PCC175 - TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO

Aula 02 - Relações de Dominância

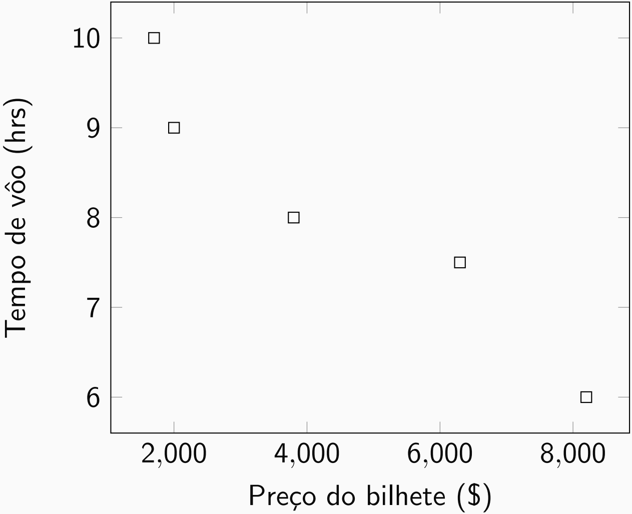
Gladston Juliano Prates Moreira
email: gladston@ufop.edu.br

CSILab, Departamento de Computação
Universidade Federal de Ouro Preto

13 de abril de 2026

Caracterização Analítica e Relações de Dominância

Problema de Otimização Multi-objetivo ou Vetorial



Exemplo de um conjunto de opções de bilhetes aéreos.

Problema de Otimização Multi-objetivo ou Vetorial

Um problema de otimização vetorial, pode descrito por um modelo geral como segue:

$$\min \; f(x) \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^m$$

sujeito a:

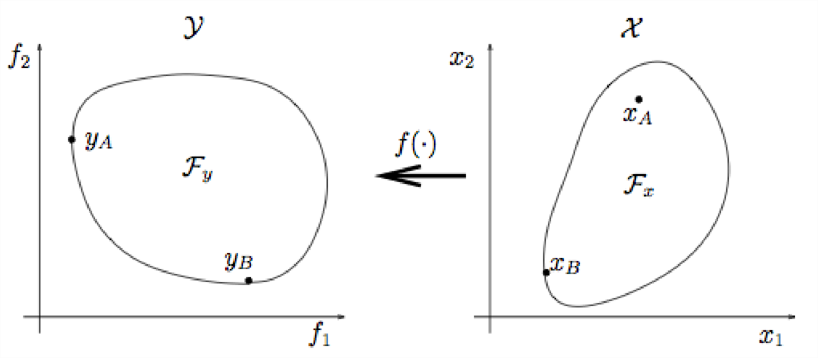
$$\mathcal{F}_x = \begin{cases} g_i(x) \leq 0 \; \forall i = 1, ..., p \\ h_j(x) = 0 \; \forall j = 1, ..., q \\ x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Problema de Otimização Multi-objetivo ou Vetorial

Notação:

- $\mathcal{X}$: Espaço das variáveis de decisão ou parâmetros de otimização.
- $\mathcal{F}_x$: O conjunto dos pontos factíveis, subconjunto do conjunto $\mathcal{X}$.
- $\mathcal{Y}$: Espaço dos "objetivos", isto é, o espaço no qual se representa a imagem da função $f(.)$.
- $\mathcal{F}_y$: O conjunto imagem da função $f(.)$ restrita ao domínio $\mathcal{F}_x$.

Problema de Otimização Multi-objetivo ou Vetorial



- O vetor de funções-objetivo devem ser minimizadas simultaneamente, mas em geral são conflitantes (ou contraditórias): a minimização de um objetivo implica na maximização de outro.
- O conjunto solução é normalmente grande (em alguns casos é infinito).
- Questões:
  - Como caracterizar as soluções de um problema de otimização multi-objetivo?
  - Quais critérios utilizar para comparar e ordenar tais soluções?

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Problema de Otimização Multi-objetivo ou Vetorial

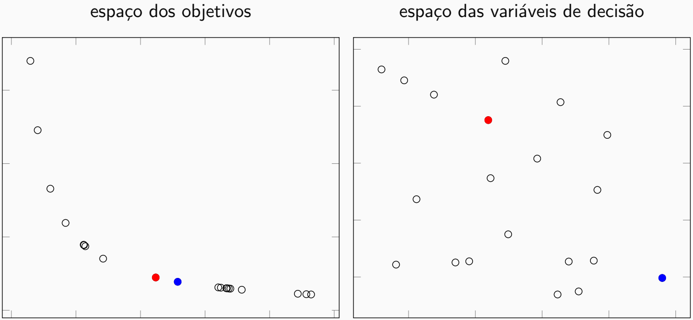
- O vetor de funções-objetivo devem ser minimizadas simultaneamente, mas em geral são conflitantes (ou contraditórias): a minimização de um objetivo implica na maximização de outro.
- O conjunto solução é normalmente grande (em alguns casos é infinito).
- Questões:
  - Como caracterizar as soluções de um problema de otimização multi-objetivo?
  - Quais critérios utilizar para comparar e ordenar tais soluções?

