}x_1^{(k-1)} + a_{n2}x_2^{(k-1)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k-1)})}{a_{nn}}$$

6. Equações de iteração do Método de Gauss-Seidel:

$$x_1^{(k)} = \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(k-1)} + a_{13}x_3^{(k-1)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k-1)})}{a_{11}}$$
$$x_2^{(k)} = \frac{b_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k-1)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k-1)})}{a_{22}}$$
$$x_3^{(k)} = \frac{b_3 - (a_{31}x_1^{(k)} + a_{32}x_2^{(k)} + \cdots + a_{3n}x_n^{(k-1)})}{a_{33}}$$
$$\vdots$$
$$x_n^{(k)} = \frac{b_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})}{a_{nn}}$$

7. Critério das linhas: É condição suficiente para que um sistema linear convirja usando um método iterativo que:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

8. Critério das colunas: É condição suficiente para que um sistema linear convirja usando um método iterativo que:

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall j = 1, 2, \cdots, n$$

9. Critério de Sassenfeld: Seja

$$\beta_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} (|a_{ij}| * \beta_j) + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \tag{01}$$

É condição suficiente para que um método iterativo convirja, que:

$$\beta = \max_{1 \leq i \leq n} \beta_i < 1$$

10. Vetor resíduo: $R = b - Ax$

11. Método da Bisseção: $x = \frac{a+b}{2}$

12. Método da Falsa Posição: $x = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$

13. Método de Newton: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ $\forall k = 0, 1, 2, \cdots$

14. Teorema de Lagrange: Seja a equação algébrica
$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ com $a_n > 0$, $a_0 \neq 0$ e $k = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{i : a_i < 0\}$. Então para limite superior das raízes positivas de $P_n(x) = 0$, caso existam, pode-se tomar o número:

$$L = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}} \tag{02}$$

sendo $B = \max_{\substack{a_i < 0 \\ 0 \leq i \leq n-1}} |a_i|$

15. $(ln(x))' = \frac{1}{x}$

16. $(x^n)' = nx^{n-1}$