PCC175 - TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO

Aulas 07 e 08 - Avaliação de Desempenho de MOEA's

Gladston Juliano Prates Moreira
email: gladston@ufop.edu.br

CSILab, Departamento de Computação
Universidade Federal de Ouro Preto

3 de dezembro de 2024

Introdução

Medidas de Avaliação de Desempenho

Introdução

- MOEAs (Primeira geração)
  - MOGA (Fonseca & Fleming 1993);
  - NPGA (Horn et al. 1994);
  - NSGA (Srinivas & Deb 1994).
- MOEAs (Secunda geração)
  - SPEA (Zitzler & Thiele 1999);
  - PAES (Knowles & Corne 1999);
  - SPEA-II (Zitzler et al. 2001);
  - NSGA-II (Deb et al. 2002).

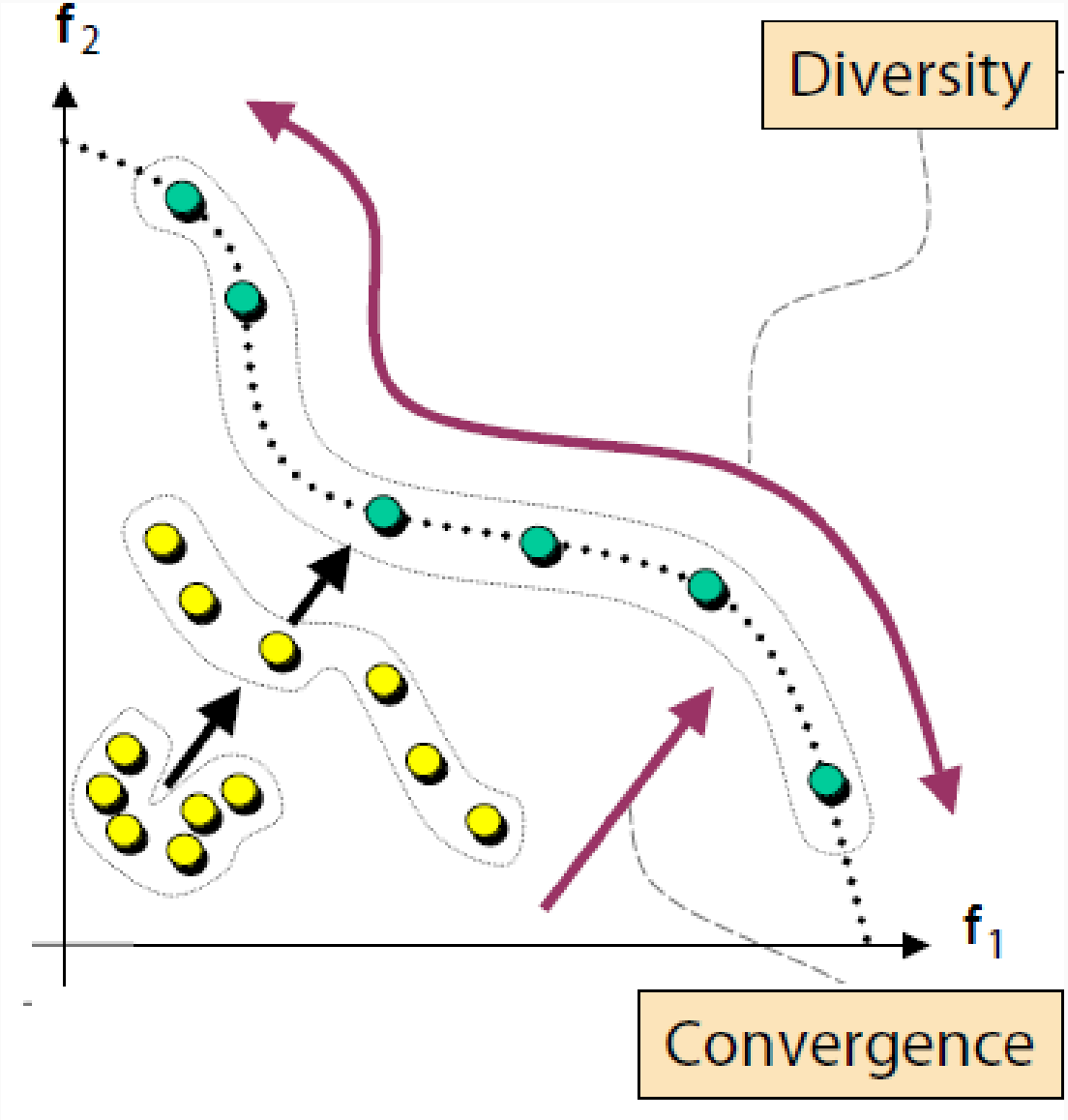
UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Aproximações à Fronteira Pareto global.
Quando é possível dizer que um conjunto de estimativas Pareto-ótimas provenientes de um determinado algoritmo é melhor que algum outro conjunto de estimativas provenientes de outro algoritmo?

Um conjunto de soluções de alta qualidade deve:

- a proximidade em relação ao Pareto-ótimo real (convergência);
- diversidade em termos da distribuição e do espalhamento ao longo da fronteira Pareto encontrada (uniformidade e cobertura).