Problema de Otimização Multi-objetivo ou Vetorial

- O vetor de funções-objetivo devem ser minimizadas simultaneamente, mas em geral são conflitantes (ou contraditórias): a minimização de um objetivo implica na maximização de outro.
- O conjunto solução é normalmente grande (em alguns casos é infinito).
- Questões:
  - Como caracterizar as soluções de um problema de otimização multi-objetivo?
  - Quais critérios utilizar para comparar e ordenar tais soluções?

Problema de Otimização Multi-objetivo ou Vetorial

- O vetor de funções-objetivo devem ser minimizadas simultaneamente, mas em geral são conflitantes (ou contraditórias): a minimização de um objetivo implica na maximização de outro.
- O conjunto solução é normalmente grande (em alguns casos é infinito).
- Questões:
  - Como caracterizar as soluções de um problema de otimização multi-objetivo?
  - Quais critérios utilizar para comparar e ordenar tais soluções?



Exemplo onde dois pontos em diferentes regiões no espaço de decisão são mapeados em dois pontos adjacentes na fronteira Pareto.

(Conjuntos Ordenados)
Um conjunto C é ordenado de acordo com uma relação de ordem "$\preceq$", se dados quaisquer dois elementos $x, y \in C$ é sempre verdade que $x \preceq y$ ou $y \preceq x$ e as seguintes propriedades com relação a "$\preceq$" são válidas:

1. $x \preceq x$ (reflexividade)
2. $x \preceq y$ e $y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$ (transitividade)
3. $x \preceq y$ e $y \preceq x \Rightarrow x = y$ (anti-simetria)

Ordenamento de Soluções

(Conjuntos Parcialmente Ordenados)
Diz-se ainda que C é parcialmente ordenado se valem as propriedades (1), (2) e (3) mas nem sempre $x \preceq y$ ou $y \preceq x$, isto é, nem sempre x e y são comparáveis.

- O caso mono-objetivo é fundamentalmente diferente do caso multi-objetivo devido à propriedade de ordenamento das soluções:.
- Conjunto ordenado: $\mathbb{R}$. $(\leq)$
- Conjunto parcialmente ordenado: $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Ordenamento de Soluções

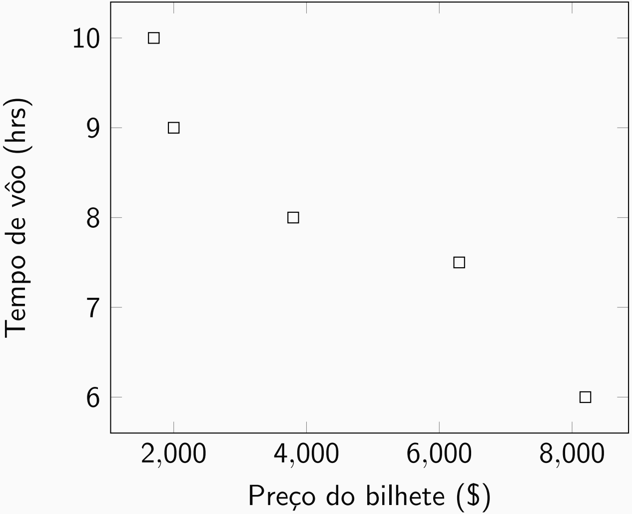
(Conjuntos Parcialmente Ordenados)
Diz-se ainda que C é parcialmente ordenado se valem as propriedades (1), (2) e (3) mas nem sempre $x \preceq y$ ou $y \preceq x$, isto é, nem sempre x e y são comparáveis.

- O caso mono-objetivo é fundamentalmente diferente do caso multi-objetivo devido à propriedade de ordenamento das soluções:.
- Conjunto ordenado: $\mathbb{R}$. $(\leq)$
- Conjunto parcialmente ordenado: $\mathbb{R}^n, \; n \geq 2$.

(Conjuntos Parcialmente Ordenados)
Diz-se ainda que C é parcialmente ordenado se valem as propriedades (1), (2) e (3) mas nem sempre $x \preceq y$ ou $y \preceq x$, isto é, nem sempre x e y são comparáveis.

- O caso mono-objetivo é fundamentalmente diferente do caso multi-objetivo devido à propriedade de ordenamento das soluções:.
- Conjunto ordenado: $\mathbb{R}$. $(\leq)$
- Conjunto parcialmente ordenado: $\mathbb{R}^n, \ n \geq 2$.

Problema de Otimização Multi-objetivo ou Vetorial



Exemplo de um conjunto de opções de bilhetes aéreos.

Ordenamento de Soluções

A seguinte relação de ordem, $\prec$, é definida para vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{u} \prec \mathbf{v} \iff \mathbf{u} \leq \mathbf{v} \text{ and } \mathbf{u} \neq \mathbf{v}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \leq \mathbf{v} \quad &\iff \quad u_i \leq v_i, \text{ for all } i = 1, \ldots, n \\ \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \quad &\iff \quad \exists i \in \{1, \ldots, n\} : \ u_i \neq v_i \end{aligned}$$

Ordenamento de Soluções

Considerem-se os vetores $x, y, z \in \mathbb{R}^3$:

$$x = [3\ 5\ 7]$$
$$y = [2\ 4\ 6]$$
$$z = [3\ 4\ 5]$$

Verifique que não há uma ordenação total dos vetores x, y, z.

Problema de Otimização Multi-objetivo ou Vetorial

Um problema de otimização vetorial, pode descrito por um modelo geral como segue:

$$\min \ f(x) \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^m$$

sujeito a:

$$\mathcal{F}_x = \begin{cases} g_i(x) \leq 0 \ \forall i = 1, ..., p \\ h_j(x) = 0 \ \forall j = 1, ..., q \\ x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Dominância

Seja $x_1, x_2 \in \mathcal{F}_x$, dizemos que x_1 domina o ponto x_2 se $f(x_1) \leq f(x_2)$ e $f(x_1) \neq f(x_2)$, ou seja, em pelo menos um dos objetivos a desigualdade é atendida de forma estrita. Esta relação de dominância é escrita como $f(x_1) \prec f(x_2)$.

- Seja $x_1, x_2 \in \mathcal{F}_x$, dizemos que os mesmos são não dominados entre si, ou incomparáveis entre si, se $f(x_1) \nprec f(x_2)$ e $f(x_2) \nprec f(x_1)$

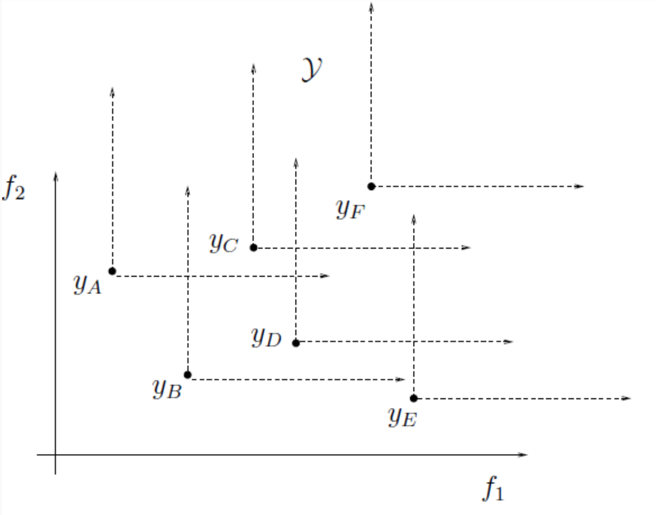
Dominância

Seja $x_1, x_2 \in \mathcal{F}_x$, dizemos que x_1 domina o ponto x_2 se $f(x_1) \leq f(x_2)$ e $f(x_1) \neq f(x_2)$, ou seja, em pelo menos um dos objetivos a desigualdade é atendida de forma estrita. Esta relação de dominância é escrita como $f(x_1) \prec f(x_2)$.

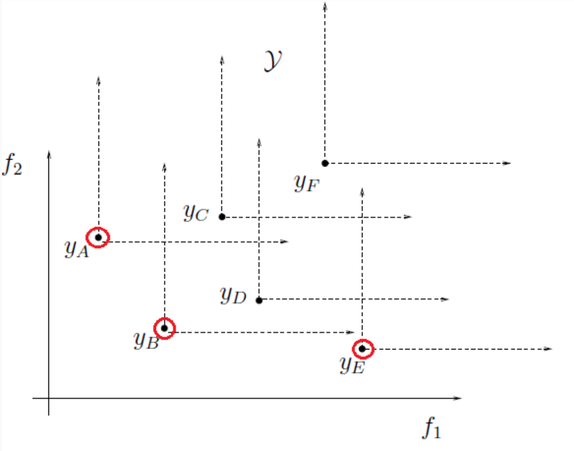
- Seja $x_1, x_2 \in \mathcal{F}_x$, dizemos que os mesmos são não dominados entre si, ou incomparáveis entre si, se $f(x_1) \nprec f(x_2)$ e $f(x_2) \nprec f(x_1)$

UFOP Universidade Federal de Ouro Preto

Dominância



Dominância



◯ $\rightarrow$ soluções não dominadas.

Dominância

Otimalidade local (Dominância)
O ponto $x^* \in \mathcal{F}_x$ é localmente Pareto-ótimo em relação a $f(.) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ se não existe $x \in V_\epsilon(x^*) \cap \mathcal{F}_x$ que domina x^*.

Otimalidade global (Dominância)
O ponto $x^* \in \mathcal{F}_x$ é globalmente Pareto-ótimo em relação a $f(.) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ se não existe $x \in \mathcal{F}_x$ que domina x^*.

Dominância

Otimalidade local (Dominância)
O ponto $x^* \in \mathcal{F}_x$ é localmente Pareto-ótimo em relação a $f(.) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ se não existe $x \in V_\epsilon(x^*) \cap \mathcal{F}_x$ que domina x^*.

Otimalidade global (Dominância)
O ponto $x^* \in \mathcal{F}_x$ é globalmente Pareto-ótimo em relação a $f(.) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ se não existe $x \in \mathcal{F}_x$ que domina x^*.

Conjunto Pareto-ótimo
Dado um problema de otimização multi-objetivo, o seu conjunto Pareto-ótimo global é definido como:

$$\mathcal{X}^* = \{x^* \in \mathcal{F}_x | \nexists\ x \in \mathcal{F}_x \text{ tal que } f(x) \prec f(x^*)\}$$

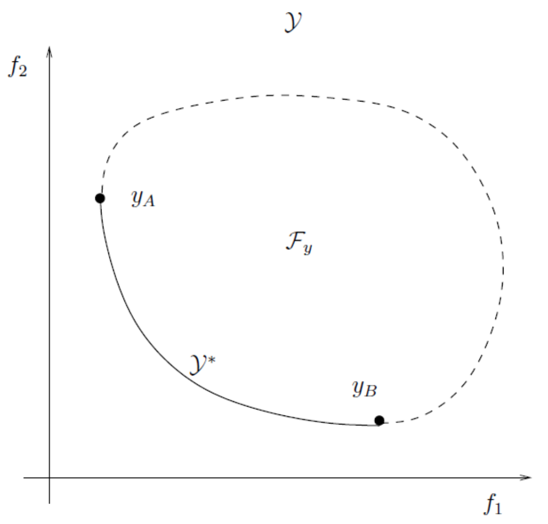
O conjunto Pareto-ótimo, chamado também como conjunto das soluções eficientes do problema multi-objetivo.

Fronteira Pareto-ótima

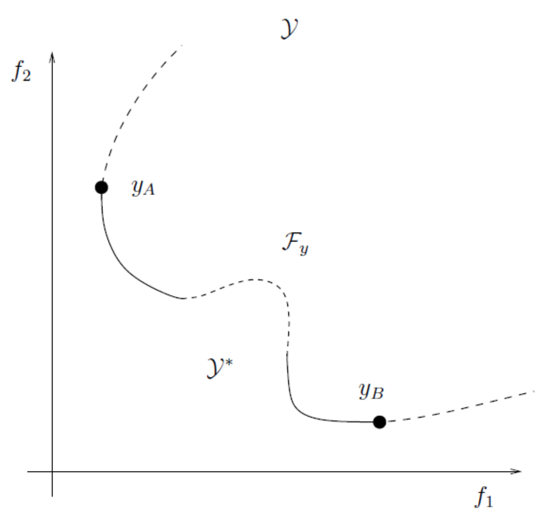
A fronteira Pareto-ótima global $\mathcal{Y}^*$ do problema de otimização multi-objetivo corresponde à imagem do conjunto Pareto-ótimo global no espaço de objetivos, isto é, $\mathcal{Y}^* = f(\mathcal{X}^*)$:

$$\mathcal{Y}^* = \{y = f(x^*) : x^* \in \mathcal{X}^*\}$$

Conjunto Pareto



Conjunto Pareto



Conjunto Pareto

- A cardinalidade de $\mathcal{X}^*$ pode ser muito elevada ou mesmo igual a infinito;
- Do ponto de vista prático, é mais interessante estimar um conjunto de soluções eficientes de tamanho limitado, porém representativo de $\mathcal{X}^*$.
- A fronteira Pareto-ótimo pode ser definido de forma gráfica, definindo:

$$C^{-}(\zeta) = \{y = f(x) \in \mathbb{R}^m : f(x) \leq \zeta\}$$

temos que

$$\mathcal{Y}^* = \{y^* = f(x^*) : C^{-}(y^*) \cap f(\mathcal{F}_x) = \{y^*\}\}$$

Conjunto Pareto

- Duas soluções $x?\imath, x'', \in \mathcal{X}$ são equivalentes se $f(x?\imath) = f(x'')$;
- Um conjunto completo de soluções eficientes é qualquer $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$, tal que $\mathcal{Y}^* = f(\mathcal{X}')$.
- Um conjunto completo minimal de soluções eficientes é um conjunto completo sem soluções equivalentes.
- Um conjunto completo maximal de soluções eficientes é único.
- Um conjunto completo minimal de soluções eficientes não é único.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Não Dominância

Pseudo-código

$P \leftarrow$ Pontos
$N \leftarrow \emptyset$
For $p \in P$ **do**
  If $\forall q \in P - \{p\},\ q \not\prec p$ **then**
    $N \leftarrow N \cup p$
  end-if
end-for
return N

Exemplo:

Considere a tabela a seguir:

	f1	f2
A	8	5
B	9	2
C	12	1
D	11	2
E	16	2

Compare as soluções usando o conceito de dominância Pareto.

