BCC342 - INTRODUÇÃO A OTIMIZAÇÃO

Problema de Programação Linear Inteira

Gladston Juliano Prates Moreira
email: gladston@ufop.edu.br

CSILab, Departamento de Computação
Universidade Federal de Ouro Preto

11 de novembro de 2024

Resolvedores PLI

Motivação

O problema da mochila

O desafio de encher uma mochila com capacidade limitada, otimizando o valor carregado.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Motivação

O problema da mochila

O desafio de encher uma mochila com capacidade limitada, otimizando o valor carregado.

Considere o seguinte problema da mochila:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & f(x) = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 5x_7 + 2x_8 \\
\textit{sujeito a}: \quad & \\
& 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 4x_6 + 6x_7 + 8x_8 \leq 25 \\
& x_j \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Problema de Programação Linear Inteira

Um problema de otimização linear inteira, pode descrito por um modelo geral como segue:

$$\min(ou\max)\ f(x)$$

$$\text{sujeito a:} \begin{cases} g_i(x) \leq b_i \ \forall i = 1, ..., m \\ h_j(x) = b_j \ \forall j = m+1, ..., l \\ x \in \mathcal{X} \end{cases}$$

Onde:

- $x \in \mathbb{Z}^+$ é o vetor de variáveis de decisão;
- A função objetivo $f(x)$ é linear;
- As restrições do problema $g_i(x), h_j(x)$ são lineares.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Forma Canônica

Um Problema de Programação Linear inteira (PLI), forma canônica:

$$\text{maximizar } f(x) = c^T x$$

$$\text{sujeito a:} \begin{cases} Ax \leq b \\ x \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

Observação: $\Omega = \{x \in \mathbb{Z}^+ | Ax \leq b\}$ é a interseção de um número finito de semi-espaços. A região viável é chamada de poliedro.

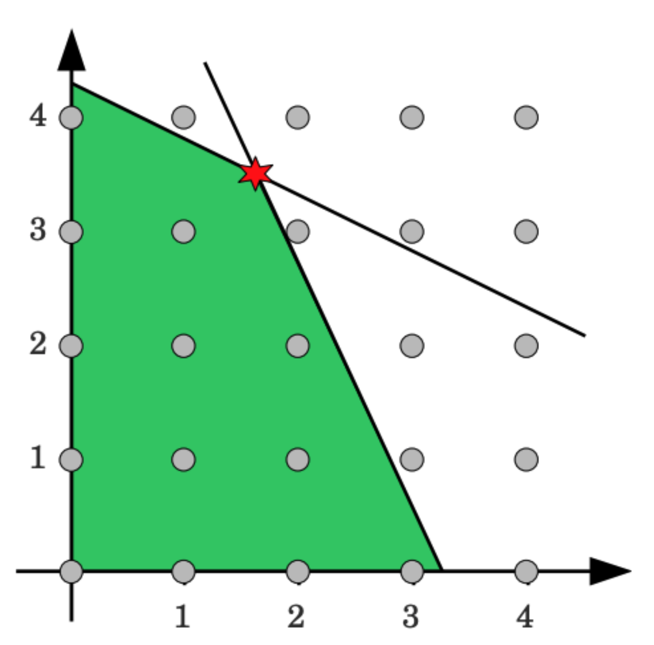
Exemplo

Considere o seguinte problema PPLI:

$$
\begin{aligned}
&\max f(x) = 6x_1 + 5x_2 \\
&\textit{sujeito a}: \\
&15x_1 + 7x_2 \leq 49 \\
&2x_1 + 4x_2 \leq 17 \\
&x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}
$$

- Solução ótima (contínua) é: $x_1 = 1,7$; $x_2 = 3,4$ e $f(x) = 27,2$.

Exemplo



Exemplo

- Aplicando a estratégia de arredondamento, uma vez que os valores ótimos são fracionários, e providenciando uma busca racional no entorno do ponto ótimo, teríamos:

x_1	x_2	$f(x)$	
1	3	$\boxed{21}$	$\rightarrow$ melhor solução?
1	4	Inviável	
2	3	Inviável	
2	4	Inviável	

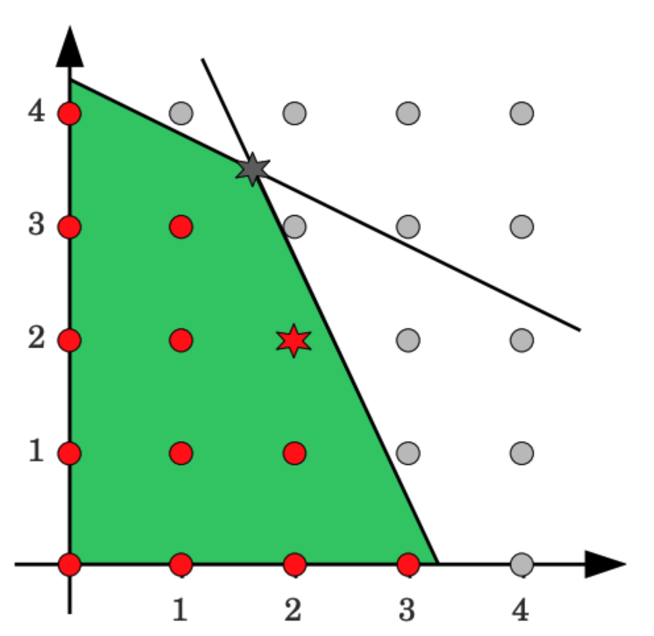
Exemplo

- Aplicando a estratégia de arredondamento, uma vez que os valores ótimos são fracionários, e providenciando uma busca racional no entorno do ponto ótimo, teríamos:

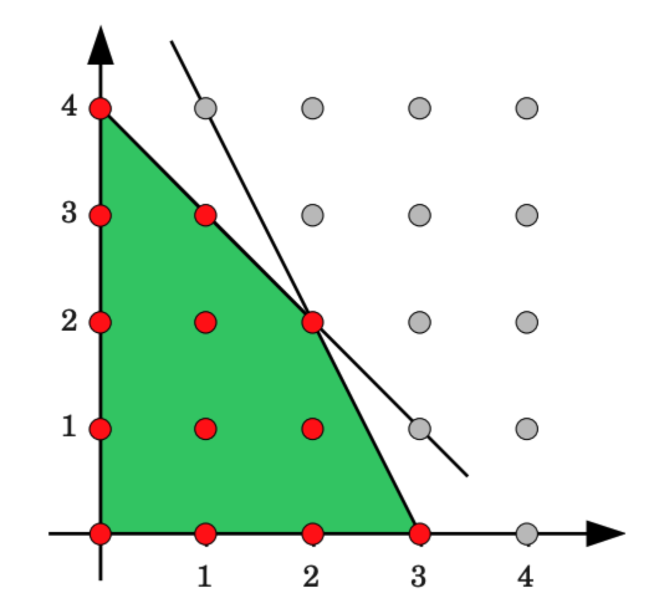
x_1	x_2	$f(x)$	
1	3	$\boxed{21}$	$\rightarrow$ melhor solução?
1	4	Inviável	
2	3	Inviável	
2	4	Inviável	

- No entanto, a solução ótima inteira é: $x_1 = 2$; $x_2 = 2$ e $f(x) = 22$.

Exemplo



Exemplo



Relaxação

Definição

Uma formulação $R = \{\max f_R(x) : x \in X_R\}$ é considerada uma relaxação de uma formulação $M = \{\max f(x) : x \in X\}$ se:

- todas as soluções de M são também soluções de R, ou seja, $X \subseteq X_R$,
- e toda solução $x \in X$ tem custo em R maior ou igual ao custo em M, ou seja, $f_R(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$

Técnicas de busca de solução inteira

Enumeração

- Branch-and-bound
- Enumeração implícita
- Restrições surrogate

Técnicas de busca de solução inteira

Enumeração

- Branch-and-bound
- Enumeração implícita
- Restrições surrogate

Cortes

- Cortes inteiros
- Cortes combinatórios
- Cortes de interseção

Resolvedores PLI

Branch-and-Bound

Planos de Corte

Ideia Básica

- O método baseia-se na ideia de desenvolver uma enumeração inteligente das soluções candidatas à solução ótima de um problema.

Branch-and-Bound

Ideia Básica

- O método baseia-se na ideia de desenvolver uma enumeração inteligente das soluções candidatas à solução ótima de um problema.
- O algoritmo roda sob a árvore de enumeração das soluções possíveis. No pior caso, todas as soluções serão exploradas. Na prática, frequentemente vários ramos são podados com o uso de limites.

Branch-and-Bound

Ideia Básica

- O método baseia-se na ideia de desenvolver uma enumeração inteligente das soluções candidatas à solução ótima de um problema.
- O algoritmo roda sob a árvore de enumeração das soluções possíveis. No pior caso, todas as soluções serão exploradas. Na prática, frequentemente vários ramos são podados com o uso de limites.
- O termo branch refere-se à partição no espaço das soluções. O termo bound refere-se aos limites ao longo da enumeração.

Branch-and-Bound

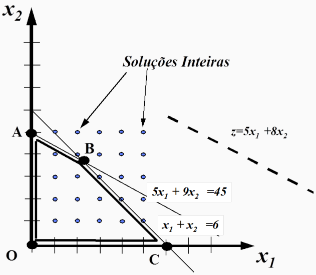
Ideia Básica

- O método baseia-se na ideia de desenvolver uma enumeração inteligente das soluções candidatas à solução ótima de um problema.
- O algoritmo roda sob a árvore de enumeração das soluções possíveis. No pior caso, todas as soluções serão exploradas. Na prática, frequentemente vários ramos são podados com o uso de limites.
- O termo branch refere-se à partição no espaço das soluções. O termo bound refere-se aos limites ao longo da enumeração.

Exemplo

Considere o seguinte problema PPLI:

$$
\begin{aligned}
&\max f(x) = 5x_1 + 8x_2 \\
&\textit{sujeito a}: \\
&5x_1 + 45x_2 \leq 45 \\
&x_1 + x_2 \leq 6 \\
&x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}
$$



Solução ótima é:
$x_1 = 2,25$; $x_2 = 3,75$
e $f(x) = 41,25$;

Exemplo

- Selecionar arbitrariamente uma variável não inteira. Seja $x_2 = 3,75$;

Exemplo

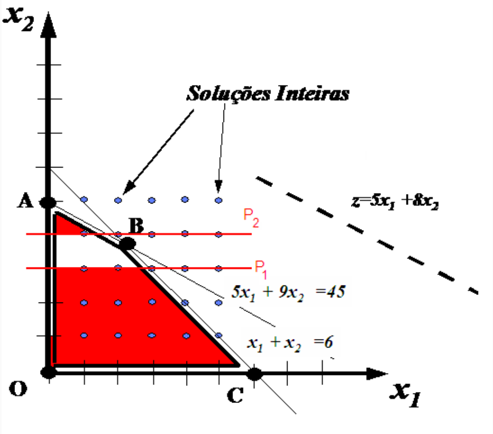
- Selecionar arbitrariamente uma variável não inteira. Seja $x_2 = 3,75$;
- Resolver o P1 = Restrições do P0 + a restrição $x_2 \leq 3$;

Exemplo

- Selecionar arbitrariamente uma variável não inteira. Seja $x_2 = 3,75$;
- Resolver o P1 $=$ Restrições do P0 $+$ a restrição $x_2 \leq 3$;
- Resolver o P2 $=$ Restrições do P0 $+$ a restrição $x_2 \geq 4$;

Exemplo

- Selecionar arbitrariamente uma variável não inteira. Seja $x_2 = 3,75$;
- Resolver o P1 = Restrições do P0 + a restrição $x_2 \leq 3$;
- Resolver o P2 = Restrições do P0 + a restrição $x_2 \geq 4$;



Exemplo

(P1)

$$
\begin{aligned}
&\max f(x) = 5x_1 + 8x_2 \\
&\textit{sujeito a}: \\
&5x_1 + 45x_2 \leq 45 \\
&x_1 + x_2 \leq 6 \\
&x_2 \leq 3 \\
&x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}
$$

(P2)

$$
\begin{aligned}
&\max f(x) = 5x_1 + 8x_2 \\
&\textit{sujeito a}: \\
&5x_1 + 45x_2 \leq 45 \\
&x_1 + x_2 \leq 6 \\
&x_2 \geq 4 \\
&x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}
$$

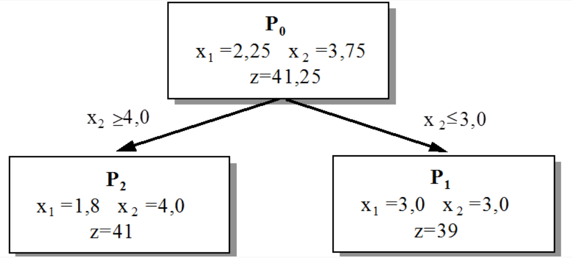
Exemplo

(P1)

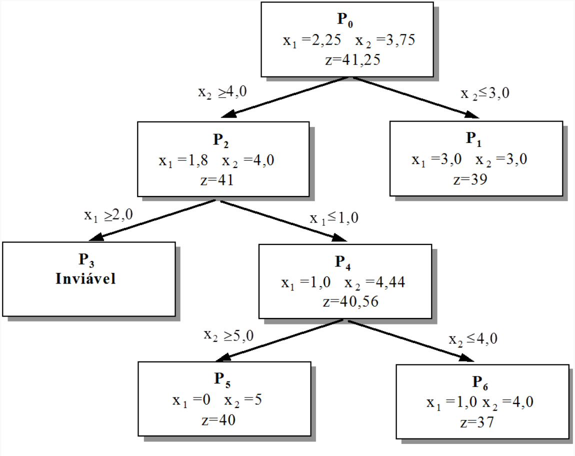
$$\max f(x) = 5x_1 + 8x_2$$
$$\textit{sujeito a}:$$
$$5x_1 + 45x_2 \leq 45$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$

(P2)

$$\max f(x) = 5x_1 + 8x_2$$
$$\textit{sujeito a}:$$
$$5x_1 + 45x_2 \leq 45$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_2 \geq 4$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$



Exemplo



P0
x1 =2,25 x2 =3,75
z=41,25
x2 ≥4,0
x2 ≤3,0
P2
x1 =1,8 x2 =4,0
z=41
P1
x1 =3,0 x2 =3,0
z=39
x1 ≥2,0
x1 ≤1,0
P3
Inviável
P4
x1 =1,0 x2 =4,44
z=40,56
x2 ≥5,0
x2 ≤4,0
P5
x1 =0 x2 =5
z=40
P6
x1 =1,0 x2 =4,0
z=37

Exemplo 2

Considere o seguinte problema PPLI:

$$\begin{aligned}
&\max f(x) = 5x_1 + 4x_2 \\
&\textit{sujeito a}: \\
&10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\
&x_1 + x_2 \leq 5 \\
&x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}$$

Exemplo 2

Considere o seguinte problema PPLI:

$$\begin{aligned}
&\max f(x) = 5x_1 + 4x_2 \\
&\textit{sujeito a}: \\
&10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\
&x_1 + x_2 \leq 5 \\
&x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}$$

- Qual a solução ótima $x^* = (3.75; 1.25),\ f(x^*) = 23.75$

Exemplo 2

Considere o seguinte problema PPLI:

$$
\begin{aligned}
&\max f(x) = 5x_1 + 4x_2 \\
&\textit{sujeito a}: \\
&10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\
&x_1 + x_2 \leq 5 \\
&x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}
$$

- Qual a solução ótima $x^* = (3.75; 1.25)$, $f(x^*) = 23.75$
- Selecione a variável não inteira, $x_1 = 3.75$ para resolver por branch-and-bound.

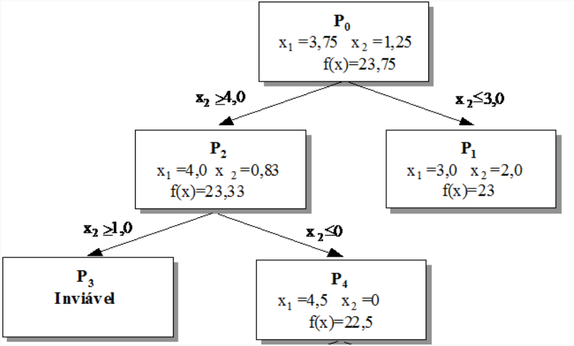
Exemplo 2

Considere o seguinte problema PPLI:

$$\max f(x) = 5x_1 + 4x_2$$
$$\textit{sujeito a}:$$
$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$
$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$

- Qual a solução ótima $x^* = (3.75; 1.25),\ f(x^*) = 23.75$
- Selecione a variável não inteira, $x_1 = 3.75$ para resolver por branch-and-bound.

Exemplo 2


P0
x1 =3,75 x2 =1,25
f(x)=23,75
x2 ≥4,0
x2≤3,0
P2
x1 =4,0 x2 =0,83
f(x)=23,33
P1
x1 =3,0 x2 =2,0
f(x)=23
x2 ≥1,0
x2≤0
P3
Inviável
P4
x1 =4,5 x2 =0
f(x)=22,5

Exemplo 3

Considere o seguinte problema PPLI:

$$\begin{aligned}
&\min f(x) = 4x_1 + 3x_2 \\
&\textit{sujeito a}: \\
&8x_1 + 3x_2 \geq 24 \\
&5x_1 + 6x_2 \geq 30 \\
&x_1 + 2x_2 \geq 9 \\
&x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}$$

Exemplo 3

Considere o seguinte problema PPLI:

$$
\begin{aligned}
& \min f(x) = 4x_1 + 3x_2 \\
& \textit{sujeito a}: \\
& 8x_1 + 3x_2 \geq 24 \\
& 5x_1 + 6x_2 \geq 30 \\
& x_1 + 2x_2 \geq 9 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}
$$

- Qual a solução ótima $x^* = (1.62; 3.69), f(x^*) = 17.54$

Exemplo 3

Considere o seguinte problema PPLI:

$$
\begin{aligned}
& \min f(x) = 4x_1 + 3x_2 \\
& \textit{sujeito a}: \\
& 8x_1 + 3x_2 \geq 24 \\
& 5x_1 + 6x_2 \geq 30 \\
& x_1 + 2x_2 \geq 9 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}
$$

- Qual a solução ótima $x^* = (1.62; 3.69), f(x^*) = 17.54$
- Selecione a variável não inteira, $x_2 = 3.69$ para resolver por branch-and-bound.

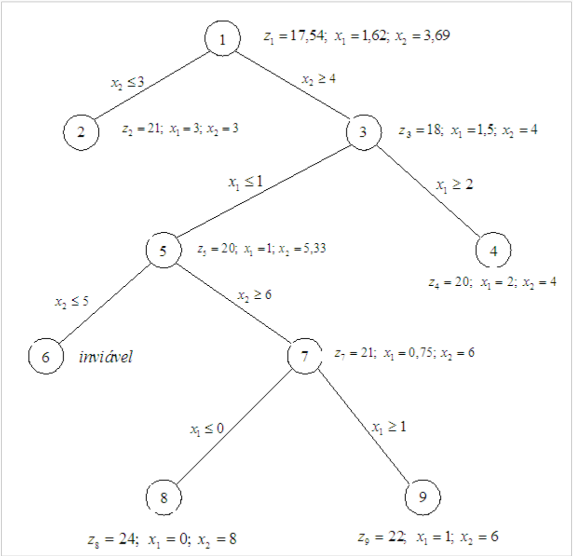
Exemplo 3

Considere o seguinte problema PPLI:

$$\begin{aligned}
&\min f(x) = 4x_1 + 3x_2 \\
&\textit{sujeito a}: \\
&8x_1 + 3x_2 \geq 24 \\
&5x_1 + 6x_2 \geq 30 \\
&x_1 + 2x_2 \geq 9 \\
&x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}$$

- Qual a solução ótima $x^* = (1.62; 3.69), f(x^*) = 17.54$
- Selecione a variável não inteira, $x_2 = 3.69$ para resolver por branch-and-bound.

Exemplo 3



1
$z_1 = 17{,}54;\ x_1 = 1{,}62;\ x_2 = 3{,}69$
$x_2 \leq 3$
$x_2 \geq 4$
2
$z_2 = 21;\ x_1 = 3;\ x_2 = 3$
3
$z_3 = 18;\ x_1 = 1{,}5;\ x_2 = 4$
$x_1 \leq 1$
$x_1 \geq 2$
5
$z_5 = 20;\ x_1 = 1;\ x_2 = 5{,}33$
4
$z_4 = 20;\ x_1 = 2;\ x_2 = 4$
$x_2 \leq 5$
$x_2 \geq 6$
6
inviável
7
$z_7 = 21;\ x_1 = 0{,}75;\ x_2 = 6$
$x_1 \leq 0$
$x_1 \geq 1$
8
9
$z_8 = 24;\ x_1 = 0;\ x_2 = 8$
$z_9 = 22;\ x_1 = 1;\ x_2 = 6$

Técnicas de formação da árvore (escolha da variável de separação)

- Variante de Dank (1960)
- Variante de Land e Doig (1965)
- Variante de Spielberg (1968)
- Métodos das penalidades (1965)
- Método de Taha (1971)
- Estratégias dinâmicas (1976)
- Outras variantes

Técnicas de formação da árvore (escolha da variável de separação)

- Variante de Dank (1960)
- Variante de Land e Doig (1965)
- Variante de Spielberg (1968)
- Métodos das penalidades (1965)
- Método de Taha (1971)
- Estratégias dinâmicas (1976)
- Outras variantes

Variante de Dank

A variável a ser escolhida para formação da árvore é que possuir maior resíduo, onde

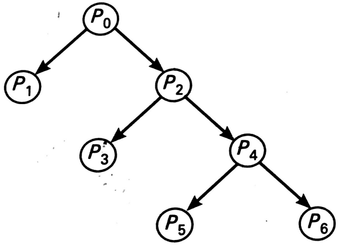
$$res(x_j) = x_j - [x_j]$$

Técnicas de desenvolvimento da árvore (escolha do problema)

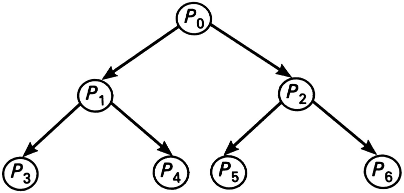
- Busca em profundidade
- Busca em largura
- Variantes híbridas

Técnicas de desenvolvimento da árvore (escolha do problema)

- Busca em profundidade
- Busca em largura
- Variantes híbridas



Busca em Profundidade



Busca em Largura

EXERCÍCIO

Desenvolva a árvore branch-and-bound para os problemas abaixo

(01)

$$\max f(x) = 3x_1 + 2x_2$$
$$\textit{sujeito a}:$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 9$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 9$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$

(02)

$$\min f(x) = 6x_1 + 8x_2$$
$$\textit{sujeito a}:$$
$$6x_1 + 7x_2 \geq 40$$
$$x_2 \geq 2$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$

(03)

$$\min f(x) = 5x_1 + 4x_2$$
$$\textit{sujeito a}:$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 5$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 7$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$

Ideia Básica

- Resolver o problema de programação inteira através da solução de uma sequência de problemas de programação linear:

Planos de Corte

Ideia Básica

- Resolver o problema de programação inteira através da solução de uma sequência de problemas de programação linear:
  - Resolva a relaxação linear de PI e seja x^* sua solução ótima.

Planos de Corte

Ideia Básica

- Resolver o problema de programação inteira através da solução de uma sequência de problemas de programação linear:
  - Resolva a relaxação linear de PI e seja x^* sua solução ótima.
  - Se x^* é inteiro, então x^* é a solução ótima do problema PI.

Planos de Corte

Ideia Básica

- Resolver o problema de programação inteira através da solução de uma sequência de problemas de programação linear:
  - Resolva a relaxação linear de PI e seja x^* sua solução ótima.
  - Se x^* é inteiro, então x^* é a solução ótima do problema PI.
  - Caso contrário, identificar uma desigualdade satisfeita por todas as soluções inteiras do problema PI, mas não por x^*.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Planos de Corte

Ideia Básica

- Resolver o problema de programação inteira através da solução de uma sequência de problemas de programação linear:
  - Resolva a relaxação linear de PI e seja x^* sua solução ótima.
  - Se x^* é inteiro, então x^* é a solução ótima do problema PI.
  - Caso contrário, identificar uma desigualdade satisfeita por todas as soluções inteiras do problema PI, mas não por x^*.
  - Adicionar esta desigualdade à relaxação linear de PI e retornar ao passo (1) acima.

Exemplo

Considere o seguinte problema PPLI:

$$\begin{array}{l} \max f(x) = 6x_1 + 5x_2 \\ \textit{sujeito a}: \\ 15x_1 + 7x_2 \leq 49 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 17 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{array}$$

Exemplo

Considere o seguinte problema PPLI:

$$
\begin{aligned}
&\max f(x) = 6x_1 + 5x_2 \\
&\textit{sujeito a}: \\
&15x_1 + 7x_2 \leq 49 \\
&2x_1 + 4x_2 \leq 17 \\
&x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}
$$

- A solução ótima fracionária $x^* = (1,67; 3,4), f(x^*) = 27,11$

Exemplo

Considere o seguinte problema PPLI:

$$
\begin{aligned}
&\max f(x) = 6x_1 + 5x_2 \\
&\textit{sujeito a}: \\
&15x_1 + 7x_2 \leq 49 \\
&2x_1 + 4x_2 \leq 17 \\
&x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}
$$

- A solução ótima fracionária $x^* = (1,67; 3,4), f(x^*) = 27,11$
- A solução ótima inteira $x^* = (2; 2), f(x^*) = 22$

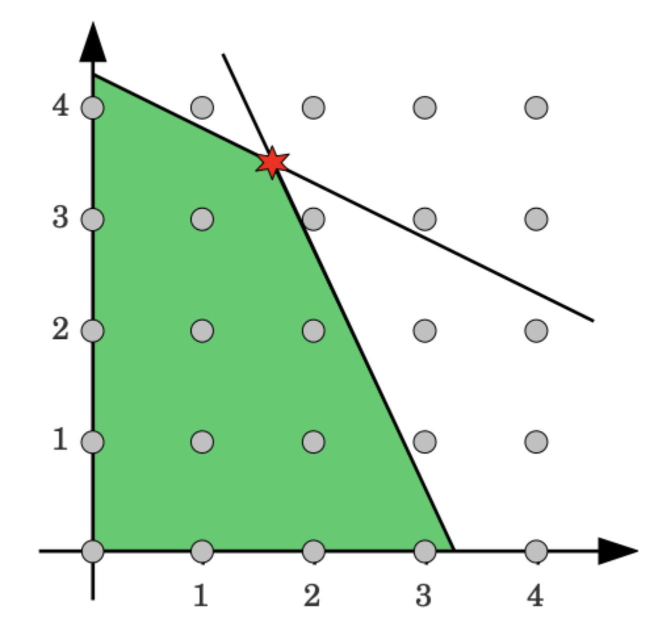
Exemplo

Considere o seguinte problema PPLI:

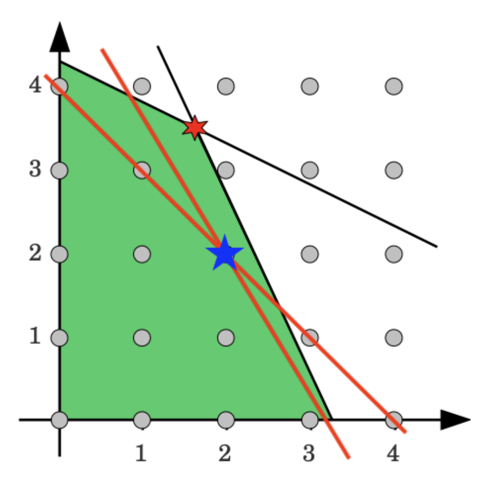
$$\max f(x) = 6x_1 + 5x_2$$
$$sujeito\ \ a:$$
$$15x_1 + 7x_2 \leq 49$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 17$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$

- A solução ótima fracionária $x^* = (1,67; 3,4), f(x^*) = 27,11$
- A solução ótima inteira $x^* = (2; 2), f(x^*) = 22$

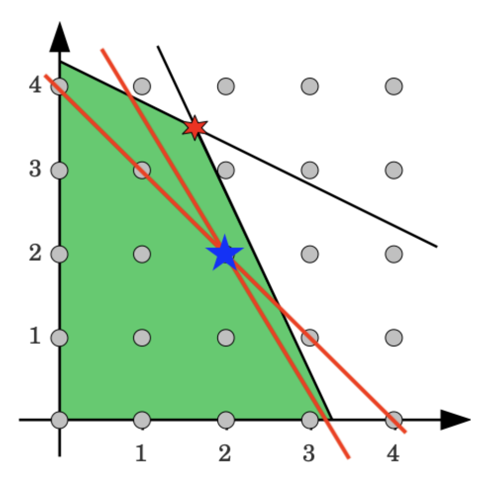
Exemplo



Exemplo



Exemplo



Como colocar uma restrição adicional que invalide a solução fracionária corrente (sem cortar soluções inteiras válidas)?

Dificuldades

Cortes genéricos eliminam uma fração muito pequena do poliedro que representa a região viável da relaxação linear e, por esta razão, seu desempenho é muito limitado (convergência muito lenta e problemas numéricos).

Exemplos de cortes (derivação baseada nos resultados do algoritmo Simplex):

- Cortes de Gomory
- Cortes disjuntivos
- Cortes de Benders

Desiguaidades de Chvátal-Gomory

- O princípio básico é resolver a relaxação linear e encontrar uma base ótima.

Desigualdades de Chvátal-Gomory

- O princípio básico é resolver a relaxação linear e encontrar uma base ótima.
- A partir da base ótima, se escolhe uma variável básica que não seja inteira.

Desiguaidades de Chvátal-Gomory

- O princípio básico é resolver a relaxação linear e encontrar uma base ótima.
- A partir da base ótima, se escolhe uma variável básica que não seja inteira.
- Então geramos uma desigualdade Chvátal-Gomory associada a esta variável básica visando "cortá-la", ou seja, eliminá-la do poliedro de relaxação.

Desigualdades de Chvátal-Gomory

Para qualquer $u \in \mathbb{R}^m_+$ e para todo $x_j \geq 0$ que satisfaz

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \leq b_i \ \forall i = 1, ..., m$$

também satisfazem:

$$\sum_{j=1}^{k} \left\lfloor \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \right\rfloor x_j \leq \left\lfloor \sum_{i=1}^{m} u_i b_i \right\rfloor$$

Definindo o Plano de Corte de Chvátal-Gomory.

Exemplo

Considere o seguinte problema

$$
\begin{aligned}
&\max f(x) = 3x_1 + 4x_2 \\
&\textit{sujeito a}: \\
&7x_1 + x_2 \leq 21 \\
&x_1 + 2x_2 \leq 11 \\
&x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}
$$

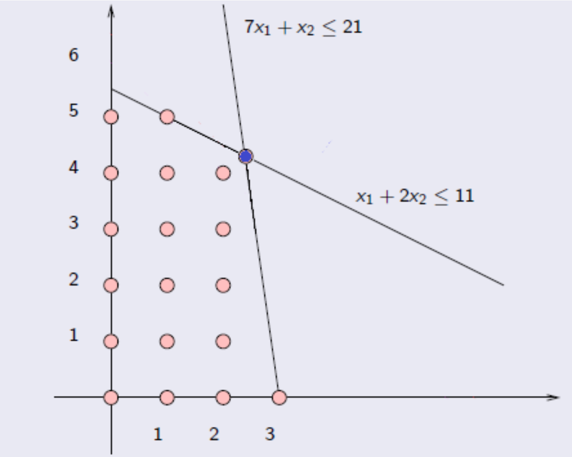
Exemplo

Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned}
&\max f(x) = 3x_1 + 4x_2 \\
&\textit{sujeito a}: \\
&7x_1 + x_2 \leq 21 \\
&x_1 + 2x_2 \leq 11 \\
&x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}$$

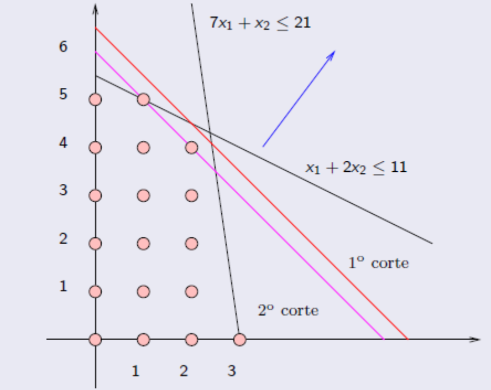
Solução Ótima

- A solução ótima do problema relaxado é $(\frac{31}{13}, \frac{56}{13})$.


$7x_1 + x_2 \leq 21$
$x_1 + 2x_2 \leq 11$
6
5
4
3
2
1
1
2
3

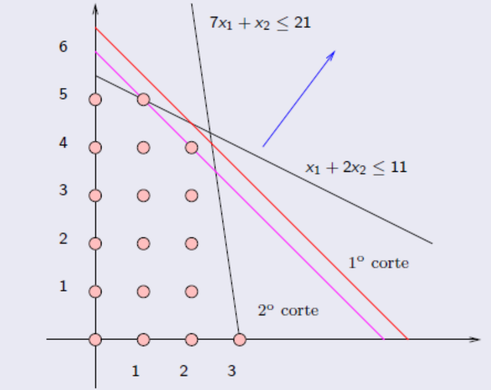
Solução Ótima inteira

- $u_1 = \frac{2}{13}$; $u_2 = \frac{12}{13}$ gera a desigualdade $2x_1 + 2x_2 \leq 13$ (corte 1).



Solução Ótima inteira

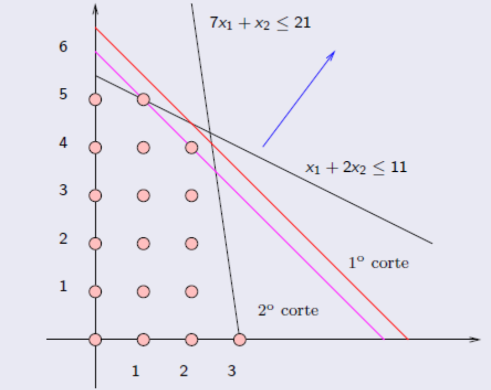
- $u_1 = \frac{2}{13}$; $u_2 = \frac{12}{13}$ gera a desigualdade $2x_1 + 2x_2 \leq 13$ (corte 1).



- $u_1 =?$; $u_2 =?$ gera a desigualdade $x_1 + x_2 \leq 6$ (corte 2).

Solução Ótima inteira

- $u_1 = \frac{2}{13}$; $u_2 = \frac{12}{13}$ gera a desigualdade $2x_1 + 2x_2 \leq 13$ (corte 1).



- $u_1 =?$; $u_2 =?$ gera a desigualdade $x_1 + x_2 \leq 6$ (corte 2).
- A solução ótima inteira do problema é $(1, 5)$.

Como encontrar o Corte?

- Seja uma restrição qualquer do problema de otimização inteira: $\sum_{n}^{j=1} a_{ij}x_j \leq b_i$;
- Seja a desigualdade oriunda do procedimento de Chavátal-Gomory aplicado sobre esta restrição: $\sum_{n}^{j=1} \lfloor a_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor b_i \rfloor$;
- O corte de Gomory consiste em subtrair (1) de (2), obtendo a seguinte desigualdade válida para o problema: $\sum_{n}^{j=1} (\lfloor a_{ij} \rfloor - a_{ij})x_j \leq (\lfloor b_i \rfloor - b_i)$;
- Adicionando uma variável de folga $sgeq0$ na desigualdade, tem-se: $\sum_{n}^{j=1} (\lfloor a_{ij} \rfloor - a_{ij})x_j + s = (\lfloor b_i \rfloor - b_i)$;
- Note que o corte, ou seja, a desigualdade válida, é uma nova restrição para o problema de otimização inteira.

Corte de Gomory

- O corte de Gomory é aplicado observando a tabela simplex ótima;
- Escolhe-se uma linha (restrição) dessa tabela cuja variável básica associada tem valor não inteiro;
- O corte deve ser inserido nesta tabela simplex ótima:
  - Cria-se uma nova linha no final da tabela;
  - A variável básica associada a linha é a variável de folga do corte, isto é, $s \geq 0$;
  - Cria-se também uma nova coluna na tabela, associada a variável de folga s;
  - Isto resultará em uma nova tabela simplex.
- A nova tabela simplex deve ser otimizada com o algoritmo dual simplex, pois houve a inserção de uma restrição no problema;
- O procedimento é repetido enquanto existir uma variável básica com valor não inteiro.

O Algoritmo de Plano de Corte

Passo 1 (Inicialização) Faça k = 0 e seja PL_0 a relaxação do problema de programação inteira P;

Passo 2 (Reotimização) Encontre a solução ótima de PL_k, consequentemente, sua tabela simplex ótima;

Passo 3 (Otimalidade) Se a solução ótima de PL_k for inteira: PARE! Solução ótima para P;

Passo 4 (Corte) Escolha uma linha da tabela ótima cuja variável é não inteira:

- Para a restrição que representa a linha da variável básica escolhida, gere o corte: $\sum_{n}^{j=1} (\lfloor a_{ij} \rfloor - a_{ij})x_j \leq (\lfloor b_i \rfloor - b_i)$;
- Insira este corte no fim da tabela simplex ótima de PL_k;
- Faça $k = k + 1$;
- Vá para o Passo 2.

Exemplo 3

Considere o seguinte problema PPLI:

$$
\begin{aligned}
&\max f(x) = 2x_1 + 10x_2 + x_3 \\
&\textit{sujeito a}: \\
&5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 15 \\
&2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 20 \\
&x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 25 \\
&x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}
$$

Exemplo

Exemplo 3

Considere o seguinte problema PPLI:

$$
\begin{aligned}
&\max f(x) = 2x_1 + 10x_2 + x_3\\
&\textit{sujeito a}:\\
&5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 15\\
&2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 20\\
&x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 25\\
&x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}
$$

Forma Padrão

$$\text{minimizar} \;\; -f(x) = -2x_1 - 10x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\text{sujeito a:} \left\{ \begin{array}{l}
5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 15\\
2x_1 + x_2 + 7x_3 + 0x_4 + x_5 + 0x_6 = 20\\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6 = 25\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{Z}^+
\end{array} \right.$$

Exemplo - Simplex

Tableau - Inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
Base	-2	-10	-1	0	0	0	0
x_4	5	2	1	1	0	0	15
x_5	2	1	7	0	1	0	20
x_6	1	3	2	0	0	1	25

Tableau - Ótima $k = 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
Base	23	0	4	5	0	0	75
x_2	5/2	1	1/2	1/2	0	0	15/2
x_5	-1/2	0	13/2	-1/2	1	0	25/2
x_6	-13/2	0	1/2	-3/2	0	1	5/2

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Escolhe-se a variável fracionária de menor valor!

Tableau - Ótima $k = 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
Base	23	0	4	5	0	0	75	
x_2	5/2	1	1/2	1/2	0	0	15/2	
x_5	-1/2	0	13/2	-1/2	1	0	25/2	
x_6	-13/2	0	1/2	-3/2	0	1	5/2	$\leftarrow$

Criando o corte de Gomory

$(-7+13/2)x_1+(0-0)x_2+(0-1/2)x_3+(-1+3/2)x_4+(0-0)x_5+(1-1)x_6 \leq (2-5/2)$

$-1/2x_1 - 1/2x_3 + 1/2x_4 \leq -1/2$

$-1/2x_1 - 1/2x_3 + 1/2x_4 + s_1 = -1/2$

- Insere-se o corte no fim da tabela simplex ótima de P_0
- Faça $k = k + 1$;

Tableau - Inicial $k = 1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1		
Base	23	0	4	5	0	0	0	75	
x_2	5/2	1	1/2	1/2	0	0	0	15/2	
x_5	-1/2	0	13/2	-1/2	1	0	0	25/2	
x_6	-13/2	0	1/2	-3/2	0	1	0	5/2	
s_1	-1/2	0	-1/2	1/2	0	0	1	-1/2	$\leftarrow$

Tableau - Decisão da coluna pivô

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1
$\|23/-1/2\|$	-	$\|4/-1/2\|$	$\|5/1/2\|$	-	-	-

Tableau - Inicial $k = 1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	
Base	23	0	4	5	0	0	0	75
x_2	5/2	1	1/2	1/2	0	0	0	15/2
x_5	-1/2	0	13/2	-1/2	1	0	0	25/2
x_6	-13/2	0	1/2	-3/2	0	1	0	5/2
s_1	-1/2	0	-1/2	1/2	0	0	1	-1/2

Tableau - Inicial $k = 1$ - Pivotação

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	
Base	23	0	4	5	0	0	0	75
x_2	2	1	0	1	0	0	1	7
x_5	-7	0	0	6	1	0	13	6
x_6	-7	0	0	-1	0	1	1	2
x_3	1	0	1	-1	0	0	-2	1

Solução Ótima

- A solução ótima do problema inteiro é $(0, 7, 1)$.

EXERCÍCIO

Aplique os cortes de Gomory para os problemas abaixo

(01)

$$\begin{aligned} &\max f(x) = 3x_1 + 2x_2 \\ &\textit{sujeito a}: \\ &2x_1 + 5x_2 \leq 9 \\ &4x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ &x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

(02)

$$\begin{aligned} &\min f(x) = 6x_1 + 8x_2 \\ &\textit{sujeito a}: \\ &6x_1 + 7x_2 \geq 40 \\ &x_2 \geq 2 \\ &x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

(03)

$$\begin{aligned} &\min f(x) = 5x_1 + 4x_2 \\ &\textit{sujeito a}: \\ &3x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ &2x_1 + 3x_2 \geq 7 \\ &x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$