PCC175 - TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO

Aula 03 - Geração do Conjunto de Soluções Eficientes

Gladston Juliano Prates Moreira
email: gladston@ufop.edu.br

CSILab, Departamento de Computação
Universidade Federal de Ouro Preto

7 de outubro de 2024

Métodos Escalares

Problema de Otimização Multi-objetivo ou Vetorial

Um problema de otimização vetorial, pode descrito por um modelo geral como segue:

$$\min \; f(x) \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^m$$

sujeito a:

$$\mathcal{F}_x = \begin{cases} g_i(x) \leq 0 \;\forall i = 1, ..., p \\ h_j(x) = 0 \;\forall j = 1, ..., q \\ x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Métodos Escalares

- Método da soma ponderada - Problema (P_λ);
- Método ϵ-restrito - Problema (P_ϵ);
- Método ϵ-restrito híbrido;
- Método de programação por metas;
- Método goal attainment;
- Programação de compromisso;
- Método da distância a um ponto de referência;
- Métodos Fuzzy.

UFOP Universidade Federal de Ouro Preto

Problema (P_λ)

- Esta é a abordagem mais óbvia e "ingênua" para otimização multi-objetivo;
- O problema multi-objetivo original é transformado num problema mono-objetivo, podendo ser resolvido por qualquer método de otimização;
- A estratégia adota uma soma ponderada dos objetivos.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Problema (P_λ)

- Esta é a abordagem mais óbvia e “ingênua” para otimização multi-objetivo;
- O problema multi-objetivo original é transformado num problema mono-objetivo, podendo ser resolvido por qualquer método de otimização;
- A estratégia adota uma soma ponderada dos objetivos.

Problema (P_λ)

- Esta é a abordagem mais óbvia e "ingênua" para otimização multi-objetivo;
- O problema multi-objetivo original é transformado num problema mono-objetivo, podendo ser resolvido por qualquer método de otimização;
- A estratégia adota uma soma ponderada dos objetivos.

Problema (P_λ)

Formulação

O problema de otimização vetorial, é transformado no Problema P_λ:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$$

sujeito a:

$$\mathcal{F}_x = \begin{cases} g_i(x) \leq 0 \ \forall i = 1, ..., p \\ h_j(x) = 0 \ \forall j = 1, ..., q \\ x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

com $\{\lambda \geq 0, \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\}$.

Problema (P_λ)

No caso de duas funções objetivos, temos:

$$\min \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$$

No espaço de objetivos, esse problema corresponde a encontrar a menor constante C possível da equação:

$$f_2(x) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} f_1(x) + C$$

Problema (P_λ)

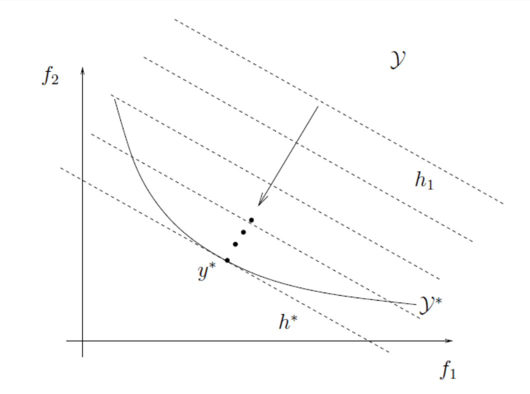
No caso de duas funções objetivos, temos:

$$\min \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$$

No espaço de objetivos, esse problema corresponde a encontrar a menor constante C possível da equação:

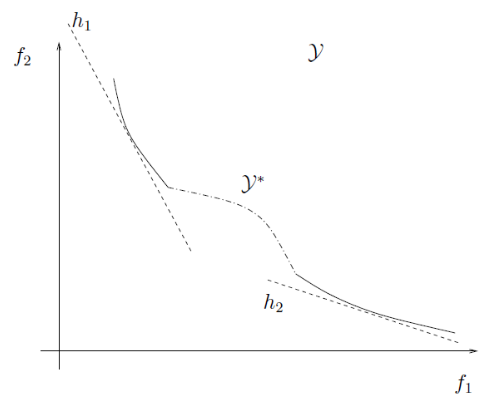
$$f_2(x) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} f_1(x) + C$$

Problema (P_λ)



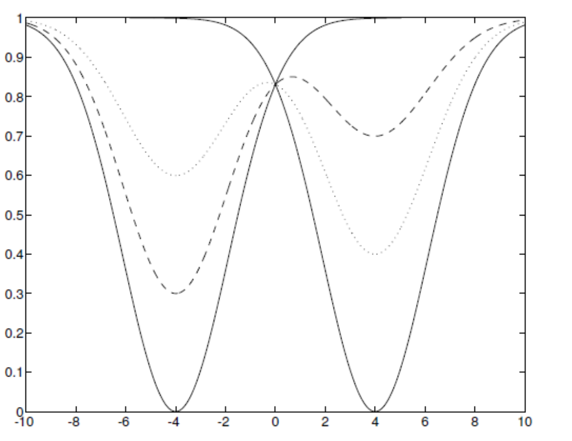
O vetor de ponderações λ define a inclinação da reta. O processo de minimização faz a busca da reta que se encontra a mínima distância da origem do espaço dos objetivos.

Problema (P_λ)



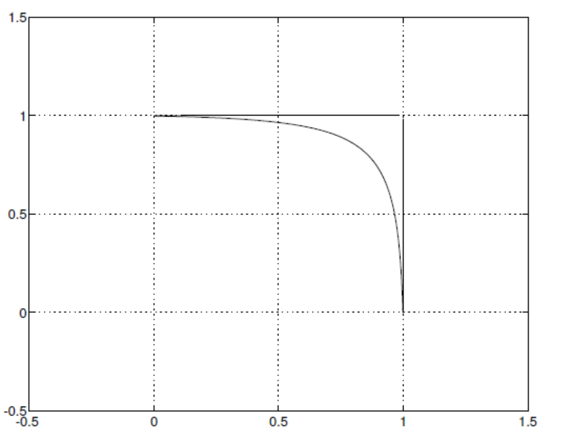
O conjunto de Pareto $\mathcal{Y}^*$ possui trechos nos quais todos os pontos possuem reta-suporte, e outros trechos, nos quais nenhum ponto admite reta-suporte.

Problema (P_λ) - Exemplo



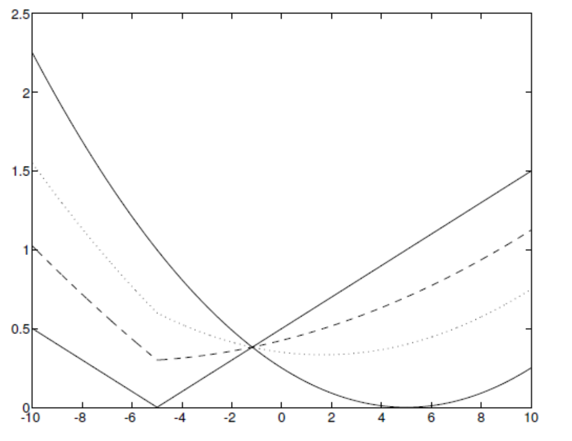
Representação das funções-objetivo f_1, f_2 e das funções ponderadas $0.7f_1 + 0.3f_2$ e $0.4f_1 + 0.6f_2$.

Problema (P_λ) - Exemplo



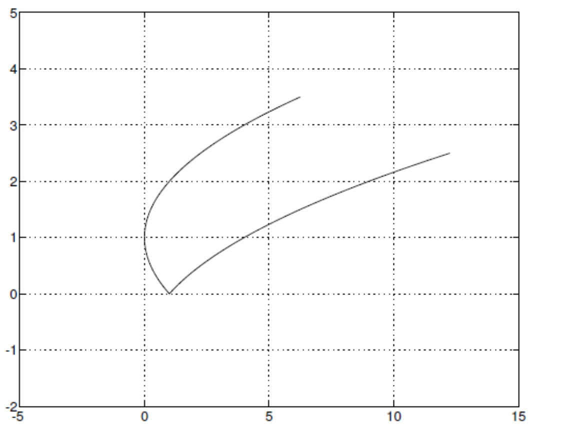
Representação da região $\mathcal{F}_\mathcal{Y}$ (espaço de objetivos).

Problema (P_λ) - Exemplo



Representação das funções-objetivo f_1, f_2 e das funções ponderadas $0.7f_1 + 0.3f_2$ e $0.4f_1 + 0.6f_2$.

Problema (P_λ) - Exemplo



Representação da região $\mathcal{F}_\mathcal{Y}$ (espaço de objetivos).

Problema (P_λ)

- Vantagens:
  - Computacionalmente muito simples;
  - Se o problema tem imagem convexa, é possível gerar dessa forma, variando o vetor λ, todo o conjunto de soluções eficientes do problema;
  - Aplica qualquer mecanismo de otimização que seja capaz de resolver cada problema mono-objetivo individualmente.
- Desvantagens:
  - Várias ponderações podem estar associadas à mesma solução eficiente;
  - Não se aplica a problemas não convexos, nos quais talvez não seja possível gerar várias soluções eficientes;

Problema (P_λ)

- Vantagens:
  - Computacionalmente muito simples;
  - Se o problema tem imagem convexa, é possível gerar dessa forma, variando o vetor λ, todo o conjunto de soluções eficientes do problema;
  - Aplica qualquer mecanismo de otimização que seja capaz de resolver cada problema mono-objetivo individualmente.
- Desvantagens:
  - Várias ponderações podem estar associadas à mesma solução eficiente;
  - Não se aplica a problemas não convexos, nos quais talvez não seja possível gerar várias soluções eficientes;

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Problema (P_λ)

- Vantagens:
  - Computacionalmente muito simples;
  - Se o problema tem imagem convexa, é possível gerar dessa forma, variando o vetor λ, todo o conjunto de soluções eficientes do problema;
  - Aplica qualquer mecanismo de otimização que seja capaz de resolver cada problema mono-objetivo individualmente.
- Desvantagens:
  - Várias ponderações podem estar associadas à mesma solução eficiente;
  - Não se aplica a problemas não convexos, nos quais talvez não seja possível gerar várias soluções eficientes;

Problema (P_λ)

- Vantagens:
  - Computacionalmente muito simples;
  - Se o problema tem imagem convexa, é possível gerar dessa forma, variando o vetor λ, todo o conjunto de soluções eficientes do problema;
  - Aplica qualquer mecanismo de otimização que seja capaz de resolver cada problema mono-objetivo individualmente.
- Desvantagens:
  - Várias ponderações podem estar associadas à mesma solução eficiente;
  - Não se aplica a problemas não convexos, nos quais talvez não seja possível gerar várias soluções eficientes;

Problema (P_λ)

- Vantagens:
  - Computacionalmente muito simples;
  - Se o problema tem imagem convexa, é possível gerar dessa forma, variando o vetor λ, todo o conjunto de soluções eficientes do problema;
  - Aplica qualquer mecanismo de otimização que seja capaz de resolver cada problema mono-objetivo individualmente.
- Desvantagens:
  - Várias ponderações podem estar associadas à mesma solução eficiente;
  - Não se aplica a problemas não convexos, nos quais talvez não seja possível gerar várias soluções eficientes;

Problema P_ϵ

- Essa abordagem transforma o problema multi-objetivo em um problema mono-objetivo com restrições adicionais;
- Um dos objetivos é escolhido para ser minimizado;
- Os demais objetivos são transformados em restrições de desigualdade.

Problema P_ϵ

- Essa abordagem transforma o problema multi-objetivo em um problema mono-objetivo com restrições adicionais;
- Um dos objetivos é escolhido para ser minimizado;
- Os demais objetivos são transformados em restrições de desigualdade.

Problema P_ϵ

- Essa abordagem transforma o problema multi-objetivo em um problema mono-objetivo com restrições adicionais;
- Um dos objetivos é escolhido para ser minimizado;
- Os demais objetivos são transformados em restrições de desigualdade.

Formulação

O problema de otimização vetorial, é transformado no Problema P_ϵ:

$$\min f_i(x)$$

sujeito a:

$$\mathcal{F}_x = \begin{cases} f_k(x) \leq \epsilon_k \;\; k = 1, ..., m, \;\; k \neq i \\ g_i(x) \leq 0 \; \forall i = 1, ..., p \\ h_j(x) = 0 \; \forall j = 1, ..., q \\ x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Problema (P_ϵ) - Exemplo

No caso de duas funções objetivos, temos:

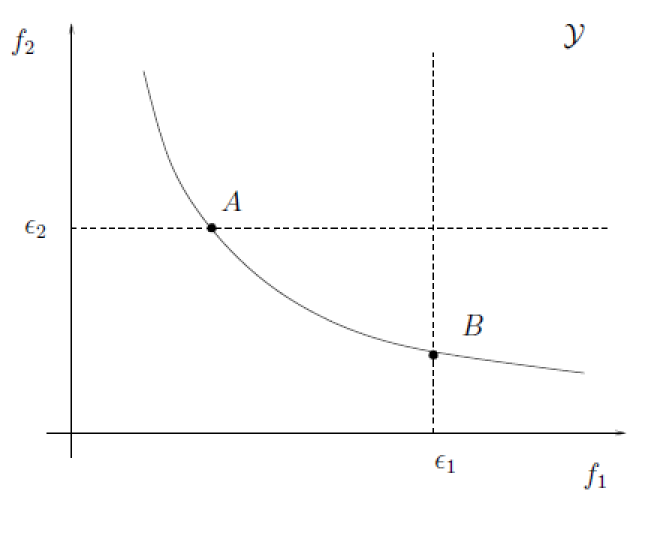
$$\min f_1(x)$$

sujeito a:

$$\mathcal{F}_x = \begin{cases} f_2(x) \leq \epsilon \\ g_i(x) \leq 0 \ \forall i = 1, ..., p \\ h_j(x) = 0 \ \forall j = 1, ..., q \\ x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Problema P_ϵ - Exemplo



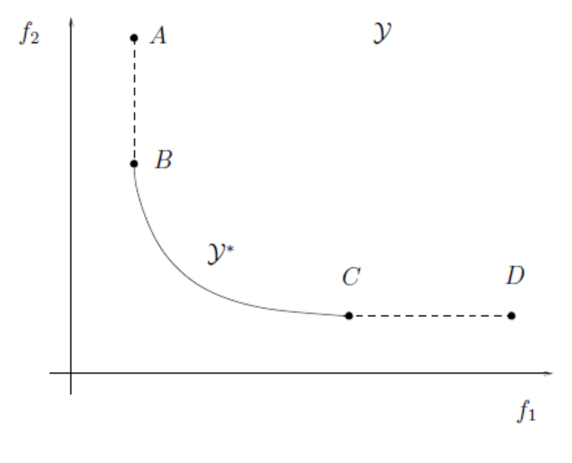
Problema P_ϵ - Exemplo

- Deficiência básica: a seleção dos reais ϵ_j que geram soluções eficientes não é tarefa trivial:
  - O ponto obtido pode não ser eficiente;
  - Os valores de ϵ_j podem tornar (P_ϵ) infactível.

Problema P_ϵ - Exemplo

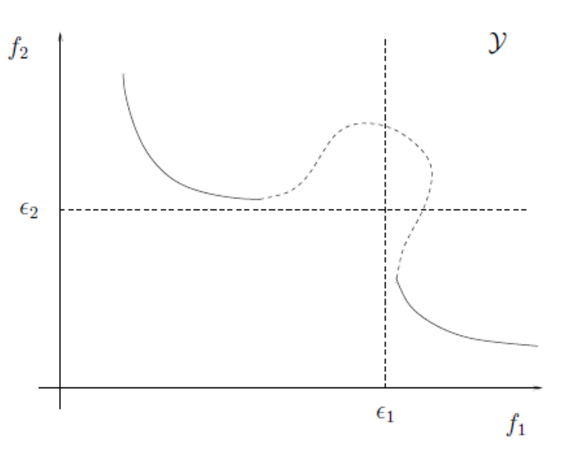
- Deficiência básica: a seleção dos reais ϵ_j que geram soluções eficientes não é tarefa trivial:
  - O ponto obtido pode não ser eficiente;
  - Os valores de ϵ_j podem tornar (P_ϵ) infactível.

Problema P_ϵ - Exemplo



Gera pontos não pertencentes ao conjunto de soluções eficientes

Problema P_ϵ - Exemplo



Dificuldade em gerar soluções factíveis.

Problema P_ϵ

Método ϵ-restrito:

1. Preliminarmente, é preciso encontrar valores adequados para inicializar o vetor ϵ. Isso é feito resolvendo os m problemas mono-objetivo. Obtêm-se assim os valores f_i^*, que são ótimos individuais de cada objetivo (os quais, agregados, compõem o vetor f^*, correspondente à solução utópica do problema).
2. Paralelamente, nessa mesma operação, são determinados os piores valores atingidos por cada objetivo quando um outro objetivo está em seu ótimo, formando o vetor f^o.
3. Cada problema é resolvido para vetores ϵ resultantes de um gerador de números aleatórios com distribuição de probabilidade uniforme, atendendo à restrição:

$$f^* \leq \epsilon \leq f^o.$$

Problema P_ϵ

Método ϵ-restrito:

1. Preliminarmente, é preciso encontrar valores adequados para inicializar o vetor ϵ. Isso é feito resolvendo os m problemas mono-objetivo. Obtêm-se assim os valores f_i^*, que são ótimos individuais de cada objetivo (os quais, agregados, compõem o vetor f^*, correspondente à solução utópica do problema).
2. Paralelamente, nessa mesma operação, são determinados os piores valores atingidos por cada objetivo quando um outro objetivo está em seu ótimo, formando o vetor f^o.
3. Cada problema é resolvido para vetores ϵ resultantes de um gerador de números aleatórios com distribuição de probabilidade uniforme, atendendo à restrição:

$$f^* \leq \epsilon \leq f^o.$$

Problema P_ϵ

Método ϵ-restrito:

1. Preliminarmente, é preciso encontrar valores adequados para inicializar o vetor ϵ. Isso é feito resolvendo os m problemas mono-objetivo. Obtêm-se assim os valores f_i^*, que são ótimos individuais de cada objetivo (os quais, agregados, compõem o vetor f^*, correspondente à solução utópica do problema).
2. Paralelamente, nessa mesma operação, são determinados os piores valores atingidos por cada objetivo quando um outro objetivo está em seu ótimo, formando o vetor f^o.
3. Cada problema é resolvido para vetores ϵ resultantes de um gerador de números aleatórios com distribuição de probabilidade uniforme, atendendo à restrição:

$$f^* \leq \epsilon \leq f^o.$$

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Problema P_ϵ

- A variação dos ϵ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas;
- Pode gerar pontos não pertencentes à fronteira Pareto-ótima;
- Pode gerar pontos em trechos específicos da fronteira Pareto-ótima;
- Quando o número de objetivos aumenta $(m > 2)$, aumenta também a probabilidade de serem gerados problemas infactíveis;
- Aumenta o número de restrições do problema original;
- Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- Métodos de exclusão de regiões são em geral mais adequados.

Problema P_ϵ

- A variação dos ϵ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas;
- Pode gerar pontos não pertencentes à fronteira Pareto-ótima;
- Pode gerar pontos em trechos específicos da fronteira Pareto-ótima;
- Quando o número de objetivos aumenta $(m > 2)$, aumenta também a probabilidade de serem gerados problemas infactíveis;
- Aumenta o número de restrições do problema original;
- Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- Métodos de exclusão de regiões são em geral mais adequados.

Problema P_ϵ

- A variação dos ϵ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas;
- Pode gerar pontos não pertencentes à fronteira Pareto-ótima;
- Pode gerar pontos em trechos específicos da fronteira Pareto-ótima;
- Quando o número de objetivos aumenta ($m > 2$), aumenta também a probabilidade de serem gerados problemas infactíveis;
- Aumenta o número de restrições do problema original;
- Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- Métodos de exclusão de regiões são em geral mais adequados.

UFOP Universidade Federal de Ouro Preto

Problema P_ϵ

- A variação dos ϵ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas;
- Pode gerar pontos não pertencentes à fronteira Pareto-ótima;
- Pode gerar pontos em trechos específicos da fronteira Pareto-ótima;
- Quando o número de objetivos aumenta ($m > 2$), aumenta também a probabilidade de serem gerados problemas infactíveis;
- Aumenta o número de restrições do problema original;
- Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- Métodos de exclusão de regiões são em geral mais adequados.

Problema P_ϵ

- A variação dos ϵ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas;
- Pode gerar pontos não pertencentes à fronteira Pareto-ótima;
- Pode gerar pontos em trechos específicos da fronteira Pareto-ótima;
- Quando o número de objetivos aumenta ($m > 2$), aumenta também a probabilidade de serem gerados problemas infactíveis;
- Aumenta o número de restrições do problema original;
- Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- Métodos de exclusão de regiões são em geral mais adequados.

Problema P_ϵ

- A variação dos ϵ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas;
- Pode gerar pontos não pertencentes à fronteira Pareto-ótima;
- Pode gerar pontos em trechos específicos da fronteira Pareto-ótima;
- Quando o número de objetivos aumenta $(m > 2)$, aumenta também a probabilidade de serem gerados problemas infactíveis;
- Aumenta o número de restrições do problema original;
- Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- Métodos de exclusão de regiões são em geral mais adequados.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Problema P_ϵ

- A variação dos ϵ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas;
- Pode gerar pontos não pertencentes à fronteira Pareto-ótima;
- Pode gerar pontos em trechos específicos da fronteira Pareto-ótima;
- Quando o número de objetivos aumenta ($m > 2$), aumenta também a probabilidade de serem gerados problemas infactíveis;
- Aumenta o número de restrições do problema original;
- Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- Métodos de exclusão de regiões são em geral mais adequados.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Problema P_ϵ

- A variação dos ϵ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas;
- Pode gerar pontos não pertencentes à fronteira Pareto-ótima;
- Pode gerar pontos em trechos específicos da fronteira Pareto-ótima;
- Quando o número de objetivos aumenta $(m > 2)$, aumenta também a probabilidade de serem gerados problemas infactíveis;
- Aumenta o número de restrições do problema original;
- Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- Métodos de exclusão de regiões são em geral mais adequados.

Métodos Escalares

Problema $P_{\lambda,\epsilon}$

- Essa é uma abordagem híbrida entre o método ϵ-restrito e a soma ponderada dos objetivos;
- Uma soma ponderada dos objetivos é escolhida para ser minimizada;
- Todos os objetivos são transformados em restrições de desigualdade que restringem a região factível.

Problema $P_{\lambda,\epsilon}$

- Essa é uma abordagem híbrida entre o método ϵ-restrito e a soma ponderada dos objetivos;
- Uma soma ponderada dos objetivos é escolhida para ser minimizada;
- Todos os objetivos são transformados em restrições de desigualdade que restringem a região factível.

Problema $P_{\lambda,\epsilon}$

- Essa é uma abordagem híbrida entre o método ϵ-restrito e a soma ponderada dos objetivos;
- Uma soma ponderada dos objetivos é escolhida para ser minimizada;
- Todos os objetivos são transformados em restrições de desigualdade que restringem a região factível.

Problema $P_{\lambda,\epsilon}$

Formulação
O problema de otimização vetorial, é transformado no Problema $P_{\lambda,\epsilon}$:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$$

sujeito a:

$$\mathcal{F}_x = \begin{cases} f_k(x) \leq \epsilon_k \ \ k = 1, ..., m \\ g_i(x) \leq 0 \ \forall i = 1, ..., p \\ h_j(x) = 0 \ \forall j = 1, ..., q \\ x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Problema $P_{\lambda,\epsilon}$

- A variação dos ϵ_k e de λ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- Esta abordagem híbrida torna o método da soma ponderada capaz de alcançar soluções em trechos não convexos da fronteira Pareto-ótima;
- Contudo, herda as desvantagens do método ϵ-restrito;
- Além disso, o número de parâmetros de controle é duas vezes maior, tornando difícil para o decisor expressar suas preferências.

Problema $P_{\lambda,\epsilon}$

- A variação dos ϵ_k e de λ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- Esta abordagem híbrida torna o método da soma ponderada capaz de alcançar soluções em trechos não convexos da fronteira Pareto-ótima;
- Contudo, herda as desvantagens do método ϵ-restrito;
- Além disso, o número de parâmetros de controle é duas vezes maior, tornando difícil para o decisor expressar suas preferências.

Problema $P_{\lambda,\epsilon}$

- A variação dos ϵ_k e de λ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- Esta abordagem híbrida torna o método da soma ponderada capaz de alcançar soluções em trechos não convexos da fronteira Pareto-ótima;
- Contudo, herda as desvantagens do método ϵ-restrito;
- Além disso, o número de parâmetros de controle é duas vezes maior, tornando difícil para o decisor expressar suas preferências.

Problema $P_{\lambda,\epsilon}$

- A variação dos ϵ_k e de λ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- Esta abordagem híbrida torna o método da soma ponderada capaz de alcançar soluções em trechos não convexos da fronteira Pareto-ótima;
- Contudo, herda as desvantagens do método ϵ-restrito;
- Além disso, o número de parâmetros de controle é duas vezes maior, tornando difícil para o decisor expressar suas preferências.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Métodos Escalares

Apresentação

Método da soma ponderada

Método ϵ-Restrito

Método ϵ-restrito híbrido

Método da distância a um ponto de referência

Método *goal attainment*

Método da distância a um ponto de referência

- Enfatizam-se as soluções, no espaço dos objetivos, localizadas mais perto do ponto de referência (ou pontos de referências);
- Dá-se menos relevância às soluções que estejam dentro de uma vizinhança de uma solução mais perto de um ponto de referência, a fim de manter um conjunto de soluções perto de cada ponto de referência.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Método da distância a um ponto de referência

- Enfatizam-se as soluções, no espaço dos objetivos, localizadas mais perto do ponto de referência (ou pontos de referências);
- Dá-se menos relevância às soluções que estejam dentro de uma vizinhança de uma solução mais perto de um ponto de referência, a fim de manter um conjunto de soluções perto de cada ponto de referência.

UFOP Universidade Federal de Ouro Preto

Formulação

O problema de otimização vetorial, é transformado no Problema P_z:

$$\min \left[\sum_{i=1}^{m} |z_i - f_i(x)|^r \right]^{\frac{1}{r}}$$

sujeito a:

$$\mathcal{F}_x = \begin{cases} g_i(x) \leq 0 \ \forall i = 1, ..., p \\ h_j(x) = 0 \ \forall j = 1, ..., q \\ x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

com $1 \leq r < \infty$.

UFOP Universidade Federal de Ouro Preto

Método da distância a um ponto de referência

- $r = 1 : \min \sum_{i=1}^{m} |z_i - f_i(x)|$
- $r = 2 :$

$$\min \left[\sum_{i=1}^{m} |z_i - f_i(x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

- $r \to \infty$: (métrica de Tchebychev)

$$\min \max |z_i - f_i(x)|$$

- É possível usar uma medida de distância ponderada:

$$\min \left[\sum_{i=1}^{m} w_i |z_i - f_i(x)|^r \right]^{\frac{1}{r}}$$

Método da distância a um ponto de referência

- Procedimentos para geração de soluções Pareto-ótimas podem incluir a variação do ponto de referência ou a variação dos pesos para um ponto de referência fixo (solução utópica);
- Depende de um bom ponto de referência;
- Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- Podem haver duas soluções para um mesmo ponto de referência - sensível ao ponto inicial;
- Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas sob certas condições;
- Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas.

Método da distância a um ponto de referência

- Procedimentos para geração de soluções Pareto-ótimas podem incluir a variação do ponto de referência ou a variação dos pesos para um ponto de referência fixo (solução utópica);
- Depende de um bom ponto de referência;
- Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- Podem haver duas soluções para um mesmo ponto de referência - sensível ao ponto inicial;
- Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas sob certas condições;
- Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas.

Método da distância a um ponto de referência

- Procedimentos para geração de soluções Pareto-ótimas podem incluir a variação do ponto de referência ou a variação dos pesos para um ponto de referência fixo (solução utópica);
- Depende de um bom ponto de referência;
- Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- Podem haver duas soluções para um mesmo ponto de referência - sensível ao ponto inicial;
- Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas sob certas condições;
- Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas.

Método da distância a um ponto de referência

- Procedimentos para geração de soluções Pareto-ótimas podem incluir a variação do ponto de referência ou a variação dos pesos para um ponto de referência fixo (solução utópica);
- Depende de um bom ponto de referência;
- Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- Podem haver duas soluções para um mesmo ponto de referência - sensível ao ponto inicial;
- Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas sob certas condições;
- Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas.

Método da distância a um ponto de referência

- Procedimentos para geração de soluções Pareto-ótimas podem incluir a variação do ponto de referência ou a variação dos pesos para um ponto de referência fixo (solução utópica);
- Depende de um bom ponto de referência;
- Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- Podem haver duas soluções para um mesmo ponto de referência - sensível ao ponto inicial;
- Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas sob certas condições;
- Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas.

Método da distância a um ponto de referência

- Procedimentos para geração de soluções Pareto-ótimas podem incluir a variação do ponto de referência ou a variação dos pesos para um ponto de referência fixo (solução utópica);
- Depende de um bom ponto de referência;
- Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- Podem haver duas soluções para um mesmo ponto de referência - sensível ao ponto inicial;
- Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas sob certas condições;
- Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Métodos Escalares

Método *goal attainment*

- Os objetivos são transformados em restrições de desigualdade;
- Escolhe um vetor objetivo alvo;
- Escolhe uma direção de busca w;
- Tenta minimizar um coeficiente escalar λ que representa o *gap* relativo ao vetor alvo.

Método *goal attainment*

- Os objetivos são transformados em restrições de desigualdade;
- Escolhe um vetor objetivo alvo;
- Escolhe uma direção de busca w;
- Tenta minimizar um coeficiente escalar λ que representa o *gap* relativo ao vetor alvo.

Método *goal attainment*

- Os objetivos são transformados em restrições de desigualdade;
- Escolhe um vetor objetivo alvo;
- Escolhe uma direção de busca w;
- Tenta minimizar um coeficiente escalar λ que representa o *gap* relativo ao vetor alvo.

Método *goal attainment*

- Os objetivos são transformados em restrições de desigualdade;
- Escolhe um vetor objetivo alvo;
- Escolhe uma direção de busca w;
- Tenta minimizar um coeficiente escalar λ que representa o *gap* relativo ao vetor alvo.

Formulação

O problema de otimização vetorial, é transformado no Problema P_z:

$$\min \lambda$$

sujeito a:

$$\mathcal{F}_x = \begin{cases} f(x) \leq z + \lambda w \\ g_i(x) \leq 0 \ \forall i = 1, ..., p \\ h_j(x) = 0 \ \forall j = 1, ..., q \\ x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Em geral z é a solução utópica.

Método *goal attainment*

- No espaço de objetivos, corresponde a minimizar o tamanho do vetor
$$z + \lambda w$$

- No espaço de variáveis, corresponde a minimizar a região factível definida por
$$f(x) \leq z + \lambda w$$

Método *goal attainment*

- No espaço de objetivos, corresponde a minimizar o tamanho do vetor

$$z + \lambda w$$

- No espaço de variáveis, corresponde a minimizar a região factível definida por

$$f(x) \leq z + \lambda w$$

Método *goal attainment*

- Pode lidar com problemas não convexos;
- Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- É possível gerar uma formulação P_z equivalente;
- Aumenta o número de restrições do problema original e o número de variáveis;
- Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- Diferentes famílias de métodos de otimização mono-objetivo são viáveis.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Método *goal attainment*

- Pode lidar com problemas não convexos;
- Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- É possível gerar uma formulação P_z equivalente;
- Aumenta o número de restrições do problema original e o número de variáveis;
- Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- Diferentes famílias de métodos de otimização mono-objetivo são viáveis.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Método *goal attainment*

- Pode lidar com problemas não convexos;
- Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- É possível gerar uma formulação P_z equivalente;
- Aumenta o número de restrições do problema original e o número de variáveis;
- Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- Diferentes famílias de métodos de otimização mono-objetivo são viáveis.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Método *goal attainment*

- Pode lidar com problemas não convexos;
- Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- É possível gerar uma formulação P_z equivalente;
- Aumenta o número de restrições do problema original e o número de variáveis;
- Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- Diferentes famílias de métodos de otimização mono-objetivo são viáveis.

Método *goal attainment*

- Pode lidar com problemas não convexos;
- Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- É possível gerar uma formulação P_z equivalente;
- Aumenta o número de restrições do problema original e o número de variáveis;
- Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- Diferentes famílias de métodos de otimização mono-objetivo são viáveis.

Método *goal attainment*

- Pode lidar com problemas não convexos;
- Soluções não Pareto-ótimas podem ser geradas;
- É possível gerar uma formulação P_z equivalente;
- Aumenta o número de restrições do problema original e o número de variáveis;
- Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções estimadas;
- Diferentes famílias de métodos de otimização mono-objetivo são viáveis.

Métodos Escalares

- Método da soma ponderada - Problema (P_λ);
- Método ϵ-restrito - Problema (P_ϵ);
- Método ϵ-restrito híbrido;
- Método de programação por metas;
- Método goal attainment;
- Programação de compromisso;
- Método da distância a um ponto de referência;
- Métodos Fuzzy.

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

Referências:

- Takahashi, R.H.C.; Notas de Aula: Otimização Escalar e Vetorial. http://www.decom.ufop.br/moreira/site_media/uploads/arquivos/Archive.zip
- J. A. Ramírez, F. Campelo, F. G. Guimarães, Lucas S. Batista, Ricardo H. C. Takahashi, Notas de Aula de Otimização, 2010. http://www.decom.ufop.br/moreira/site_media/uploads/arquivos/nota1.pdf