Solução Utópica
A solução utópica u do problema de otimização multi-objetivo, é definida como:

$$u_j = f_j(x^j), j = 1, \ldots, m,$$

onde

$$x^j = \arg\min \; f_j(x) : x \in \mathcal{F}_x$$

Solução Anti-utópica
A solução anti-utópica (nadir) $\tilde{u}$ do problema de otimização multi-objetivo, de forma análoga é definida como:

$$\tilde{u}_j = f_j(\tilde{x}^j), j = 1, \ldots, m,$$

onde

$$\tilde{x}^j = \arg\max \; f_j(x) : x \in \mathcal{F}_x$$

Solução Utópica
A solução utópica u do problema de otimização multi-objetivo, é definida como:

$$u_j = f_j(x^j), j = 1, \ldots, m,$$

onde

$$x^j = \arg\min \ f_j(x) : x \in \mathcal{F}_x$$

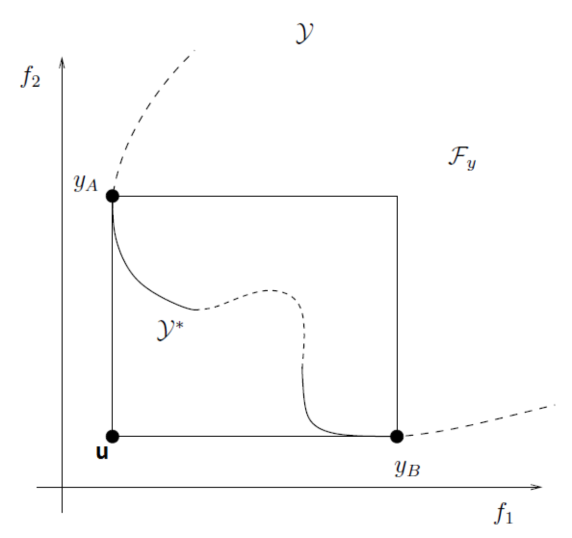
Solução Anti-utópica
A solução anti-utópica (nadir) $\tilde{u}$ do problema de otimização multi-objetivo, de forma análoga é definida como:

$$\tilde{u}_j = f_j(\tilde{x}^j), j = 1, \ldots, m,$$

onde

$$\tilde{x}^j = \arg\max \ f_j(x) : x \in \mathcal{F}_x$$

Características da fronteira Pareto



Exemplos

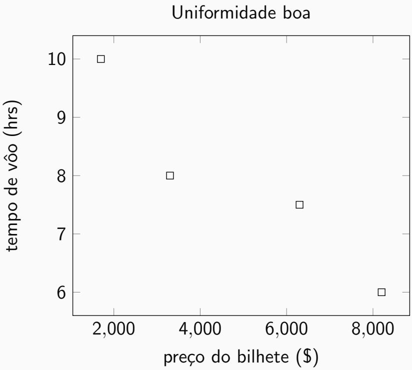
Fronteiras Pareto-ótimas quando $f(\mathcal{F}_x)$ é convexo:

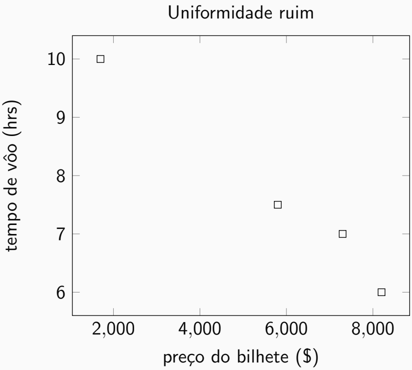
- minimize f_1, minimize f_2;
- minimize f_1, maximize f_2;
- maximize f_1, minimize f_2;
- maximize f_1, maximize f_2.

Características da fronteira Pareto

- Representatividade da fronteira Pareto;
  - Convergência;
  - Diversidade;
  - Uniformidade.
- Impacta diretamente o tomador de decisão;
- A relação de compromisso desejada deve ser um critério usado para a escolha do método de otimização multi-objetivo.

Problema de Otimização Multi-objetivo ou Vetorial





Uniformidade no espaço dos objetivos.

Caracterização Analítica e Relações de Dominância

- Problema de Otimização Multi-objetivo ou Vetorial
- Ordenamento de Soluções
- Conjunto Pareto-Ótimo
- Relações adicionais de dominância
- Métodos de Otimização

Exemplos

- A relação de dominância Pareto não oferece muita flexibilidade:
  - inclusão de preferências do decisor;
  - *tradeoff* e resolução desejados pelo usuário.
- Por essa razão, várias relações adicionais foram propostas:
- dominância lexicográfica;
- dominância extrema ou extremo-dominância;
- max-dominância;
- cone dominância;
- α-dominância;
- ϵ-dominância;
- Lorenz dominância;
- Volume-dominância;
- g-dominância; ...

Exemplos

- A relação de dominância Pareto não oferece muita flexibilidade:
  - inclusão de preferências do decisor;
  - *tradeoff* e resolução desejados pelo usuário.
- Por essa razão, várias relações adicionais foram propostas:
- dominância lexicográfica;
- dominância extrema ou extremo-dominância;
- max-dominância;
- cone dominância;
- α-dominância;
- ϵ-dominância;
- Lorenz dominância;
- Volume-dominância;
- g-dominância; ...

Definição
Sejam $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2} \in f(\mathcal{F}_x) \subset \mathbb{R}^m$, dizemos que $\mathbf{y_1}$ domina $\mathbf{y_2}$ lexicograficamente se existe um índice $l \leq m$ tal que $y_{1,i} = y_{2,i}$ para $i = 1, \ldots, l-1$ e $y_{1,l} < y_{2,l}$. As relações entre $y_{1,i}$ e $y_{2,i}$ para $i > l$ são ignoradas. O índice l representa o primeiro índice para o qual $y_{1,i} < y_{2,i}$. Essa relação é escrita como $\mathbf{y_1} \prec_{lex} \mathbf{y_2}$.

Otimalidade lexicográfica A solução x^* é ótima no sentido lexicográfico em relação a $f(.) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ se não existe x tal que $f(x) \prec_{lex} f(x^*)$.

Definição
Sejam $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2} \in f(\mathcal{F}_x) \subset \mathbb{R}^m$, dizemos que $\mathbf{y_1}$ domina $\mathbf{y_2}$ lexicograficamente se existe um índice $l \leq m$ tal que $y_{1,i} = y_{2,i}$ para $i = 1, \ldots, l-1$ e $y_{1,l} < y_{2,l}$. As relações entre $y_{1,i}$ e $y_{2,i}$ para $i > l$ são ignoradas. O índice l representa o primeiro índice para o qual $y_{1,i} < y_{2,i}$. Essa relação é escrita como $\mathbf{y_1} \prec_{lex} \mathbf{y_2}$.

Otimalidade lexicográfica A solução x^* é ótima no sentido lexicográfico em relação a $f(.) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ se não existe x tal que $f(x) \prec_{lex} f(x^*)$.

Dominância lexicográfica

- A definição implica que há uma ordenação dos objetivos em ordem decrescente de preferência do decisor;
- A comparação de soluções considera essa ordenação lexicográfica das funções-objetivo.

Exemplo

Sejam:

$$\mathbf{y_1} = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$\mathbf{y_2} = (1, 2, 3, 9, 4, 9)$$

Estas duas soluções são não dominadas entre si, contudo, podemos dizer que $\mathbf{y_1} \prec_{lex} \mathbf{y_2}$.

- A definição implica que há uma ordenação dos objetivos em ordem decrescente de preferência do decisor;
- A comparação de soluções considera essa ordenação lexicográfica das funções-objetivo.

Exemplo

Sejam:

$$\mathbf{y_1} = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$\mathbf{y_2} = (1, 2, 3, 9, 4, 9)$$

Estas duas soluções são não dominadas entre si, contudo, podemos dizer que $\mathbf{y_1} \prec_{lex} \mathbf{y_2}$.

Dominância lexicográfica

Implicabilidade

$$\mathbf{y_1} \prec \mathbf{y_2} \Rightarrow \mathbf{y_1} \prec_{lex} \mathbf{y_2}$$

$$\mathbf{y_1} \prec_{lex} \mathbf{y_2} \not\Rightarrow \mathbf{y_1} \prec \mathbf{y_2}$$

Definição
Sejam $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2} \in f(\mathcal{F}_x) \subset \mathbb{R}^m$, e um vetor de pesos $\lambda \in \mathbb{R}^m$ com $\sum \lambda_i = 1$ dizemos que $\mathbf{y_1}$ extremo-domina $\mathbf{y_2}$ se e somente se

$$\sum \lambda_i y_{1,i} < \sum \lambda_i y_{2,i}$$

. Essa relação é escrita como $\mathbf{y_1} \prec_\lambda \mathbf{y_2}$.

Otimalidade Extema A solução x^* é ótima no sentido extremo em relação a $f(.) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ se não existe x tal que $f(x) \prec_\lambda f(x^*)$.

Dominância Extrema

Definição
Sejam $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2} \in f(\mathcal{F}_x) \subset \mathbb{R}^m$, e um vetor de pesos $\lambda \in \mathbb{R}^m$ com $\sum \lambda_i = 1$ dizemos que $\mathbf{y_1}$ extremo-domina $\mathbf{y_2}$ se e somente se

$$\sum \lambda_i y_{1,i} < \sum \lambda_i y_{2,i}$$

. Essa relação é escrita como $\mathbf{y_1} \prec_\lambda \mathbf{y_2}$.

Otimalidade Extema A solução x^* é ótima no sentido extremo em relação a $f(.) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ se não existe x tal que $f(x) \prec_\lambda f(x^*)$.

Dominância Extrema

Implicabilidade

$$\mathbf{y_1} \prec \mathbf{y_2} \Rightarrow \mathbf{y_1} \prec_\lambda \mathbf{y_2}$$

$$\mathbf{y_1} \prec_\lambda \mathbf{y_2} \nRightarrow \mathbf{y_1} \prec \mathbf{y_2}$$

Essa definição permite a inclusão de preferências do decisor, modeladas no vetor de pesos.

Implicabilidade

$$\mathbf{y_1} \prec \mathbf{y_2} \Rightarrow \mathbf{y_1} \prec_\lambda \mathbf{y_2}$$

$$\mathbf{y_1} \prec_\lambda \mathbf{y_2} \not\Rightarrow \mathbf{y_1} \prec \mathbf{y_2}$$

Essa definição permite a inclusão de preferências do decisor, modeladas no vetor de pesos.

Exemplo

Sejam:

$$\mathbf{y_1} = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$\mathbf{y_2} = (1, 2, 3, 9, 4, 9)$$

Suponha que os objetivos 1, 3 e 5 são 20% mais importantes do que objetivos 2, 4 e 6. Assim:

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = 0,18$$

$$\lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_6 = 0,15$$

Estas duas soluções são não dominadas entre si, contudo, podemos dizer que $\mathbf{y_1} \prec_\lambda \mathbf{y_2}$.

ϵ-Dominância

Definição

Sejam $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2} \in f(\mathcal{F}_x) \subset \mathbb{R}^m$, dizemos que $\mathbf{y_1}$ ϵ-domina $\mathbf{y_2}$ se e somente se $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$ e $\epsilon > 0$, temos $y_{1,i} - \epsilon < y_{2,i}$. Essa relação é escrita como $\mathbf{y_1} \prec_\epsilon \mathbf{y_2}$.

Implicabilidade

$$\mathbf{y_1} \prec \mathbf{y_2} \Rightarrow \mathbf{y_1} \prec_\epsilon \mathbf{y_2}$$

$$\mathbf{y_1} \prec_\epsilon \mathbf{y_2} \not\Rightarrow \mathbf{y_1} \prec \mathbf{y_2}$$

ϵ-Dominância

Definição

Sejam $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2} \in f(\mathcal{F}_x) \subset \mathbb{R}^m$, dizemos que $\mathbf{y_1}$ ϵ-domina $\mathbf{y_2}$ se e somente se $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$ e $\epsilon > 0$, temos $y_{1,i} - \epsilon < y_{2,i}$. Essa relação é escrita como $\mathbf{y_1} \prec_\epsilon \mathbf{y_2}$.

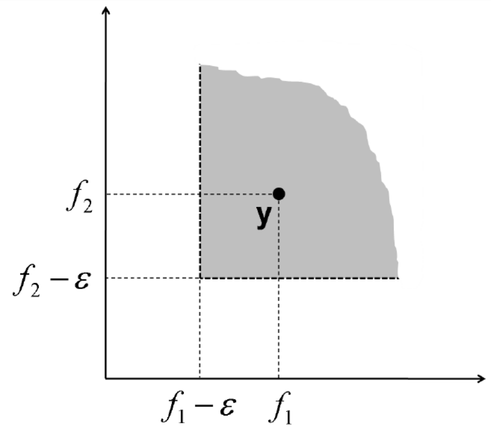
Implicabilidade

$$\mathbf{y_1} \prec \mathbf{y_2} \Rightarrow \mathbf{y_1} \prec_\epsilon \mathbf{y_2}$$

$$\mathbf{y_1} \prec_\epsilon \mathbf{y_2} \nRightarrow \mathbf{y_1} \prec \mathbf{y_2}$$

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

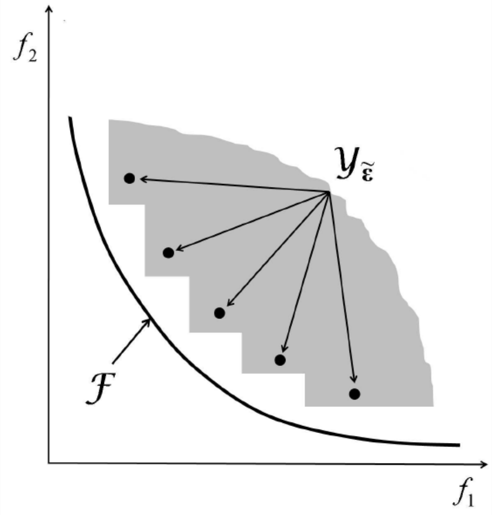
ϵ-Dominância



Características

- Permite regular simultaneamente convergência e diversidade das soluções estimadas em um único algoritmo;
- Possibilita ao decisor controlar a resolução (qualidade) do conjunto Pareto estimado;

ϵ-Dominância



Caracterização Analítica e Relações de Dominância

Problema de Otimização Multi-objetivo ou Vetorial

Ordenamento de Soluções

Conjunto Pareto-Ótimo

Relações adicionais de dominância

Métodos de Otimização

- O resultado final do processo de otimização multiobjetivo leva a um problema de decisão: o tomador de decisão deverá escolher entre o conjunto de alternativas, aquela que se mostra mais interessante.
  - funções de utilidade;
  - decisão multi-critério.

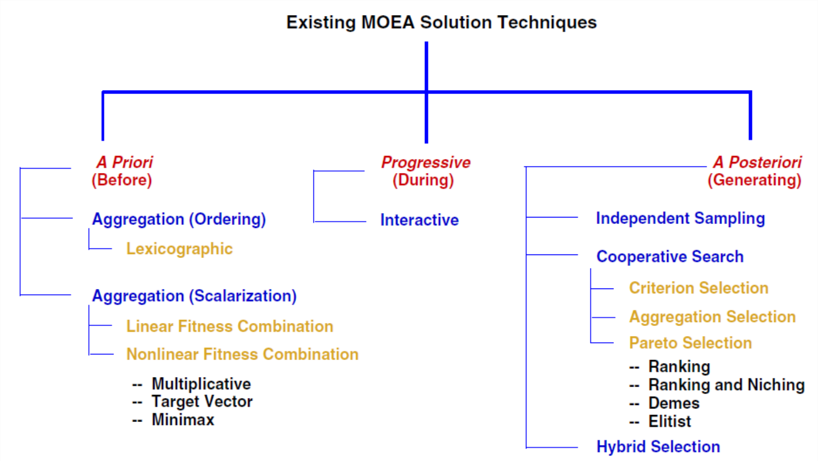
A priori
O trade-off entre as funções-objetivo é determinado (e modelado) antes da execução do método de otimização. O problema multi-objetivo é transformado num problema mono-objetivo e uma única solução é gerada. Alterando a relação de trade-off entre os objetivos, uma nova solução pode ser gerada, até que o decisor esteja satisfeito.
(decide $\Rightarrow$ otimiza)

Progressivo
Nos métodos de otimização progressivos, consultas ao decisor durante a otimização orientam a busca na direção da solução de trade-off que satisfaz o decisor. Requer a atenção do decisor durante o processo de otimização.
(decide $\Rightarrow$ otimiza)

A posteriori
São métodos para buscar por um conjunto de soluções representativo no espaço de objetivos. O resultado é um conjunto de alternativas que são oferecidas ao decisor após a otimização. Não é necessária a modelagem de preferências do decisor, mas o processo de otimização é mais complexo e computacionalmente caro, porque várias soluções devem ser geradas.
(otimiza $\Rightarrow$ decide)

A escolha do método depende do tomador de decisão e do problema. Entretanto, meta-heurísticas multi-objetivo usualmente adotam métodos a posteriori.

Métodos Multi-critério



Condições de otimalidade Pareto

As condições de otimalidade descritas por Karush, Kuhn e Tucker podem ser estendidas para problemas multi-objetivo, fornecendo as condições necessárias de KKT para eficiência:

Condições necessárias de Karush-Kuhn-Tucker para eficiência

$x^* \in \mathcal{F}$ satisfaz as condições necessárias de Karush-Kuhn-Tucker para eficiência se existem multiplicadores $\mu_i^* \geq 0$, λ_j^*, $\nu^* \geq 0$, com pelo menos uma desigualdade estrita, tais que:

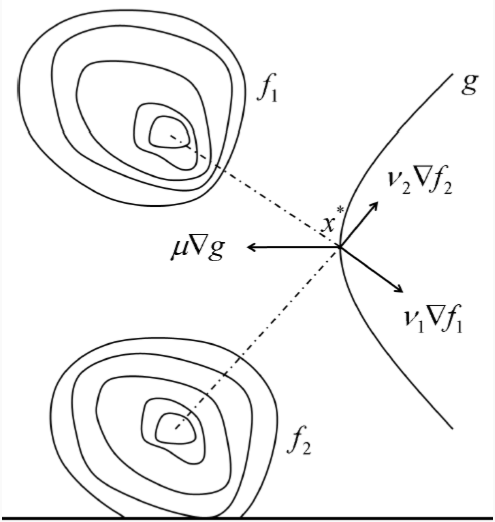
$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{m} \nu_k^* \nabla f_k(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^* \nabla h_j(x^*) = 0 \\ \mu_i^* g_i(x^*)^* = 0 \\ g_i(x^*) \leq 0, \;\; i = 1, \ldots, p \\ h_j(x^*) = 0, \;\; j = 1, \ldots, q \end{cases}$$

As condições de otimalidade descritas por Karush, Kuhn e Tucker podem ser estendidas para problemas multi-objetivo, fornecendo as condições necessárias de KKT para eficiência:

Condições necessárias de Karush-Kuhn-Tucker para eficiência
$x^* \in \mathcal{F}$ satisfaz as condições necessárias de Karush-Kuhn-Tucker para eficiência se existem multiplicadores $\mu_i^* \geq 0$, λ_j^*, $\nu^* \geq 0$, com pelo menos uma desigualdade estrita, tais que:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{m} \nu_k^* \nabla f_k(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^* \nabla h_j(x^*) = 0 \\ \mu_i^* g_i(x^*)^* = 0 \\ g_i(x^*) \leq 0, \ i = 1, \ldots, p \\ h_j(x^*) = 0, \ j = 1, \ldots, q \end{cases}$$

Condições de otimalidade Pareto



Referências:

- Takahashi, R.H.C.; Notas de Aula: Otimização Escalar e Vetorial. http://www.decom.ufop.br/moreira/disciplinas/OVE.zip
- J. A. Ramírez, F. Campelo, F. G. Guimarães, Lucas S. Batista, Ricardo H. C. Takahashi, Notas de Aula de Otimização, 2010. http://www.decom.ufop.br/moreira/disciplinas/Notas1.pdf
- Izmailov, A, Solodov, V.M , Otimização Vol.1 Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade. Editora IMPA, 2012.
- Izmailov, A, Solodov, V.M , Otimização Vol. 2. Métodos Computacionais. Editora IMPA, 2012.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto