

PCC175 - TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO

AULA 03 - GERAÇÃO DO CONJUNTO DE SOLUÇÕES EFICIENTES

Gladston Juliano Prates Moreira

email: gladston@ufop.edu.br

CSILab, Departamento de Computação
Universidade Federal de Ouro Preto

28 de setembro de 2026

MÉTODOS ESCALARES

Métodos Escalares

Apresentação

Método da soma ponderada

Método ϵ -Restrito

Método ϵ -restrito híbrido

Método da distância a um ponto de referência

Método *goal attainment*

Problema de Otimização Multi-objetivo ou Vetorial

Um problema de otimização vetorial, pode descrito por um modelo geral como segue:

$$\min f(x) \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^m$$

sujeito a:

$$\mathcal{F}_x = \begin{cases} g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \\ h_j(x) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, q \\ x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

- ▶ Método da soma ponderada - Problema (P_λ);
- ▶ Método ϵ -restrito - Problema (P_ϵ);
- ▶ Método ϵ -restrito híbrido;
- ▶ Método de programação por metas;
- ▶ Método goal attainment;
- ▶ Programação de compromisso;
- ▶ Método da distância a um ponto de referência;
- ▶ Métodos Fuzzy.

Métodos Escalares

Apresentação

Método da soma ponderada

Método ϵ -Restrito

Método ϵ -restrito híbrido

Método da distância a um ponto de referência

Método *goal attainment*

Problema (P_λ)

- ▶ Esta é a abordagem mais óbvia e “ingênua” para otimização multi-objetivo;
- ▶ O problema multi-objetivo original é transformado num problema mono-objetivo, podendo ser resolvido por qualquer método de otimização;
- ▶ A estratégia adota uma soma ponderada dos objetivos.

Problema (P_λ)

- ▶ Esta é a abordagem mais óbvia e “ingênua” para otimização multi-objetivo;
- ▶ O problema multi-objetivo original é transformado num problema mono-objetivo, podendo ser resolvido por qualquer método de otimização;
- ▶ A estratégia adota uma soma ponderada dos objetivos.

Problema (P_λ)

- ▶ Esta é a abordagem mais óbvia e “ingênua” para otimização multi-objetivo;
- ▶ O problema multi-objetivo original é transformado num problema mono-objetivo, podendo ser resolvido por qualquer método de otimização;
- ▶ A estratégia adota uma soma ponderada dos objetivos.

Formulação

O problema de otimização vetorial, é transformado no Problema P_λ :

$$\min \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$$

sujeito a:

$$\mathcal{F}_x = \begin{cases} g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \\ h_j(x) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, q \\ x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

com $\{\lambda \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}$.

No caso de duas funções objetivos, temos:

$$\min \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$$

No espaço de objetivos, esse problema corresponde a encontrar a menor constante C possível da equação:

$$f_2(x) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} f_1(x) + C$$

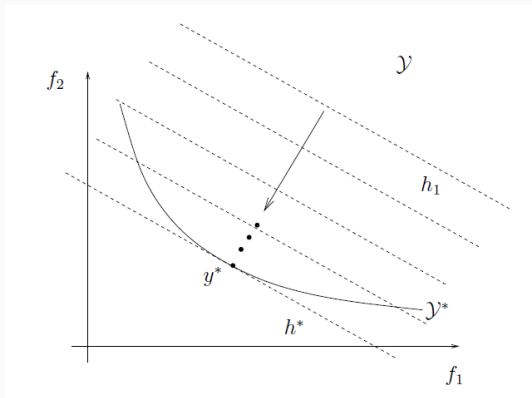
No caso de duas funções objetivos, temos:

$$\min \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$$

No espaço de objetivos, esse problema corresponde a encontrar a menor constante C possível da equação:

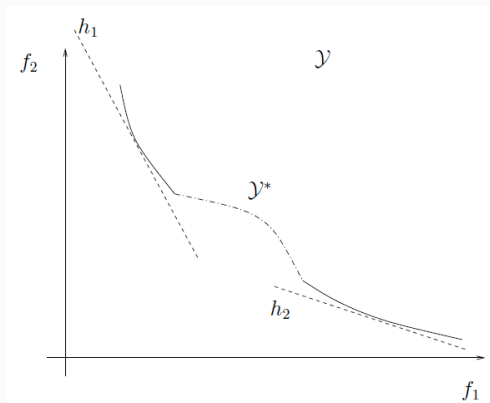
$$f_2(x) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} f_1(x) + C$$

Problema (P_λ)



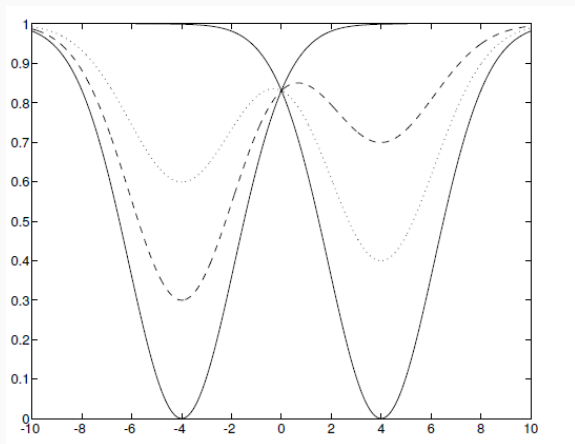
O vetor de ponderações λ define a inclinação da reta. O processo de minimização faz a busca da reta que se encontra a mínima distância da origem do espaço dos objetivos.

Problema (P_λ)



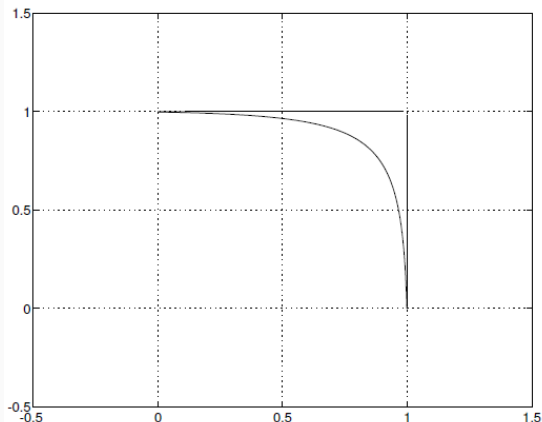
O conjunto de Pareto $\mathcal{Y}^*$ possui trechos nos quais todos os pontos possuem reta-suporte, e outros trechos, nos quais nenhum ponto admite reta-suporte.

Problema (P_λ) - Exemplo



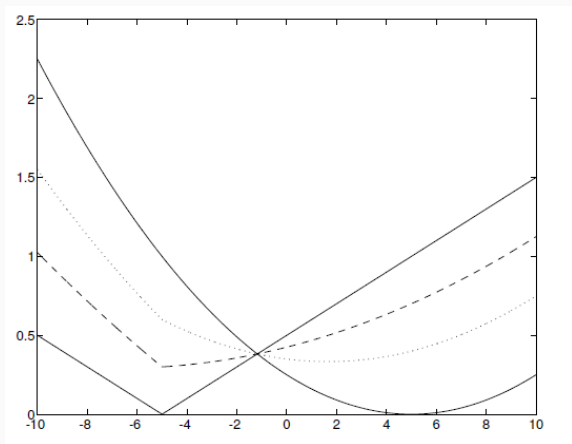
Representação das funções-objetivo f_1, f_2 e das funções ponderadas $0.7f_1 + 0.3f_2$ e $0.4f_1 + 0.6f_2$.

Problema (P_λ) - Exemplo



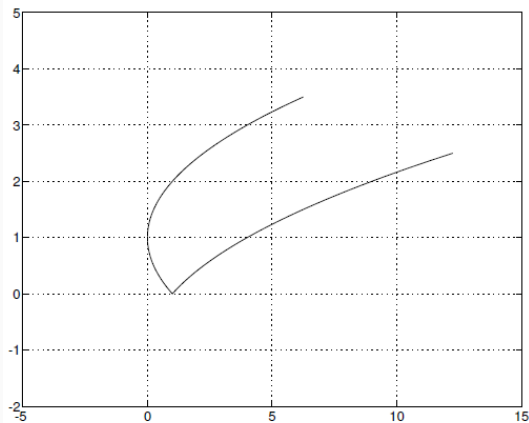
Representação da região $\mathcal{F}_Y$ (espaço de objetivos).

Problema (P_λ) - Exemplo



Representação das funções-objetivo f_1, f_2 e das funções ponderadas $0.7f_1 + 0.3f_2$ e $0.4f_1 + 0.6f_2$.

Problema (P_λ) - Exemplo



Representação da região $\mathcal{F}_Y$ (espaço de objetivos).

Problema (P_λ)

- ▶ Vantagens:

- ▶ Computacionalmente muito simples;
- ▶ Se o problema tem imagem convexa, é possível gerar dessa forma, variando o vetor λ , todo o conjunto de soluções eficientes do problema;
- ▶ Aplica qualquer mecanismo de otimização que seja capaz de resolver cada problema mono-objetivo individualmente.

- ▶ Desvantagens:

- ▶ Várias ponderações podem estar associadas à mesma solução eficiente;
- ▶ Não se aplica a problemas não convexos, nos quais talvez não seja possível gerar várias soluções eficientes;

Problema (P_λ)

► Vantagens:

- Computacionalmente muito simples;
- Se o problema tem imagem convexa, é possível gerar dessa forma, variando o vetor λ , todo o conjunto de soluções eficientes do problema;
- Aplica qualquer mecanismo de otimização que seja capaz de resolver cada problema mono-objetivo individualmente.

► Desvantagens:

- Várias ponderações podem estar associadas à mesma solução eficiente;
- Não se aplica a problemas não convexos, nos quais talvez não seja possível gerar várias soluções eficientes;

Problema (P_λ)

► Vantagens:

- Computacionalmente muito simples;
- Se o problema tem imagem convexa, é possível gerar dessa forma, variando o vetor λ , todo o conjunto de soluções eficientes do problema;
- Aplica qualquer mecanismo de otimização que seja capaz de resolver cada problema mono-objetivo individualmente.

► Desvantagens:

- Várias ponderações podem estar associadas à mesma solução eficiente;
- Não se aplica a problemas não convexos, nos quais talvez não seja possível gerar várias soluções eficientes;

Problema (P_λ)

► Vantagens:

- Computacionalmente muito simples;
- Se o problema tem imagem convexa, é possível gerar dessa forma, variando o vetor λ , todo o conjunto de soluções eficientes do problema;
- Aplica qualquer mecanismo de otimização que seja capaz de resolver cada problema mono-objetivo individualmente.

► Desvantagens:

- Várias ponderações podem estar associadas à mesma solução eficiente;
- Não se aplica a problemas não convexos, nos quais talvez não seja possível gerar várias soluções eficientes;

Problema (P_λ)

- ▶ Vantagens:

- ▶ Computacionalmente muito simples;
- ▶ Se o problema tem imagem convexa, é possível gerar dessa forma, variando o vetor λ , todo o conjunto de soluções eficientes do problema;
- ▶ Aplica qualquer mecanismo de otimização que seja capaz de resolver cada problema mono-objetivo individualmente.

- ▶ Desvantagens:

- ▶ Várias ponderações podem estar associadas à mesma solução eficiente;
- ▶ Não se aplica a problemas não convexos, nos quais talvez não seja possível gerar várias soluções eficientes;

Métodos Escalares

Apresentação

Método da soma ponderada

Método ϵ -Restrito

Método ϵ -restrito híbrido

Método da distância a um ponto de referência

Método *goal attainment*

- ▶ Essa abordagem transforma o problema multi-objetivo em um problema mono-objetivo com restrições adicionais;
- ▶ Um dos objetivos é escolhido para ser minimizado;
- ▶ Os demais objetivos são transformados em restrições de desigualdade.

- ▶ Essa abordagem transforma o problema multi-objetivo em um problema mono-objetivo com restrições adicionais;
- ▶ Um dos objetivos é escolhido para ser minimizado;
- ▶ Os demais objetivos são transformados em restrições de desigualdade.

- ▶ Essa abordagem transforma o problema multi-objetivo em um problema mono-objetivo com restrições adicionais;
- ▶ Um dos objetivos é escolhido para ser minimizado;
- ▶ Os demais objetivos são transformados em restrições de desigualdade.

Formulação

O problema de otimização vetorial, é transformado no Problema P_ϵ :

$$\min f_i(x)$$

sujeito a:

$$\mathcal{F}_x = \begin{cases} f_k(x) \leq \epsilon_k \quad k = 1, \dots, m, \quad k \neq i \\ g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \\ h_j(x) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, q \\ x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Problema (P_ϵ) - Exemplo

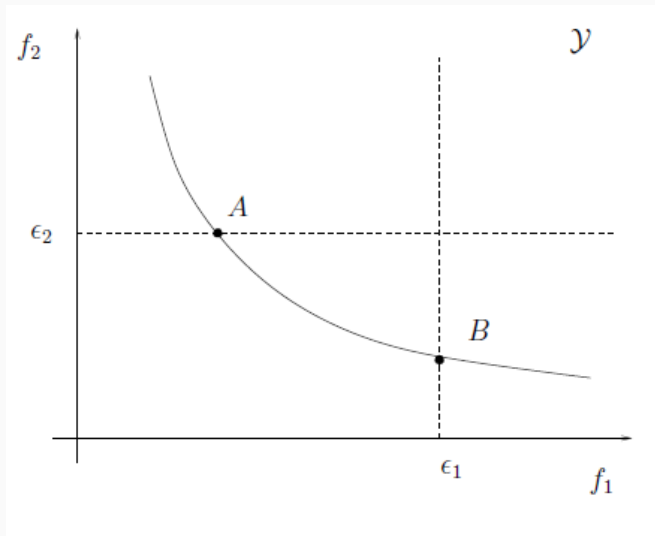
No caso de duas funções objetivos, temos:

$$\min f_1(x)$$

sujeito a:

$$\mathcal{F}_x = \begin{cases} f_2(x) \leq \epsilon \\ g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \\ h_j(x) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, q \\ x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

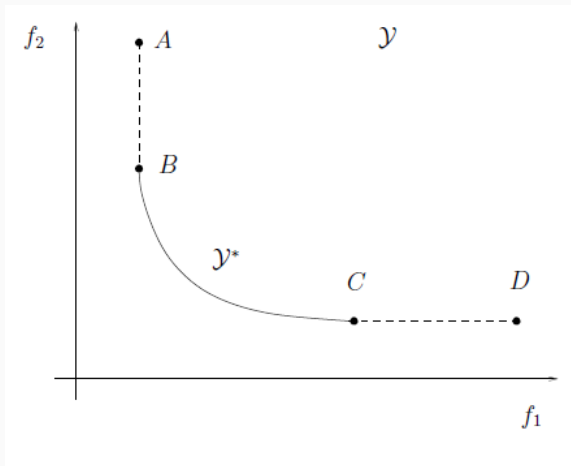
Problema P_ϵ - Exemplo



- ▶ Deficiência básica: a seleção dos reais ϵ_j que geram soluções eficientes não é tarefa trivial:
 - ▶ O ponto obtido pode não ser eficiente;
 - ▶ Os valores de ϵ_j podem tornar (P_ϵ) infactível.

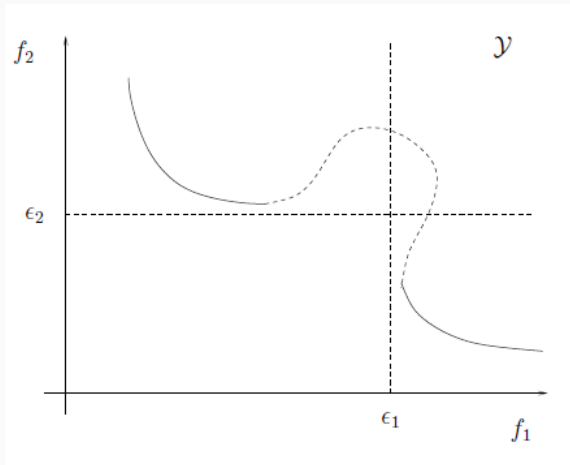
- ▶ Deficiência básica: a seleção dos reais ϵ_j que geram soluções eficientes não é tarefa trivial:
 - ▶ O ponto obtido pode não ser eficiente;
 - ▶ Os valores de ϵ_j podem tornar (P_ϵ) infactível.

Problema P_ϵ - Exemplo



Gera pontos não pertencentes ao conjunto de soluções eficientes

Problema P_ϵ - Exemplo



Dificuldade em gerar soluções factíveis.

Método ϵ -restrito:

1. Preliminarmente, é preciso encontrar valores adequados para inicializar o vetor ϵ . Isso é feito resolvendo os m problemas mono-objetivo. Obtêm-se assim os valores f_i^* , que são ótimos individuais de cada objetivo (os quais, agregados, compõem o vetor f^* , correspondente à solução utópica do problema).
2. Paralelamente, nessa mesma operação, são determinados os piores valores atingidos por cada objetivo quando um outro objetivo está em seu ótimo, formando o vetor f^o .
3. Cada problema é resolvido para vetores ϵ resultantes de um gerador de números aleatórios com distribuição de probabilidade uniforme, atendendo à restrição:

$$f^* \leq \epsilon \leq f^o.$$

Método ϵ -restrito:

1. Preliminarmente, é preciso encontrar valores adequados para inicializar o vetor ϵ . Isso é feito resolvendo os m problemas mono-objetivo. Obtêm-se assim os valores f_i^* , que são ótimos individuais de cada objetivo (os quais, agregados, compõem o vetor f^* , correspondente à solução utópica do problema).
2. Paralelamente, nessa mesma operação, são determinados os piores valores atingidos por cada objetivo quando um outro objetivo está em seu ótimo, formando o vetor f^o .
3. Cada problema é resolvido para vetores ϵ resultantes de um gerador de números aleatórios com distribuição de probabilidade uniforme, atendendo à restrição:

$$f^* \leq \epsilon \leq f^o.$$

Método ϵ -restrito:

1. Preliminarmente, é preciso encontrar valores adequados para inicializar o vetor ϵ . Isso é feito resolvendo os m problemas mono-objetivo. Obtêm-se assim os valores f_i^* , que são ótimos individuais de cada objetivo (os quais, agregados, compõem o vetor f^* , correspondente à solução utópica do problema).
2. Paralelamente, nessa mesma operação, são determinados os piores valores atingidos por cada objetivo quando um outro objetivo está em seu ótimo, formando o vetor f^o .
3. Cada problema é resolvido para vetores ϵ resultantes de um gerador de números aleatórios com distribuição de probabilidade uniforme, atendendo à restrição:

$$f^* \leq \epsilon \leq f^o.$$

- ▶ A variação dos ϵ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- ▶ Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas;
- ▶ Pode gerar pontos não pertencentes à fronteira Pareto-ótima;
- ▶ Pode gerar pontos em trechos específicos da fronteira Pareto-ótima;
- ▶ Quando o número de objetivos aumenta ($m > 2$), aumenta também a probabilidade de serem gerados problemas infactíveis;
- ▶ Aumenta o número de restrições do problema original;
- ▶ Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- ▶ Métodos de exclusão de regiões são em geral mais adequados.

- ▶ A variação dos ϵ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- ▶ Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas;
- ▶ Pode gerar pontos não pertencentes à fronteira Pareto-ótima;
- ▶ Pode gerar pontos em trechos específicos da fronteira Pareto-ótima;
- ▶ Quando o número de objetivos aumenta ($m > 2$), aumenta também a probabilidade de serem gerados problemas infactíveis;
- ▶ Aumenta o número de restrições do problema original;
- ▶ Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- ▶ Métodos de exclusão de regiões são em geral mais adequados.

- ▶ A variação dos ϵ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- ▶ Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas;
- ▶ Pode gerar pontos não pertencentes à fronteira Pareto-ótima;
- ▶ Pode gerar pontos em trechos específicos da fronteira Pareto-ótima;
- ▶ Quando o número de objetivos aumenta ($m > 2$), aumenta também a probabilidade de serem gerados problemas infactíveis;
- ▶ Aumenta o número de restrições do problema original;
- ▶ Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- ▶ Métodos de exclusão de regiões são em geral mais adequados.

- ▶ A variação dos ϵ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- ▶ Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas;
- ▶ Pode gerar pontos não pertencentes à fronteira Pareto-ótima;
- ▶ Pode gerar pontos em trechos específicos da fronteira Pareto-ótima;
- ▶ Quando o número de objetivos aumenta ($m > 2$), aumenta também a probabilidade de serem gerados problemas infactíveis;
- ▶ Aumenta o número de restrições do problema original;
- ▶ Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- ▶ Métodos de exclusão de regiões são em geral mais adequados.

- ▶ A variação dos ϵ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- ▶ Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas;
- ▶ Pode gerar pontos não pertencentes à fronteira Pareto-ótima;
- ▶ Pode gerar pontos em trechos específicos da fronteira Pareto-ótima;
- ▶ Quando o número de objetivos aumenta ($m > 2$), aumenta também a probabilidade de serem gerados problemas infactíveis;
- ▶ Aumenta o número de restrições do problema original;
- ▶ Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- ▶ Métodos de exclusão de regiões são em geral mais adequados.

- ▶ A variação dos ϵ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- ▶ Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas;
- ▶ Pode gerar pontos não pertencentes à fronteira Pareto-ótima;
- ▶ Pode gerar pontos em trechos específicos da fronteira Pareto-ótima;
- ▶ Quando o número de objetivos aumenta ($m > 2$), aumenta também a probabilidade de serem gerados problemas infactíveis;
- ▶ Aumenta o número de restrições do problema original;
- ▶ Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- ▶ Métodos de exclusão de regiões são em geral mais adequados.

- ▶ A variação dos ϵ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- ▶ Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas;
- ▶ Pode gerar pontos não pertencentes à fronteira Pareto-ótima;
- ▶ Pode gerar pontos em trechos específicos da fronteira Pareto-ótima;
- ▶ Quando o número de objetivos aumenta ($m > 2$), aumenta também a probabilidade de serem gerados problemas infactíveis;
- ▶ Aumenta o número de restrições do problema original;
- ▶ Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- ▶ Métodos de exclusão de regiões são em geral mais adequados.

- ▶ A variação dos ϵ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- ▶ Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas;
- ▶ Pode gerar pontos não pertencentes à fronteira Pareto-ótima;
- ▶ Pode gerar pontos em trechos específicos da fronteira Pareto-ótima;
- ▶ Quando o número de objetivos aumenta ($m > 2$), aumenta também a probabilidade de serem gerados problemas infactíveis;
- ▶ Aumenta o número de restrições do problema original;
- ▶ Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- ▶ Métodos de exclusão de regiões são em geral mais adequados.

Métodos Escalares

Apresentação

Método da soma ponderada

Método ϵ -Restrito

Método ϵ -restrito híbrido

Método da distância a um ponto de referência

Método *goal attainment*

- ▶ Essa é uma abordagem híbrida entre o método ϵ -restrito e a soma ponderada dos objetivos;
- ▶ Uma soma ponderada dos objetivos é escolhida para ser minimizada;
- ▶ Todos os objetivos são transformados em restrições de desigualdade que restringem a região factível.

- ▶ Essa é uma abordagem híbrida entre o método ϵ -restrito e a soma ponderada dos objetivos;
- ▶ Uma soma ponderada dos objetivos é escolhida para ser minimizada;
- ▶ Todos os objetivos são transformados em restrições de desigualdade que restringem a região factível.

- ▶ Essa é uma abordagem híbrida entre o método ϵ -restrito e a soma ponderada dos objetivos;
- ▶ Uma soma ponderada dos objetivos é escolhida para ser minimizada;
- ▶ Todos os objetivos são transformados em restrições de desigualdade que restringem a região factível.

Formulação

O problema de otimização vetorial, é transformado no Problema $P_{\lambda, \epsilon}$:

$$\min \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$$

sujeito a:

$$\mathcal{F}_x = \begin{cases} f_k(x) \leq \epsilon_k \quad k = 1, \dots, m \\ g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \\ h_j(x) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, q \\ x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

- ▶ A variação dos ϵ_k e de λ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- ▶ Esta abordagem híbrida torna o método da soma ponderada capaz de alcançar soluções em trechos não convexos da fronteira Pareto-ótima;
- ▶ Contudo, herda as desvantagens do método ϵ -restrito;
- ▶ Além disso, o número de parâmetros de controle é duas vezes maior, tornando difícil para o decisor expressar suas preferências.

- ▶ A variação dos ϵ_k e de λ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- ▶ Esta abordagem híbrida torna o método da soma ponderada capaz de alcançar soluções em trechos não convexos da fronteira Pareto-ótima;
- ▶ Contudo, herda as desvantagens do método ϵ -restrito;
- ▶ Além disso, o número de parâmetros de controle é duas vezes maior, tornando difícil para o decisor expressar suas preferências.

- ▶ A variação dos ϵ_k e de λ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- ▶ Esta abordagem híbrida torna o método da soma ponderada capaz de alcançar soluções em trechos não convexos da fronteira Pareto-ótima;
- ▶ Contudo, herda as desvantagens do método ϵ -restrito;
- ▶ Além disso, o número de parâmetros de controle é duas vezes maior, tornando difícil para o decisor expressar suas preferências.

- ▶ A variação dos ϵ_k e de λ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- ▶ Esta abordagem híbrida torna o método da soma ponderada capaz de alcançar soluções em trechos não convexos da fronteira Pareto-ótima;
- ▶ Contudo, herda as desvantagens do método ϵ -restrito;
- ▶ Além disso, o número de parâmetros de controle é duas vezes maior, tornando difícil para o decisor expressar suas preferências.

Métodos Escalares

Apresentação

Método da soma ponderada

Método ϵ -Restrito

Método ϵ -restrito híbrido

Método da distância a um ponto de referência

Método *goal attainment*

Método da distância a um ponto de referência

- ▶ Enfatizam-se as soluções, no espaço dos objetivos, localizadas mais perto do ponto de referência (ou pontos de referências);
- ▶ Dá-se menos relevância às soluções que estejam dentro de uma vizinhança de uma solução mais perto de um ponto de referência, a fim de manter um conjunto de soluções perto de cada ponto de referência.

Método da distância a um ponto de referência

- ▶ Enfatizam-se as soluções, no espaço dos objetivos, localizadas mais perto do ponto de referência (ou pontos de referências);
- ▶ Dá-se menos relevância às soluções que estejam dentro de uma vizinhança de uma solução mais perto de um ponto de referência, a fim de manter um conjunto de soluções perto de cada ponto de referência.

Formulação

O problema de otimização vetorial, é transformado no Problema P_z :

$$\min \left[\sum_{i=1}^m |z_i - f_i(x)|^r \right]^{\frac{1}{r}}$$

sujeito a:

$$\mathcal{F}_x = \begin{cases} g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \\ h_j(x) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, q \\ x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

com $1 \leq r < \infty$.

Método da distância a um ponto de referência

► $r = 1 : \min \sum_{i=1}^m |z_i - f_i(x)|$

► $r = 2 :$

$$\min \left[\sum_{i=1}^m |z_i - f_i(x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

► $r \rightarrow \infty : (\text{métrica de Tchebychev})$

$$\min \max |z_i - f_i(x)|$$

► É possível usar uma medida de distância ponderada:

$$\min \left[\sum_{i=1}^m w_i |z_i - f_i(x)|^r \right]^{\frac{1}{r}}$$

Método da distância a um ponto de referência

- ▶ Procedimentos para geração de soluções Pareto-ótimas podem incluir a variação do ponto de referência ou a variação dos pesos para um ponto de referência fixo (solução utópica);
- ▶ Depende de um bom ponto de referência;
- ▶ Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- ▶ Podem haver duas soluções para um mesmo ponto de referência - sensível ao ponto inicial;
- ▶ Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas sob certas condições;
- ▶ Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas.

Método da distância a um ponto de referência

- ▶ Procedimentos para geração de soluções Pareto-ótimas podem incluir a variação do ponto de referência ou a variação dos pesos para um ponto de referência fixo (solução utópica);
- ▶ Depende de um bom ponto de referência;
- ▶ Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- ▶ Podem haver duas soluções para um mesmo ponto de referência - sensível ao ponto inicial;
- ▶ Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas sob certas condições;
- ▶ Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas.

Método da distância a um ponto de referência

- ▶ Procedimentos para geração de soluções Pareto-ótimas podem incluir a variação do ponto de referência ou a variação dos pesos para um ponto de referência fixo (solução utópica);
- ▶ Depende de um bom ponto de referência;
- ▶ Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- ▶ Podem haver duas soluções para um mesmo ponto de referência - sensível ao ponto inicial;
- ▶ Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas sob certas condições;
- ▶ Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas.

Método da distância a um ponto de referência

- ▶ Procedimentos para geração de soluções Pareto-ótimas podem incluir a variação do ponto de referência ou a variação dos pesos para um ponto de referência fixo (solução utópica);
- ▶ Depende de um bom ponto de referência;
- ▶ Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- ▶ Podem haver duas soluções para um mesmo ponto de referência - sensível ao ponto inicial;
- ▶ Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas sob certas condições;
- ▶ Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas.

Método da distância a um ponto de referência

- ▶ Procedimentos para geração de soluções Pareto-ótimas podem incluir a variação do ponto de referência ou a variação dos pesos para um ponto de referência fixo (solução utópica);
- ▶ Depende de um bom ponto de referência;
- ▶ Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- ▶ Podem haver duas soluções para um mesmo ponto de referência - sensível ao ponto inicial;
- ▶ Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas sob certas condições;
- ▶ Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas.

Método da distância a um ponto de referência

- ▶ Procedimentos para geração de soluções Pareto-ótimas podem incluir a variação do ponto de referência ou a variação dos pesos para um ponto de referência fixo (solução utópica);
- ▶ Depende de um bom ponto de referência;
- ▶ Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- ▶ Podem haver duas soluções para um mesmo ponto de referência - sensível ao ponto inicial;
- ▶ Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas sob certas condições;
- ▶ Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas.

Métodos Escalares

Apresentação

Método da soma ponderada

Método ϵ -Restrito

Método ϵ -restrito híbrido

Método da distância a um ponto de referência

Método *goal attainment*

- ▶ Os objetivos são transformados em restrições de desigualdade;
- ▶ Escolhe um vetor objetivo alvo;
- ▶ Escolhe uma direção de busca w ;
- ▶ Tenta minimizar um coeficiente escalar λ que representa o *gap* relativo ao vetor alvo.

- ▶ Os objetivos são transformados em restrições de desigualdade;
- ▶ Escolhe um vetor objetivo alvo;
- ▶ Escolhe uma direção de busca w ;
- ▶ Tenta minimizar um coeficiente escalar λ que representa o *gap* relativo ao vetor alvo.

- ▶ Os objetivos são transformados em restrições de desigualdade;
- ▶ Escolhe um vetor objetivo alvo;
- ▶ Escolhe uma direção de busca w ;
- ▶ Tenta minimizar um coeficiente escalar λ que representa o *gap* relativo ao vetor alvo.

- ▶ Os objetivos são transformados em restrições de desigualdade;
- ▶ Escolhe um vetor objetivo alvo;
- ▶ Escolhe uma direção de busca w ;
- ▶ Tenta minimizar um coeficiente escalar λ que representa o *gap* relativo ao vetor alvo.

Formulação

O problema de otimização vetorial, é transformado no Problema P_z :

$$\min \lambda$$

sujeito a:

$$\mathcal{F}_x = \begin{cases} f(x) \leq z + \lambda w \\ g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \\ h_j(x) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, q \\ x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Em geral z é a solução utópica.

- ▶ No espaço de objetivos, corresponde a minimizar o tamanho do vetor

$$z + \lambda w$$

- ▶ No espaço de variáveis, corresponde a minimizar a região factível definida por

$$f(x) \leq z + \lambda w$$

- ▶ No espaço de objetivos, corresponde a minimizar o tamanho do vetor

$$z + \lambda w$$

- ▶ No espaço de variáveis, corresponde a minimizar a região factível definida por

$$f(x) \leq z + \lambda w$$

- ▶ Pode lidar com problemas não convexos;
- ▶ Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- ▶ É possível gerar uma formulação P_z equivalente;
- ▶ Aumenta o número de restrições do problema original e o número de variáveis;
- ▶ Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- ▶ Diferentes famílias de métodos de otimização mono-objetivo são viáveis.

- ▶ Pode lidar com problemas não convexos;
- ▶ Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- ▶ É possível gerar uma formulação P_z equivalente;
- ▶ Aumenta o número de restrições do problema original e o número de variáveis;
- ▶ Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- ▶ Diferentes famílias de métodos de otimização mono-objetivo são viáveis.

- ▶ Pode lidar com problemas não convexos;
- ▶ Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- ▶ É possível gerar uma formulação P_z equivalente;
- ▶ Aumenta o número de restrições do problema original e o número de variáveis;
- ▶ Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- ▶ Diferentes famílias de métodos de otimização mono-objetivo são viáveis.

- ▶ Pode lidar com problemas não convexos;
- ▶ Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- ▶ É possível gerar uma formulação P_z equivalente;
- ▶ Aumenta o número de restrições do problema original e o número de variáveis;
- ▶ Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- ▶ Diferentes famílias de métodos de otimização mono-objetivo são viáveis.

- ▶ Pode lidar com problemas não convexos;
- ▶ Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- ▶ É possível gerar uma formulação P_z equivalente;
- ▶ Aumenta o número de restrições do problema original e o número de variáveis;
- ▶ Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- ▶ Diferentes famílias de métodos de otimização mono-objetivo são viáveis.

- ▶ Pode lidar com problemas não convexos;
- ▶ Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- ▶ É possível gerar uma formulação P_z equivalente;
- ▶ Aumenta o número de restrições do problema original e o número de variáveis;
- ▶ Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- ▶ Diferentes famílias de métodos de otimização mono-objetivo são viáveis.

- ▶ Método da soma ponderada - Problema (P_λ);
- ▶ Método ϵ -restrito - Problema (P_ϵ);
- ▶ Método ϵ -restrito híbrido;
- ▶ Método de programação por metas;
- ▶ Método goal attainment;
- ▶ Programação de compromisso;
- ▶ Método da distância a um ponto de referência;
- ▶ Métodos Fuzzy.

Referências:

- ▶ Takahashi, R.H.C.; Notas de Aula: Otimização Escalar e Vetorial. http://www.decom.ufop.br/moreira/site_media/uploads/arquivos/Archive.zip
- ▶ J. A. Ramírez, F. Campelo, F. G. Guimarães, Lucas S. Batista, Ricardo H. C. Takahashi, Notas de Aula de Otimização, 2010. http://www.decom.ufop.br/moreira/site_media/uploads/arquivos/nota1.pdf