PCC175 - TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO

Aula 01 - Introdução

Gladston Juliano Prates Moreira
email: gladston@ufop.edu.br

CSILab, Departamento de Computação
Universidade Federal de Ouro Preto

15 de abril de 2026

Apresentação

Introdução

O que é Otimização?

O que é Otimização?

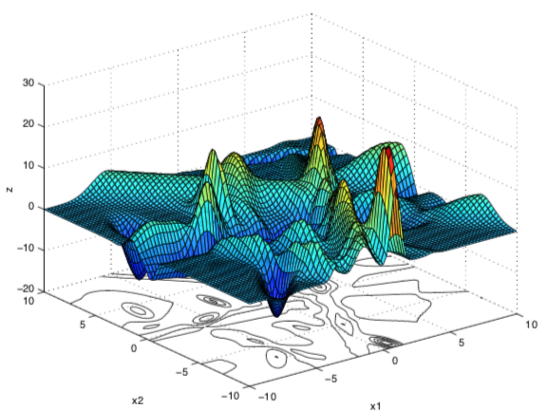
- Os mecanismos de otimização tratam da questão de determinar a "melhor solução" de problemas abstratos para os quais é possível quantificar o grau de adequação de cada solução à necessidade em causa.

O que é Otimização?

- Os mecanismos de otimização tratam da questão de determinar a "melhor solução" de problemas abstratos para os quais é possível quantificar o grau de adequação de cada solução à necessidade em causa.
- Classicamente, otimização consiste no processo de encontrar as condições que fornecem o valor mínimo ou máximo de uma função.

O que é Otimização?

O que é Otimização?



O que é Otimização?

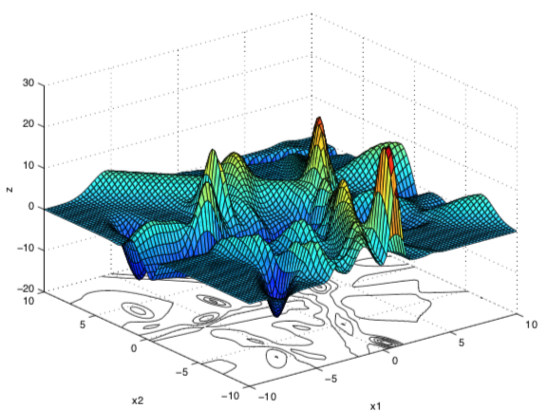


Figura 1: Superfície que representa o gráfico de uma função $f(x)$.

O que é Otimização?

Metáfora para a solução do problema de otimização:

- Um aluno é lançado de pára-quedas sobre um ponto qualquer da superfície de $f(x)$;
- O objetivo do aluno é encontrar o ponto mais baixo de $f(x)$, i.e. o ponto de mínimo, com o menor número possível de "passos";
- Deverá caminhar com uma venda cobrindo seus olhos, sem poder "olhar" para a superfície;
- A única informação que ele pode utilizar é a altura do ponto no qual estiver "pisando";
- Pode, entretanto, se "lembrar" das alturas dos pontos em que já tiver pisado;
- Esta informação pode ser utilizada para tomar a decisão de "para onde caminhar".

O que é Otimização?

Construir os chamados métodos de otimização corresponde, dentro dessa metáfora, a formular as estratégias a serem utilizadas pelo "aluno" em sua busca pelo ponto de mínimo.

O que é Otimização?

Que tipo de estratégia de otimização utilizar? Esta escolha depende das características da superfície de $f(x)$:

- Diferenciabilidade: diferenciável ou não-diferenciável
- Modalidade: unimodal ou multimodal
- Convexidade: convexa, quasi-convexa, não-convexa
- Linearidade: linear ou não-linear
- Escala: uni-escala ou multi-escala

Um problema de otimização, pode descrito por um modelo geral como segue:

$$\min \ f(x)$$

sujeito a:

$$\begin{cases} g_i(x) \leq 0 \ \forall i = 1, ..., m \\ h_j(x) = 0 \ \forall j = m+1, ..., l \\ x \in \mathcal{X} \end{cases}$$

Problema de Otimização

Um problema de otimização, pode descrito por um modelo geral como segue:

$$\min \ f(x)$$

sujeito a:

$$\begin{cases} g_i(x) \leq 0 \ \forall i = 1, ..., m \\ h_j(x) = 0 \ \forall j = m+1, ..., l \\ x \in \mathcal{X} \end{cases}$$

Onde:

- $x \in \mathcal{X}$ é o vetor de variáveis de decisão;

Problema de Otimização

Um problema de otimização, pode descrito por um modelo geral como segue:

$$\min \ f(x)$$

sujeito a:

$$\begin{cases} g_i(x) \leq 0 \ \forall i = 1, ..., m \\ h_j(x) = 0 \ \forall j = m+1, ..., l \\ x \in \mathcal{X} \end{cases}$$

Onde:

- $x \in \mathcal{X}$ é o vetor de variáveis de decisão;
- $f(x)$ é a função objetivo;

Problema de Otimização

Um problema de otimização, pode descrito por um modelo geral como segue:

$$\min \ f(x)$$

sujeito a:

$$\begin{cases} g_i(x) \leq 0 \ \forall i = 1, ..., m \\ h_j(x) = 0 \ \forall j = m+1, ..., l \\ x \in \mathcal{X} \end{cases}$$

Onde:

- $x \in \mathcal{X}$ é o vetor de variáveis de decisão;
- $f(x)$ é a função objetivo;
- $g_i(x), h_j(x)$ são as restrições do problema.

Espaço das soluções candidatas

As restrições do problema definem o conjunto S, das soluções válidas, soluções viáveis ou soluções factíveis.

Espaço das soluções candidatas
As restrições do problema definem o conjunto S, das soluções válidas, soluções viáveis ou soluções factíveis.

O Problema
Encontrar $x^* \in S$, a solução ótima, que minimiza/maximiza $f(x)$.

Domínio das Variáveis

- Otimização contínua vs. otimização discreta (combinatória).

Problema de Otimização

Domínio das Variáveis

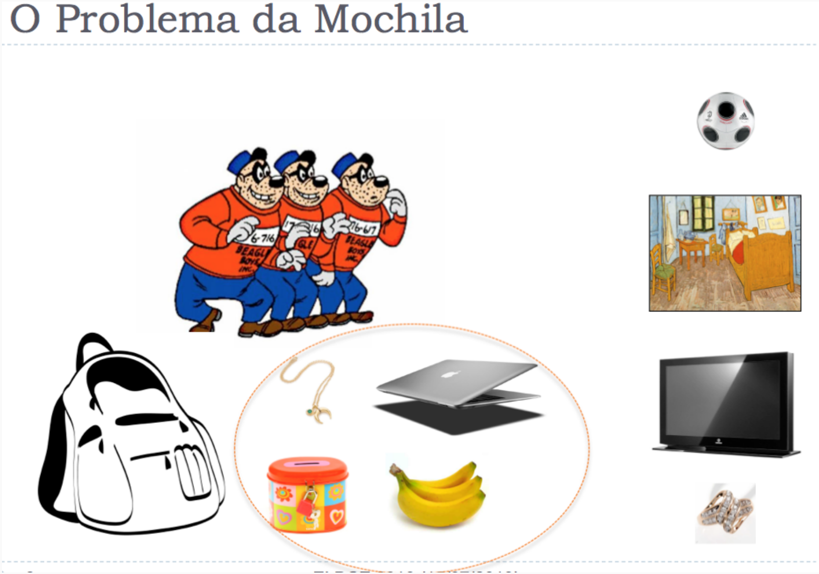
- Otimização contínua vs. otimização discreta (combinatória).

$$\mathcal{X} = \{x = (x_1, \cdots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathcal{X} = \{x = (x_1, \cdots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{Z}^+\}$$
$$\mathcal{X} = \{x = (x_1, \cdots, x_n), \quad x_i \in \{0, 1\}\}$$

O Problema da Mochila

O Problema da Mochila

Problema de Otimização



Problema de Otimização

Restrições

- Otimização restrita vs. otimização irrestrita

$$\begin{cases} g_i(x) \leq 0 \ \forall i = 1, ..., m \\ h_j(x) = 0 \ \forall j = m+1, ..., l \\ x \in \mathcal{X} \end{cases}$$

Restrições

- Otimização restrita vs. otimização irrestrita

$$\begin{cases} g_i(x) \leq 0 \ \forall i = 1, ..., m \\ h_j(x) = 0 \ \forall j = m+1, ..., l \\ x \in \mathcal{X} \end{cases}$$

- **Disponibilidade** de recursos, ...

Restrições

- Otimização restrita vs. otimização irrestrita

$$\begin{cases} g_i(x) \leq 0 \ \forall i = 1, ..., m \\ h_j(x) = 0 \ \forall j = m+1, ..., l \\ x \in \mathcal{X} \end{cases}$$

- **Disponibilidade** de recursos, ...
- **Operacionais** horários de trabalho, tempo de máquina, ...

Restrições

- Otimização restrita vs. otimização irrestrita

$$\begin{cases} g_i(x) \leq 0 \ \forall i = 1, ..., m \\ h_j(x) = 0 \ \forall j = m+1, ..., l \\ x \in \mathcal{X} \end{cases}$$

- **Disponibilidade** de recursos, ...
- **Operacionais** horários de trabalho, tempo de máquina, ...
- **Limites** venda em escala, ...

Problema de Otimização

Número de objetivos

- Otimização escalar (mono-objetivo) vs. otimização multi-objetivo (vetorial)

Número de objetivos

- Otimização escalar (mono-objetivo) vs. otimização multi-objetivo (vetorial)

$$f(x) = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$$

Casos Particulares

- Problemas de Programação Linear:
  Função objetivo linear; restrições lineares;

Casos Particulares

- Problemas de Programação Linear:
  Função objetivo linear; restrições lineares;
- Problemas de Programação Quadrática:
  Função objetivo quadrática; restrições lineares;

Casos Particulares

- Problemas de Programação Linear:
  Função objetivo linear; restrições lineares;
- Problemas de Programação Quadrática:
  Função objetivo quadrática; restrições lineares;
- Problemas de Programação não-linear:
  Função objetivo não linear; restrições lineares ou não lineares;

Casos Particulares

- Problemas de Programação Linear:
  Função objetivo linear; restrições lineares;
- Problemas de Programação Quadrática:
  Função objetivo quadrática; restrições lineares;
- Problemas de Programação não-linear:
  Função objetivo não linear; restrições lineares ou não lineares;
- Problemas de Programação Inteira:
  Variáveis inteiras;

Casos Particulares

- Problemas de Programação Linear:
  Função objetivo linear; restrições lineares;
- Problemas de Programação Quadrática:
  Função objetivo quadrática; restrições lineares;
- Problemas de Programação não-linear:
  Função objetivo não linear; restrições lineares ou não lineares;
- Problemas de Programação Inteira:
  Variáveis inteiras;
- ...

Problema de Otimização

Um problema de otimização, pode descrito por um modelo geral como segue:

$$\min \ f(x)$$

sujeito a:

$$\begin{cases} g_i(x) \leq 0 \ \forall i = 1, ..., m \\ h_j(x) = 0 \ \forall j = m+1, ..., l \\ x \in \mathcal{X} \end{cases}$$

Ótimo global
O ponto $x^* \in \mathcal{X}$ é ótimo global da função $f(x)$ se, para qualquer $x \neq x^*$, temos $f(x^*) \leq f(x)$.

Ótimo global
O ponto $x^* \in \mathcal{X}$ é ótimo global da função $f(x)$ se, para qualquer $x \neq x^*$, temos $f(x^*) \leq f(x)$.

Ótimo local
O ponto $x' \in \mathcal{X}$ é ótimo local da função $f(x)$ se, para qualquer $x \in \mathcal{V}(x')$, onde $\mathcal{V}(x')$ é uma vizinhança de x', com $x \neq x'$, temos $f(x') \leq f(x)$.

Problema de Otimização

Noção de Vizinhança

- Seja S o espaço de busca do problema.
- $s \in S$ uma solução.
- Seja N uma função que associa a cada solução $s \in S$, um subconjunto $N(s) \subseteq S$, denominado a vizinhança de s.
- Cada solução $s' \in N(s)$ é chamada vizinho de s.

Métodos Exatos

Fornecem garantias sobre a otimalidade da solução encontrada, ou seja, a solução encontrada é a melhor solução do conjunto das soluções viáveis para o problema. No caso de problemas NP-difíceis, não existe (ou muito provavelmente não existe) algoritmo que garanta que a solução exata seja encontrada em tempo polinomial.

Métodos Exatos
Fornecem garantias sobre a otimalidade da solução encontrada, ou seja, a solução encontrada é a melhor solução do conjunto das soluções viáveis para o problema. No caso de problemas NP-difíceis, não existe (ou muito provavelmente não existe) algoritmo que garanta que a solução exata seja encontrada em tempo polinomial.

Métodos de Aproximação
Não fornecem garantias sobre a otimalidade da solução encontrada. O objetivo é garantir uma solução aproximada (quase-ótima) do problema em tempo polinomial.

Heurísticas

Qualquer método aproximado projetado com base nas propriedades estruturais ou nas características das soluções dos problemas, com complexidade reduzida em relação à dos algoritmos exatos e fornecendo, em geral, soluções viáveis de boa qualidade.

Heurísticas

Qualquer método aproximado projetado com base nas propriedades estruturais ou nas características das soluções dos problemas, com complexidade reduzida em relação à dos algoritmos exatos e fornecendo, em geral, soluções viáveis de boa qualidade.

Meta-heurística

Uma meta-heurística é um procedimento de alto nível ou heurística concebido para encontrar, gerar, ou selecionar um procedimento de nível inferior ou heurística (algoritmo de busca parcial), que pode fornecer uma solução suficientemente boa para um problema de otimização.

Algoritmos de busca local:

Métodos de Trajetória

Algoritmos de busca local:

- Busca Tabu,
- GRASP,
- Simulated Annealing,
- Iterated Local Search (ILS),
- Variable Neighborhood Search (VNS), outros.

Meta-heurísticas Populacionais

Exploram uma população de soluções a cada iteração. Estes métodos incorporam uma componente de aprendizagem e funcionam como uma amostragem polarizada do espaço de busca. Em geral são inspirados na natureza para produzir formas não convencionais de se resolver problemas.

Meta-heurísticas Populacionais

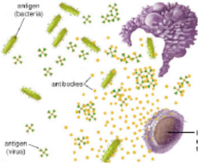
Exploram uma população de soluções a cada iteração. Estes métodos incorporam uma componente de aprendizagem e funcionam como uma amostragem polarizada do espaço de busca. Em geral são inspirados na natureza para produzir formas não convencionais de se resolver problemas.

- Algoritmos Genéticos,
- Colônia de Formigas,
- Particle Swarm Optimization (PSO),
- Sistemas Imunes Artificiais.

- Sistemas biológicos servem de modelo para o desenvolvimento de algoritmos de optimização

Algoritmos evolutivos / Algoritmos genéticos

Sistemas imunes artificiais



Inteligência de enxame

Métodos Determinísticos

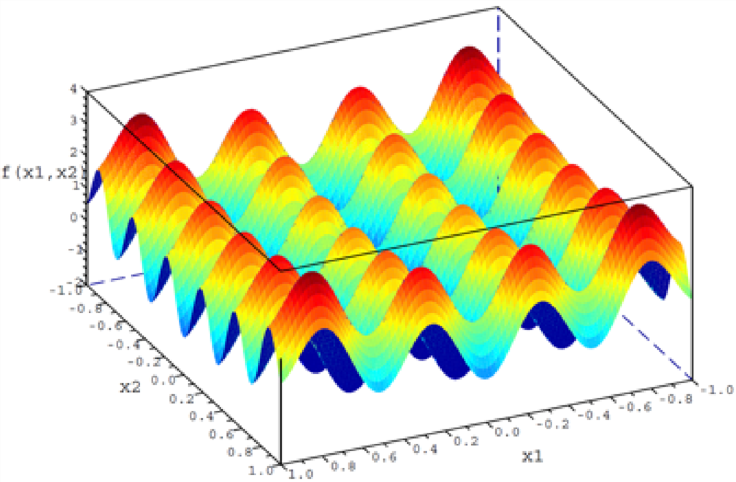
Geram uma sequência determinística de possíveis soluções.

Métodos Determinísticos

Geram uma sequência determinística de possíveis soluções.

- Métodos baseados em derivadas:
  - Método do Gradiente;
  - Método de Newton;
  - Métodos Quasi-Newton;
  - Métodos de Gradientes Conjugados;
- Métodos sem derivadas:
  - Método Nelder-Mead Simplex;
  - Método Hooke-Jeeves.

Dificuldades



Referências:

- Takahashi, R.H.C.; Notas de Aula: Otimização Escalar e Vetorial. http://www.decom.ufop.br/moreira/disciplinas/OVE.zip
- J. A. Ramírez, F. Campelo, F. G. Guimarães, Lucas S. Batista, Ricardo H. C. Takahashi, Notas de Aula de Otimização, 2010. http://www.decom.ufop.br/moreira/disciplinas/Notas1.pdf
- Izmailov, A, Solodov, V.M , Otimização Vol.1 Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade. Editora IMPA, 2012.
- Izmailov, A, Solodov, V.M , Otimização Vol. 2. Métodos Computacionais. Editora IMPA, 2012.