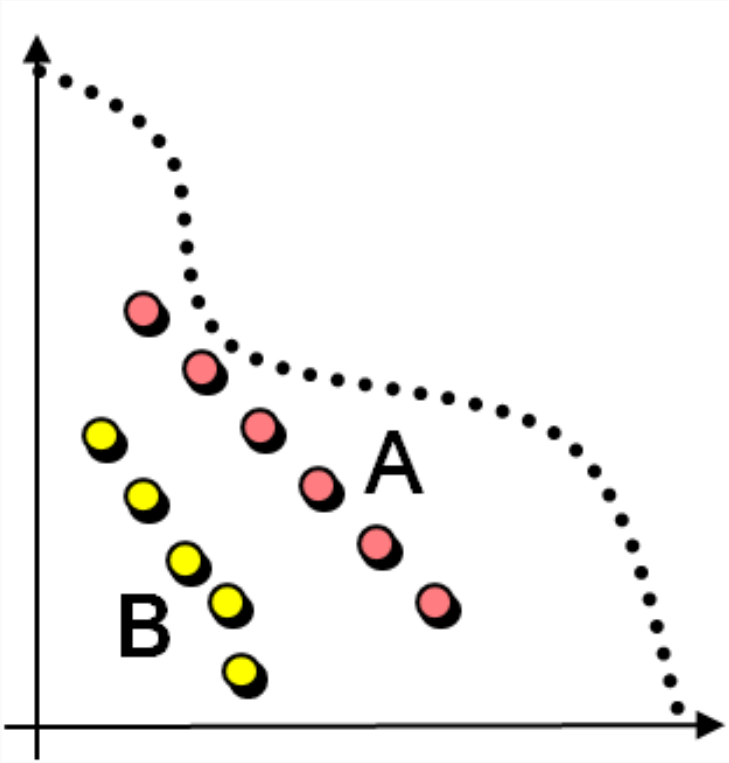
Introdução

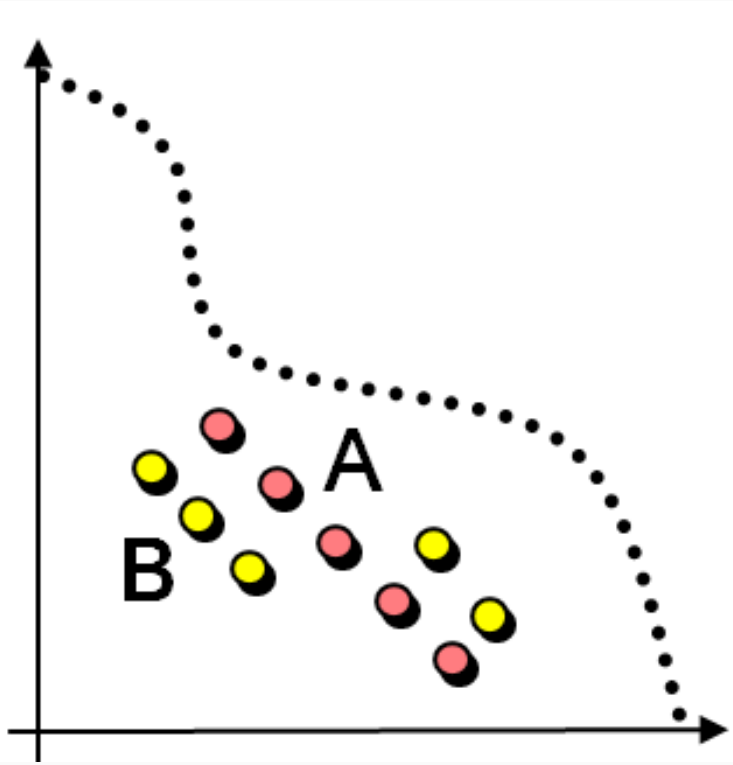


Como avaliar a qualidade da Fronteira estimada?

- Se um algoritmo é melhor que o outro, podemos expressar o quão melhor é?
- Se um algoritmo não pode ser dito ser melhor que o outro, existem alguns aspectos, em que podemos dizer que o primeiro é melhor do que o último?

Introdução





Medidas de Avaliação de Desempenho

Medidas de Avaliação de Desempenho:

- Classificação:
  - medem o progresso em direção à Fronteira Pareto;
  - medem a diversidade entre as soluções obtidas;
  - medem os dois critérios acima.
- Características:
  - algumas necessitam do conhecimento do conjunto de Pareto real;
  - outras sintetizam a qualidade do conjunto de soluções não-dominadas sem a necessidade de um conjunto de referência;
  - comparam dois ou mais conjuntos de soluções não-dominadas.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Medidas de Avaliação de Desempenho:

- Classificação:
  - medem o progresso em direção à Fronteira Pareto;
  - medem a diversidade entre as soluções obtidas;
  - medem os dois critérios acima.
- Características:
  - algumas necessitam do conhecimento do conjunto de Pareto real;
  - outras sintetizam a qualidade do conjunto de soluções não-dominadas sem a necessidade de um conjunto de referência;
  - comparam dois ou mais conjuntos de soluções não-dominadas.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Medidas de Avaliação de Desempenho:

- Classificação:
  - medem o progresso em direção à Fronteira Pareto;
  - medem a diversidade entre as soluções obtidas;
  - medem os dois critérios acima.
- Características:
  - algumas necessitam do conhecimento do conjunto de Pareto real;
  - outras sintetizam a qualidade do conjunto de soluções não-dominadas sem a necessidade de um conjunto de referência;
  - comparam dois ou mais conjuntos de soluções não-dominadas.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Medidas de Avaliação de Desempenho:

- Classificação:
  - medem o progresso em direção à Fronteira Pareto;
  - medem a diversidade entre as soluções obtidas;
  - medem os dois critérios acima.
- Características:
  - algumas necessitam do conhecimento do conjunto de Pareto real;
  - outras sintetizam a qualidade do conjunto de soluções não-dominadas sem a necessidade de um conjunto de referência;
  - comparam dois ou mais conjuntos de soluções não-dominadas.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Medidas de Avaliação de Desempenho:

- Classificação:
  - medem o progresso em direção à Fronteira Pareto;
  - medem a diversidade entre as soluções obtidas;
  - medem os dois critérios acima.
- Características:
  - algumas necessitam do conhecimento do conjunto de Pareto real;
  - outras sintetizam a qualidade do conjunto de soluções não-dominadas sem a necessidade de um conjunto de referência;
  - comparam dois ou mais conjuntos de soluções não-dominadas.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Medidas de Avaliação de Desempenho:

- Classificação:
  - medem o progresso em direção à Fronteira Pareto;
  - medem a diversidade entre as soluções obtidas;
  - medem os dois critérios acima.
- Características:
  - algumas necessitam do conhecimento do conjunto de Pareto real;
  - outras sintetizam a qualidade do conjunto de soluções não-dominadas sem a necessidade de um conjunto de referência;
  - comparam dois ou mais conjuntos de soluções não-dominadas.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Medidas de Avaliação de Desempenho:

Progresso em Direção à Fronteira Pareto

Calcula a proximidade de um conjunto Q, com N elementos, em relação ao conjunto de Pareto real P^*

- P^*: conjunto finito ou infinito de soluções
- Boa estimativa para a convergência se o conjunto P^* tiver um número grande de elementos.

Error ratio (ER) - (Veldhuizen 1999)

Conta o número de soluções, em Q, que não estão em P^*.

$$ER = \frac{\sum_{i=1}^{|Q|} e_i}{|Q|},$$

onde $e_i = 0$ se o vetor i está em P^* e $e_i = 1$ caso contrário.

- $\downarrow ER \Rightarrow \uparrow$ **convergência para a Fronteira Pareto**;
- ER é a proporção de pontos em Q não pertencentes à Fronteira Pareto real.
- conhecimento da Fronteira Pareto real.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Error ratio (ER) - (Veldhuizen 1999)

Conta o número de soluções, em Q, que não estão em P^*.

$$ER = \frac{\sum_{i=1}^{|Q|} e_i}{|Q|},$$

onde $e_i = 0$ se o vetor i está em P^* e $e_i = 1$ caso contrário.

- $\downarrow ER \Rightarrow \uparrow$ **convergência para a Fronteira Pareto**;
- ER é a proporção de pontos em Q não pertencentes à Fronteira Pareto real.
- conhecimento da Fronteira Pareto real.

Error ratio (ER) - (Veldhuizen 1999)

Conta o número de soluções, em Q, que não estão em P^*.

$$ER = \frac{\sum_{i=1}^{|Q|} e_i}{|Q|},$$

onde $e_i = 0$ se o vetor i está em P^* e $e_i = 1$ caso contrário.

- $\downarrow ER \Rightarrow \uparrow$ **convergência para a Fronteira Pareto**;
- ER é a proporção de pontos em Q não pertencentes à Fronteira Pareto real.
- conhecimento da Fronteira Pareto real.

Error ratio (ER) - (Veldhuizen 1999)

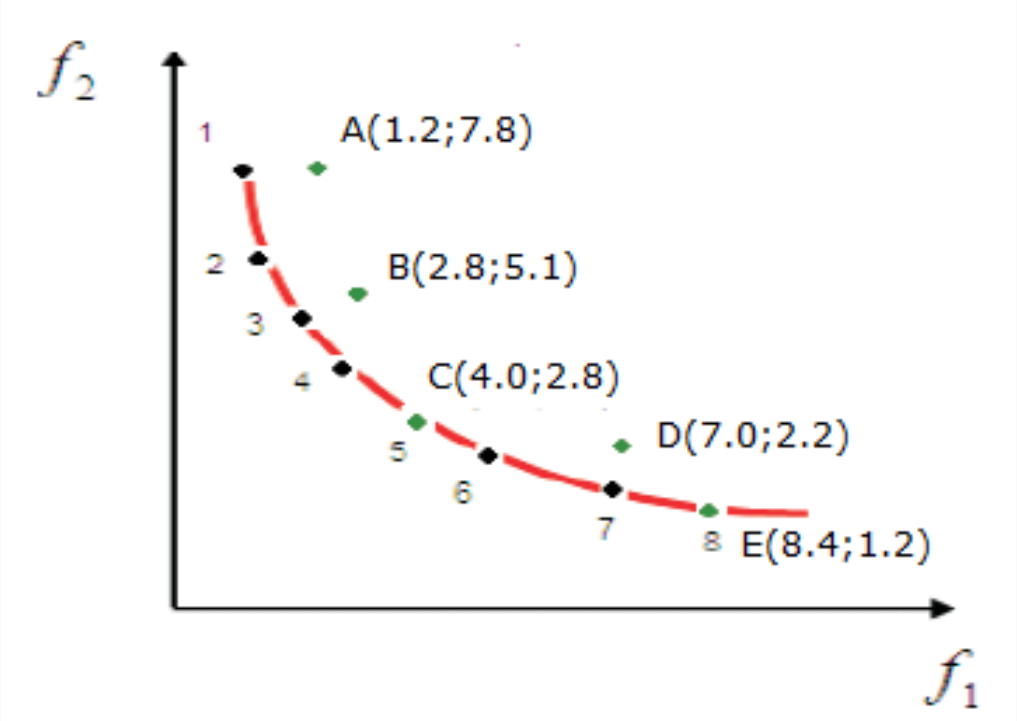
Conta o número de soluções, em Q, que não estão em P^*.

$$ER = \frac{\sum_{i=1}^{|Q|} e_i}{|Q|},$$

onde $e_i = 0$ se o vetor i está em P^* e $e_i = 1$ caso contrário.

- $\downarrow ER \Rightarrow \uparrow$ **convergência para a Fronteira Pareto**;
- ER é a proporção de pontos em Q não pertencentes à Fronteira Pareto real.
- conhecimento da Fronteira Pareto real.

Medidas de Avaliação de Desempenho:



$$ER = \frac{3}{5} = 0.6$$

Set Coverage Metric - Zitzler (1999)

Calcula a proporção de soluções, em um conjunto B, que são dominadas pelas soluções de um conjunto A.

$$\mathcal{C}(A, B) = \frac{|b \in B \mid \exists a \in A : a \preceq b|}{|B|}$$

- $\mathcal{C}(A, B) = 1 \Rightarrow$ **todos os membros de B são dominados por A.**
- $\mathcal{C}(A, B) = 0 \Rightarrow$ **nenhum membro de B é dominado por A.**
- Se $A = P^*$ e $B = Q$. Assim, $\mathcal{C}(P^*, Q)$ determina a proporção de soluções, em Q, que são dominadas pelas soluções de P^*.

Set Coverage Metric - Zitzler (1999)

Calcula a proporção de soluções, em um conjunto B, que são dominadas pelas soluções de um conjunto A.

$$\mathcal{C}(A, B) = \frac{|b \in B \mid \exists a \in A : a \preceq b|}{|B|}$$

- $\mathcal{C}(A, B) = 1 \Rightarrow$ **todos os membros de B são dominados por A.**
- $\mathcal{C}(A, B) = 0 \Rightarrow$ **nenhum membro de B é dominado por A.**
- Se $A = P^*$ e $B = Q$. Assim, $\mathcal{C}(P^*, Q)$ determina a proporção de soluções, em Q, que são dominadas pelas soluções de P^*.

Set Coverage Metric - Zitzler (1999)

Calcula a proporção de soluções, em um conjunto B, que são dominadas pelas soluções de um conjunto A.

$$\mathcal{C}(A, B) = \frac{|b \in B \mid \exists a \in A : a \preceq b|}{|B|}$$

- $\mathcal{C}(A, B) = 1 \Rightarrow$ **todos os membros de B são dominados por A.**
- $\mathcal{C}(A, B) = 0 \Rightarrow$ **nenhum membro de B é dominado por A.**
- Se $A = P^*$ e $B = Q$. Assim, $\mathcal{C}(P^*, Q)$ determina a proporção de soluções, em Q, que são dominadas pelas soluções de P^*.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

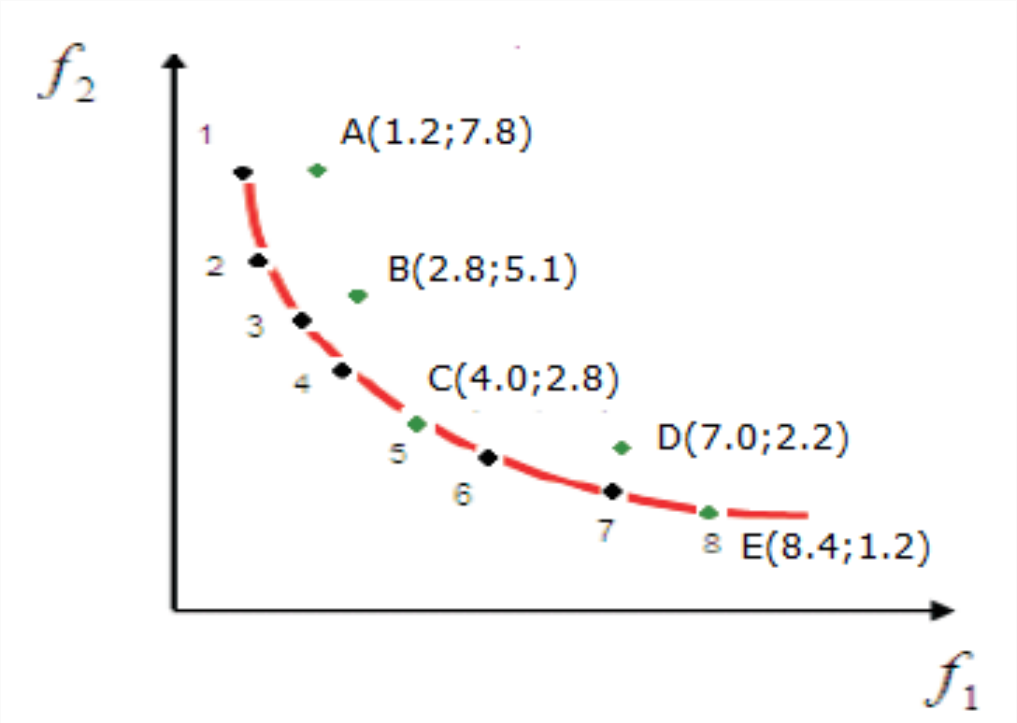
Set Coverage Metric - Zitzler (1999)

Calcula a proporção de soluções, em um conjunto B, que são dominadas pelas soluções de um conjunto A.

$$\mathcal{C}(A, B) = \frac{|b \in B \mid \exists a \in A : a \preceq b|}{|B|}$$

- $\mathcal{C}(A, B) = 1 \Rightarrow$ **todos os membros de B são dominados por A.**
- $\mathcal{C}(A, B) = 0 \Rightarrow$ **nenhum membro de B é dominado por A.**
- Se $A = P^*$ e $B = Q$. Assim, $\mathcal{C}(P^*, Q)$ determina a proporção de soluções, em Q, que são dominadas pelas soluções de P^*.

Medidas de Avaliação de Desempenho:



$$\mathcal{C}(P^*, Q) = \frac{3}{5} = 0.6$$

Generational Distance (GD) - (Nebro et al. 2006)

Calcula a distância média das soluções de Q em relação as soluções de P^*.

$$GD = \frac{\left(\sum_{i=1}^{|Q|} d_i^2\right)^{1/2}}{|Q|},$$

onde d_i é a distância euclidiana (no espaço dos objetivos) entre a solução $i \in Q$ e a solução mais próxima em P^*.

- necessita de uma normalização nos valores das funções-objetivo.
- Conhecimento da Fronteira Pareto real.

Generational Distance (GD) - (Nebro et al. 2006)

Calcula a distância média das soluções de Q em relação as soluções de P^*.

$$GD = \frac{\left(\sum_{i=1}^{|Q|} d_i^2\right)^{1/2}}{|Q|},$$

onde d_i é a distância euclidiana (no espaço dos objetivos) entre a solução $i \in Q$ e a solução mais próxima em P^*.

- necessita de uma normalização nos valores das funções-objetivo.
- Conhecimento da Fronteira Pareto real.

Generational Distance (GD) - (Nebro et al. 2006)

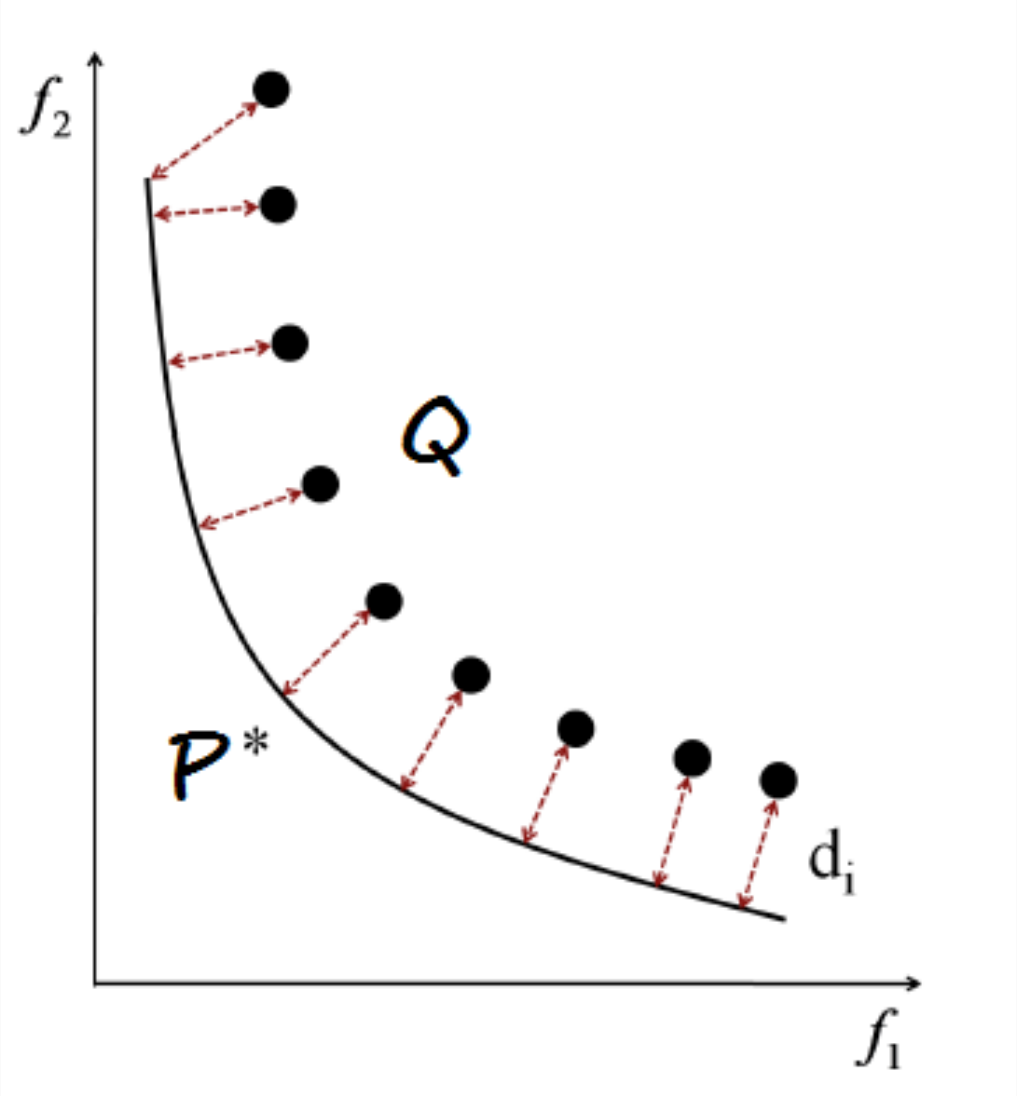
Calcula a distância média das soluções de Q em relação as soluções de P^*.

$$GD = \frac{\left(\sum_{i=1}^{|Q|} d_i^2\right)^{1/2}}{|Q|},$$

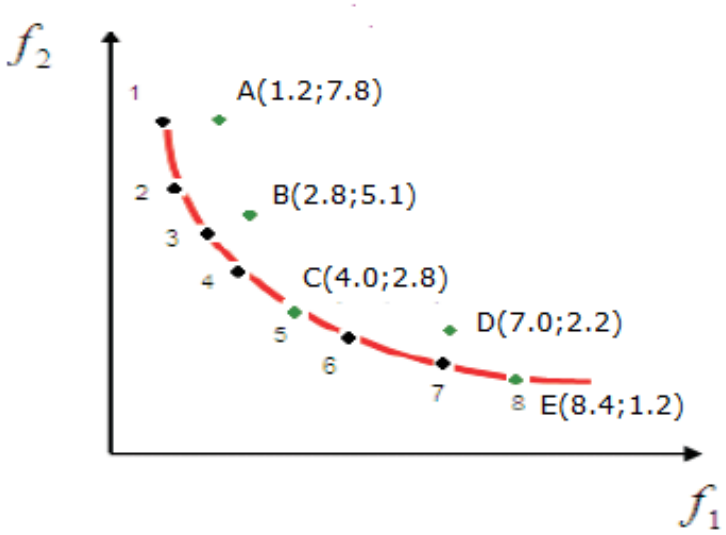
onde d_i é a distância euclidiana (no espaço dos objetivos) entre a solução $i \in Q$ e a solução mais próxima em P^*.

- necessita de uma normalização nos valores das funções-objetivo.
- Conhecimento da Fronteira Pareto real.

Medidas de Avaliação de Desempenho:



Medidas de Avaliação de Desempenho:



Solução	f_1	f_2
1	1.0	7.5
2	1.1	5.5
3	2.0	5.0
4	3.0	4.0
5	4.0	2.8
6	5.5	2.5
7	6.8	2.0
8	8.4	1.2

$$d_{A1} = \sqrt{(1.2-1.0)^2 + (7.8-7.5)^2}$$
$$d_{B3} = \sqrt{(2.8-2.0)^2 + (5.1-5.0)^2}$$
$$d_{C5} = \sqrt{(4.0-4.0)^2 + (2.8-2.8)^2}$$
$$d_{D7} = \sqrt{(7.0-6.8)^2 + (2.2-2.0)^2}$$
$$d_{E8} = \sqrt{(8.4-8.4)^2 + (1.2-1.2)^2}$$

$$GD = \frac{0.36 + 0.81 + 0 + 0.28 + 0}{5} = 0.19$$

Medidas de Avaliação de Desempenho:

Diversidade entre as Soluções Encontradas

Spacing measure (S) - (Schott 1995)

É calculada utilizando a distância relativa entre duas soluções consecutivas pertencentes ao conjunto não-dominado.

$$S = \sqrt{\frac{1}{|Q|} \sum_{i=1}^{|Q|} \left(d_i - \overline{d}\right)^2},$$

onde $d_i = \min_{j \neq i} \sum_{k=1}^{m} \left| f_k^i - f_k^j \right|$ e $\overline{d}$ a média das distâncias d_i.

- Se $S = 0$, indica que todas as soluções da Fronteira estimada estão equidistantemente espaçadas.

Spacing measure (S) - (Schott 1995)

É calculada utilizando a distância relativa entre duas soluções consecutivas pertencentes ao conjunto não-dominado.

$$S = \sqrt{\frac{1}{|Q|} \sum_{i=1}^{|Q|} \left(d_i - \overline{d}\right)^2},$$

onde $d_i = \min_{j \neq i} \sum_{k=1}^{m} \left| f_k^i - f_k^j \right|$ e $\overline{d}$ a média das distâncias d_i.

- Se $S = 0$, indica que todas as soluções da Fronteira estimada estão equidistantemente espaçadas.

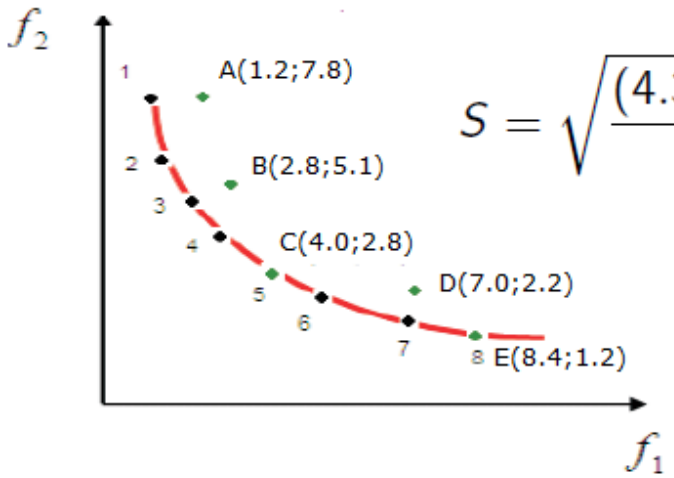
Medidas de Avaliação de Desempenho:

Solução	f_1	f_2
1	1.0	7.5
2	1.1	5.5
3	2.0	5.0
4	3.0	4.0
5	4.0	2.8
6	5.5	2.5
7	6.8	2.0
8	8.4	1.2

$$d_A = \min((1.6 + 2.7), (2.8 + 5.0), (5.8 + 5.6), (7.2 + 6.6)) = 4.3$$

$$d_B = 3.5, d_C = 3.5, d_D = 2.4, d_E = 2.4$$

$$\bar{d} = \frac{4.3 + 3.5 + 3.5 + 2.4 + 2.4}{5} = 3.22$$



$$S = \sqrt{\frac{(4.3 - 3.22)^2 + \cdots + (2.4 - 3.22)^2}{5}} = 0.73$$

Δ measure - (Deb et al. 2002)

$$\Delta = \frac{\sum_{m=1}^{M} d_m^e + \sum_{i=1}^{|Q|-1} \left| d_i - \overline{d} \right|}{\sum_{m=1}^{M} d_m^e + (|Q| - 1)\overline{d}},$$

onde d_i = é a distância Euclidiana entre duas soluções consecutivas, $\overline{d}$ a média das distâncias d_i e d_m^e a distância entre os pontos extremos de P^* e de Q (m-ésima função-objetivo).

- Se $\downarrow \Delta \Rightarrow$ melhor diversidade.

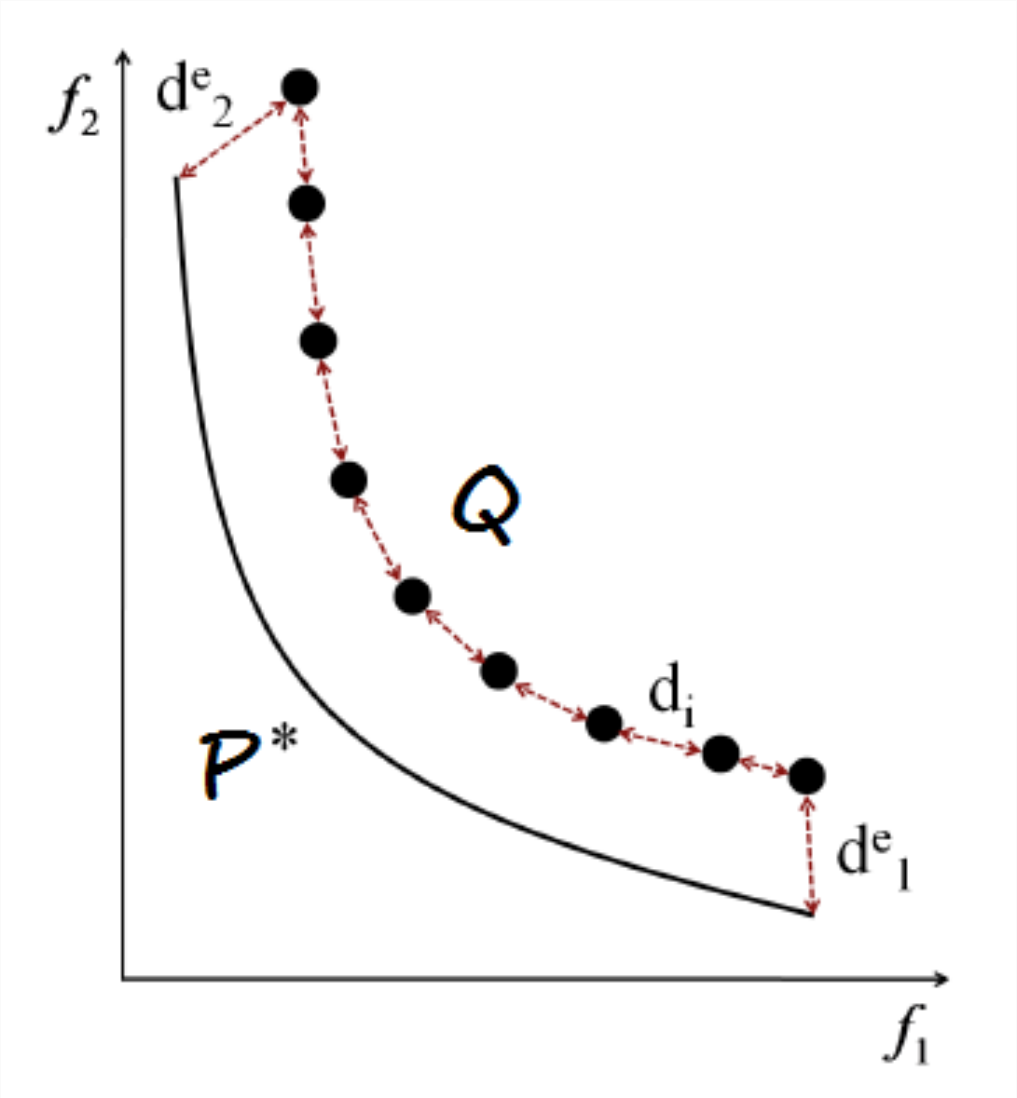
Δ measure - (Deb et al. 2002)

$$\Delta = \frac{\sum_{m=1}^{M} d_m^e + \sum_{i=1}^{|Q|-1} \left| d_i - \overline{d} \right|}{\sum_{m=1}^{M} d_m^e + (|Q| - 1)\overline{d}},$$

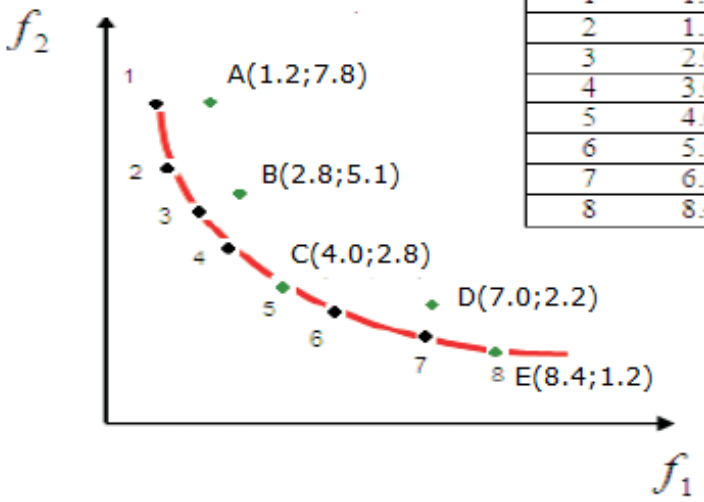
onde $d_i =$ é a distância Euclidiana entre duas soluções consecutivas, $\overline{d}$ a média das distâncias d_i e d_m^e a distância entre os pontos extremos de P^* e de Q (m-ésima função-objetivo).

- Se $\downarrow \Delta \Rightarrow$ melhor diversidade.

Medidas de Avaliação de Desempenho:



Medidas de Avaliação de Desempenho:



Solução	f_1	f_2
1	1.0	7.5
2	1.1	5.5
3	2.0	5.0
4	3.0	4.0
5	4.0	2.8
6	5.5	2.5
7	6.8	2.0
8	8.4	1.2

Soluções 8 e E coincidem $\rightarrow d_2^e = 0$

$d_1^e = 0.4$

Temos também

$$d_1 = 3.1, \; d_2 = 2.6$$
$$d_3 = 3.1, \; d_4 = 1.2$$

A média desses valores é $\bar{d} = 2.5$

$$\Delta = \frac{0.4 + 0 + |3.1 - 2.5| + |2.6 - 2.5| + |3.1 - 2.5| + |1.2 - 2.5|}{0.4 + 0.0 + 4 \times 2.5}$$
$$= 0.28$$

Medidas de Avaliação de Desempenho:

Progresso em Direção à Fronteira Pareto e Diversidade entre as Soluções Encontradas

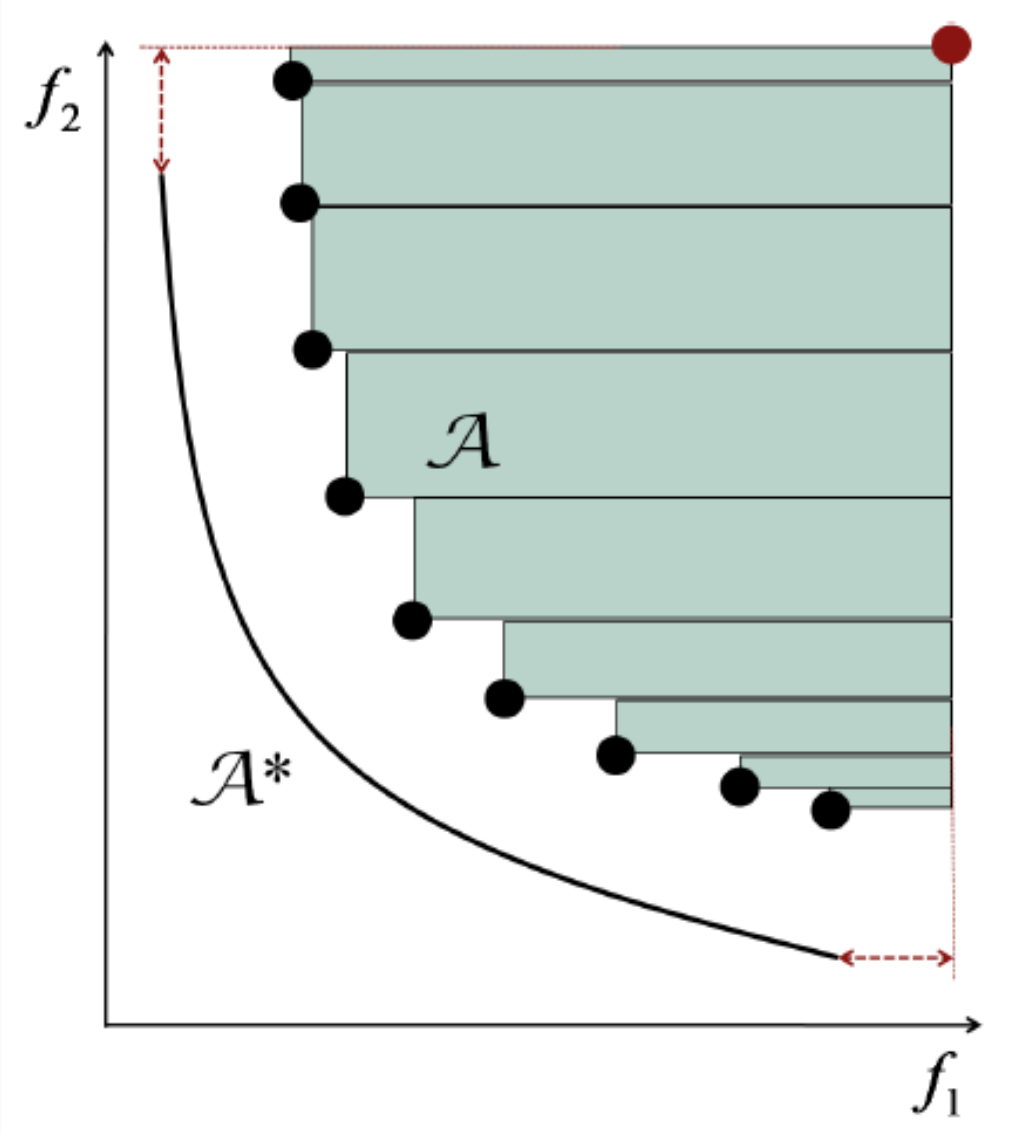
Medidas de Avaliação de Desempenho:

S-Metric (HV) - (Zitzler & Thiele 1999)

Calcula o hiper-volume da região multi-dimensional que o conjunto Q e um ponto de referência englobam $\Rightarrow$ calcula o tamanho da região que Q domina.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Medidas de Avaliação de Desempenho:

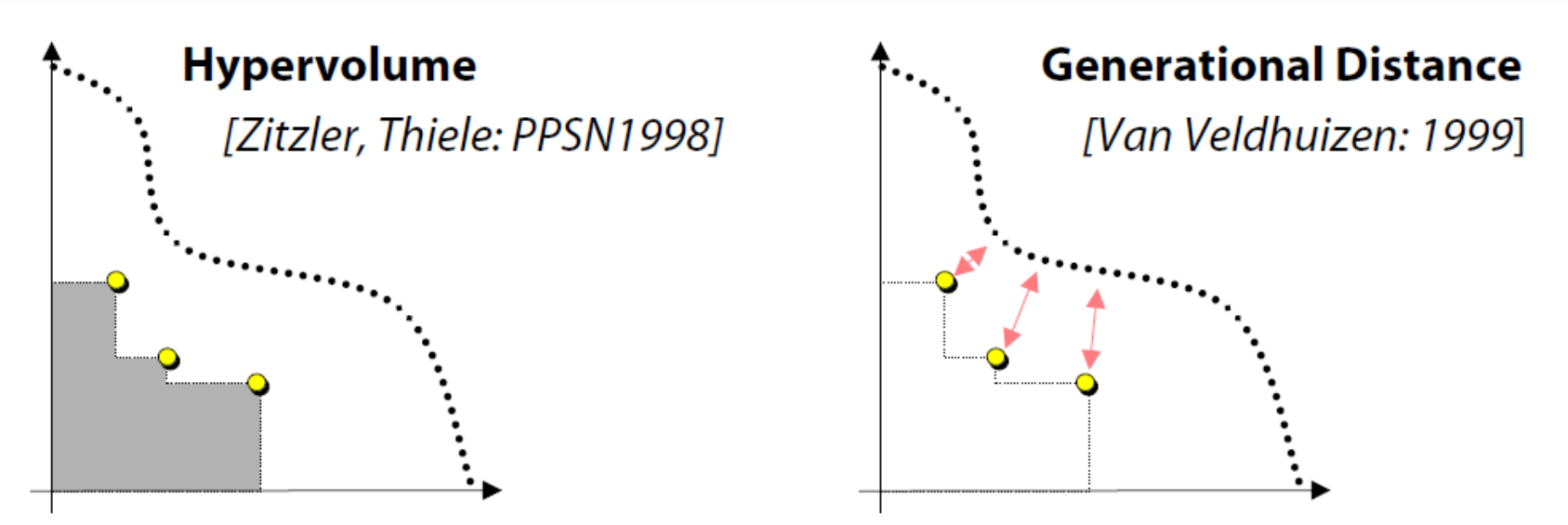


Medidas de Avaliação de Desempenho:

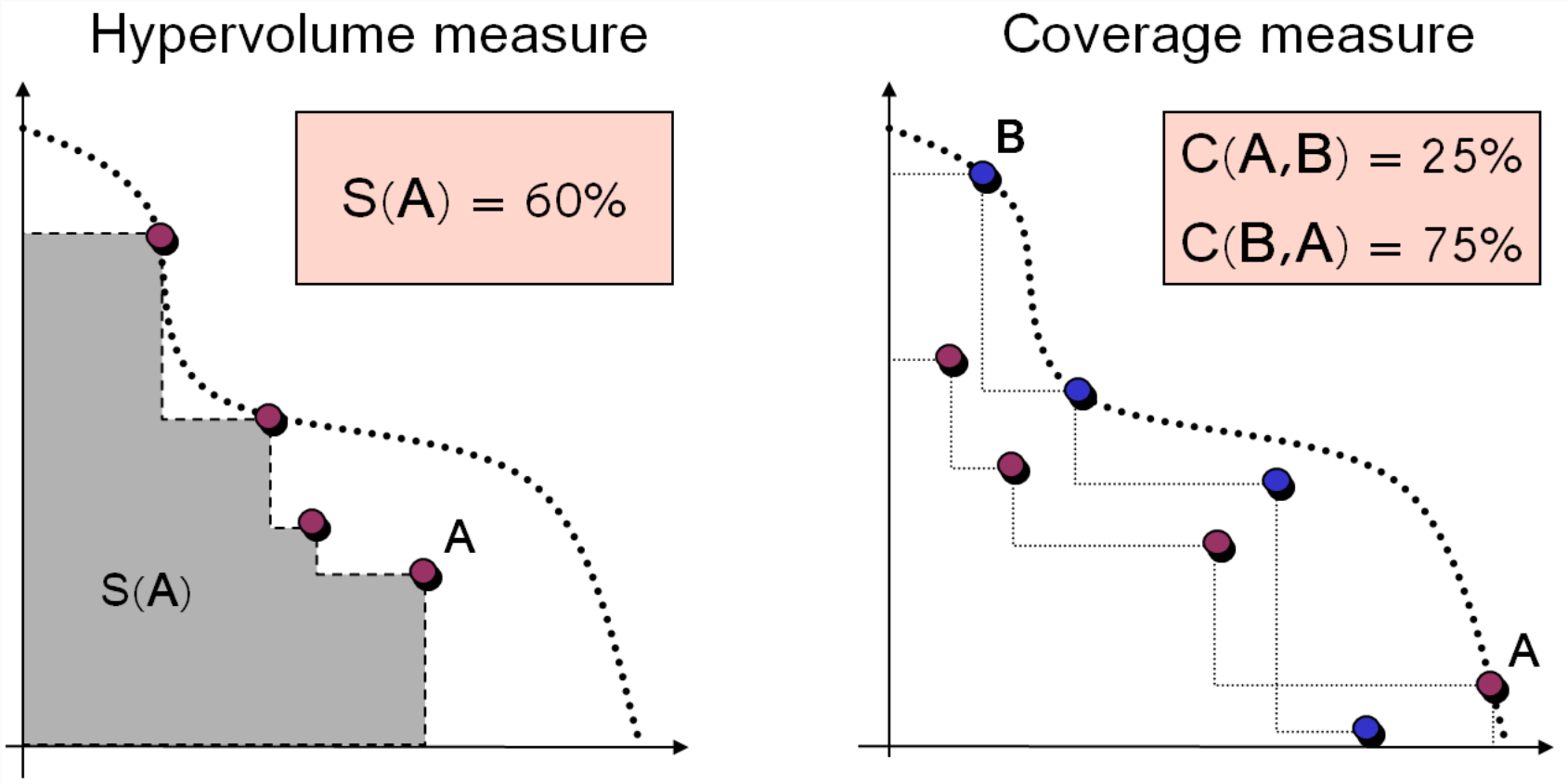
S-Metric (HV) - (Zitzler & Thiele 1999)

- independe de escala;
- conhecimento de um ponto de referência que pode alterar o valor da medida;
- alto custo computacional

Medidas de Avaliação de Desempenho:

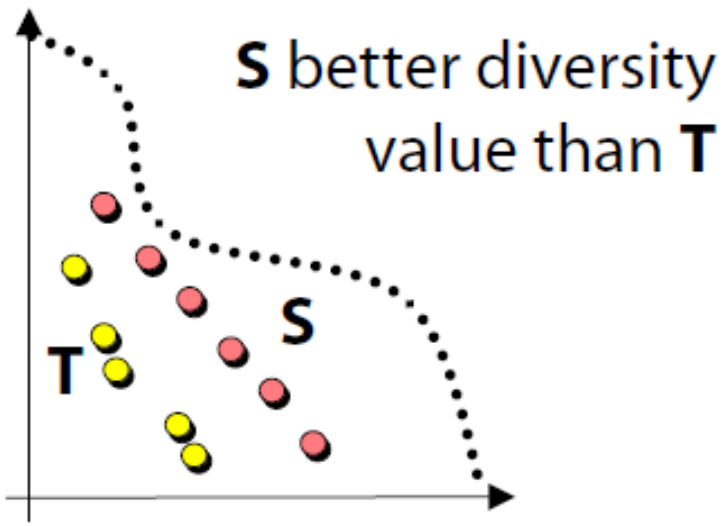


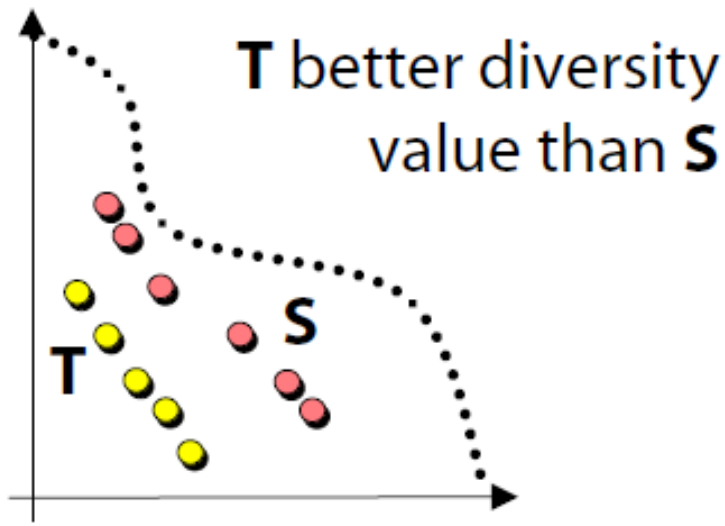
Medidas de Avaliação de Desempenho:



medidas unárias vs medidas binárias

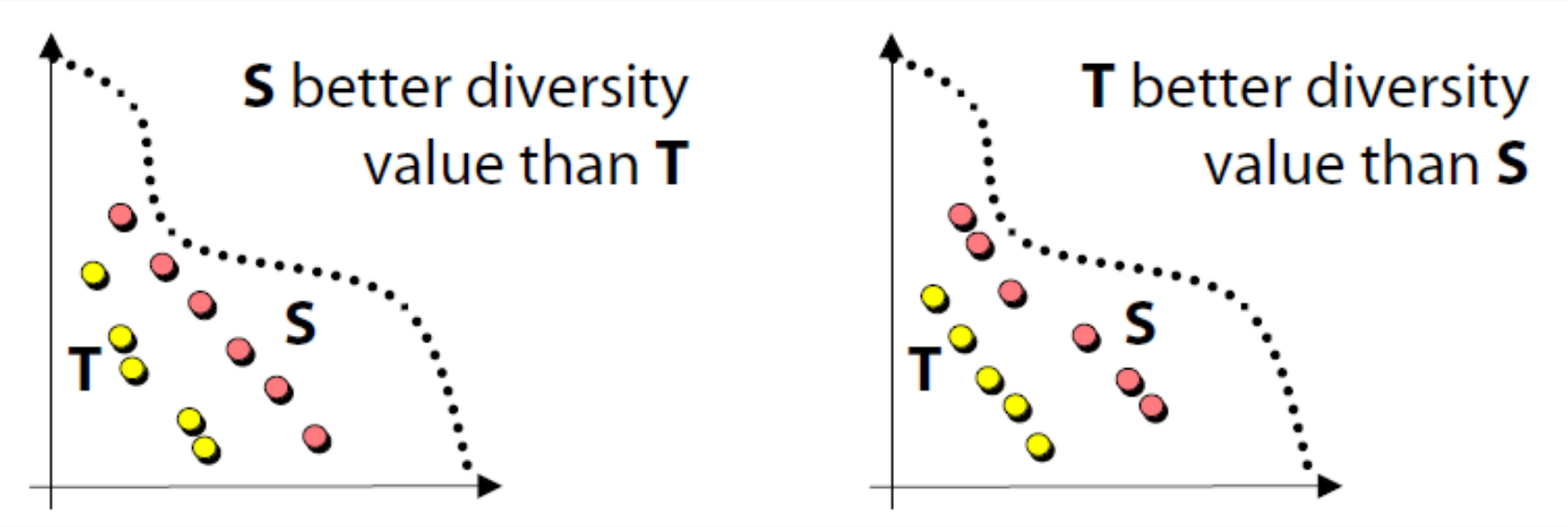
Exemplos





Medidas de qualidade unárias normalmente não dizem que S domina T; no máximo que S não domina T.

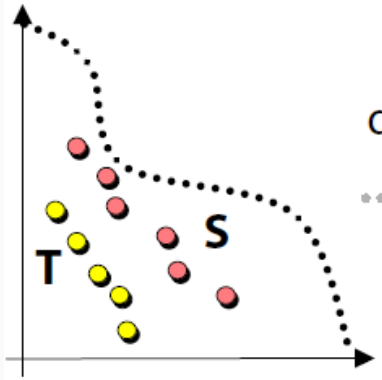
Exemplos



Medidas de qualidade unárias normalmente não dizem que S domina T; no máximo que S não domina T.

Medidas de Avaliação de Desempenho:

Exemplos



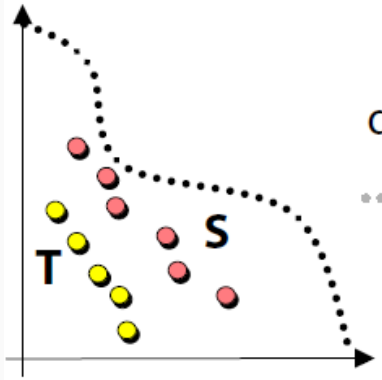
application of quality measures

	S	T
hypervolume	*432.34*	*420.13*
distance	*0.3308*	*0.4532*
diversity	*0.3637*	*0.3463*
spread	*0.3622*	*0.3601*
cardinality	*6*	*5*

A aproximação S é "melhor".

Medidas de Avaliação de Desempenho:

Exemplos



application of quality measures

	S	T
hypervolume	*432.34*	*420.13*
distance	*0.3308*	*0.4532*
diversity	*0.3637*	*0.3463*
spread	*0.3622*	*0.3601*
cardinality	*6*	*5*

A aproximação S é "melhor".

Medidas de Avaliação de Desempenho:

- Em otimização multi-objetivo, o resultado da otimização é um conjunto de soluções - Fronteira Pareto;
- A avaliação do conjunto de soluções obtidas consiste em dois aspectos: propriedade de convergência e propriedade diversidade;
- Não existe nenhuma medida de qualidade unária que é capaz de indicar se uma aproximação A é melhor do que uma aproximação B, mesmo quando consideramos uma combinação finita dessas medidas;
- Existência de várias medidas de desempenho;
- Uma vez que a avaliação de desempenho de MOEAs representa uma tarefa multicritério, a consideração de medidas binárias de qualidade. é muito útil.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Medidas de Avaliação de Desempenho:

- Em otimização multi-objetivo, o resultado da otimização é um conjunto de soluções - Fronteira Pareto;
- A avaliação do conjunto de soluções obtidas consiste em dois aspectos: propriedade de convergência e propriedade diversidade;
- Não existe nenhuma medida de qualidade unária que é capaz de indicar se uma aproximação A é melhor do que uma aproximação B, mesmo quando consideramos uma combinação finita dessas medidas;
- Existência de várias medidas de desempenho;
- Uma vez que a avaliação de desempenho de MOEAs representa uma tarefa multicritério, a consideração de medidas binárias de qualidade. é muito útil.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Medidas de Avaliação de Desempenho:

- Em otimização multi-objetivo, o resultado da otimização é um conjunto de soluções - Fronteira Pareto;
- A avaliação do conjunto de soluções obtidas consiste em dois aspectos: propriedade de convergência e propriedade diversidade;
- Não existe nenhuma medida de qualidade unária que é capaz de indicar se uma aproximação A é melhor do que uma aproximação B, mesmo quando consideramos uma combinação finita dessas medidas;
- Existência de várias medidas de desempenho;
- Uma vez que a avaliação de desempenho de MOEAs representa uma tarefa multicritério, a consideração de medidas binárias de qualidade. é muito útil.

Medidas de Avaliação de Desempenho:

- Em otimização multi-objetivo, o resultado da otimização é um conjunto de soluções - Fronteira Pareto;
- A avaliação do conjunto de soluções obtidas consiste em dois aspectos: propriedade de convergência e propriedade diversidade;
- Não existe nenhuma medida de qualidade unária que é capaz de indicar se uma aproximação A é melhor do que uma aproximação B, mesmo quando consideramos uma combinação finita dessas medidas;
- Existência de várias medidas de desempenho;
- Uma vez que a avaliação de desempenho de MOEAs representa uma tarefa multicritério, a consideração de medidas binárias de qualidade. é muito útil.

Medidas de Avaliação de Desempenho:

- Em otimização multi-objetivo, o resultado da otimização é um conjunto de soluções - Fronteira Pareto;
- A avaliação do conjunto de soluções obtidas consiste em dois aspectos: propriedade de convergência e propriedade diversidade;
- Não existe nenhuma medida de qualidade unária que é capaz de indicar se uma aproximação A é melhor do que uma aproximação B, mesmo quando consideramos uma combinação finita dessas medidas;
- Existência de várias medidas de desempenho;
- Uma vez que a avaliação de desempenho de MOEAs representa uma tarefa multicritério, a consideração de medidas binárias de qualidade. é muito útil.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Referências:

- D. Van Veldhuizen & G. Lamont (2000). On Measuring Multiobjective Evolutionary Algorithm Performance, IEEE, pp. 204?211.
- Joshua Knowles & David Corne (2002). On Metrics for Comparing Nondominated Sets, IEEE, pp. 711?716.
- Tatsuya Okabe, Yaochu Jin & Bernhard Sendhoff (2003). A Critical Survey of Performance Indices for Multi-Objective Optimisation, IEEE, pp. 878?885.
- Zhenan He & Gary Yen (2011). An Ensemble Method for Performance Metrics in Multiobjective Evolutionary Algorithms, IEEE, pp. 1724?1729.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto