

Algoritmos para o Problema de Coloração de Grafos

Marcelo Ferreira Rego, Haroldo Gambini Santos

PPGCC - Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação

UFOP - Universidade Federal de Ouro Preto

Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil

email: marcelofr@gmail.com, haroldo.santos@gmail.com

Resumo—Este trabalho é uma proposta de desenvolvimento de um algoritmo baseado em técnicas metaheurísticas para resolver o problema de coloração de grafos. Espera-se que o algoritmo desenvolvido forneça soluções próximas da solução ótima para instâncias reais.

Keywords—algoritmos, coloração de grafos, metaheurística.

I. INTRODUÇÃO

Dado um grafo não-direcionado $G = (V, E)$, com um conjunto V de vértices e um conjunto E de arestas que incidem sobre os vértices de G , o problema de coloração de grafos consiste em atribuir k -cores para os vértices de G , de modo que dois vértices adjacentes não tenham a mesma cor. Assim a coloração pode ser considerada como uma função $c : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ (onde $\mathbb{N}$ é o conjunto de inteiros positivos) tal que, $c(u) \neq c(v)$ se u e v são adjacentes em G [1]. Caso k seja o número mínimo de cores necessárias para colorir o grafo, dizemos que k é o número cromático de G denotado por $\chi(G)$. Então, um grafo é k -colorado se e somente se, $\chi(G) \leq k$.

Este é um problema clássico de teoria dos grafos, e devido a sua importância e aplicação prática ele tem sido objeto de muitos estudos.

O artigo está organizado da seguinte forma. A Seção II apresenta a justificativa para a escolha do tema. Os objetivos são apresentados na Seção III, em seguida a Seção IV descreve a metodologia empregada e por fim a Seção V é dedicada a descrever os resultados esperados.

II. JUSTIFICATIVAS

O estudo do problema de coloração de grafos é de grande importância teórica pois é um clássico problema NP-Completo [2]. Progressos na solução dessa classe de problemas considerados intratáveis motivam diversas pesquisas em computação, matemática e pesquisa operacional.

Do ponto de vista prático, o estudo do problema de coloração de grafos é muito importante pois sua estrutura é muito utilizada para modelar problemas de diversas áreas, como: *scheduling* [3], *timetabling* [4], otimização de alocação de registradores [5], *train platforming* [6], *frequency assignment* [7], redes de comunicação [8].

Técnicas metaheurísticas têm se mostrado extremamente eficazes para resolver problemas complexos, especialmente

de natureza combinatória. Estes modelos não certificam a otimalidade da solução encontrada. Por outro lado, métodos exatos tem se mostrado incapazes de fornecer soluções em tempo computacional aceitável, para problemas de alta complexidade, tipicamente, problemas reais [9].

Portanto, o presente trabalho propõe a utilização de um modelo computacional baseado em técnicas metaheurísticas para solucionar o problema de coloração de grafos.

III. OBJETIVOS

O principal objetivo deste trabalho é apresentar e implementar um algoritmo baseado em técnicas metaheurísticas para resolver o problema de coloração de grafos, em seguida realizar uma análise comparando os resultados com o de outro algoritmo que forneça uma solução exata, com a finalidade de verificar a eficiência do algoritmo. Um outro objetivo é realizar a análise de complexidade do algoritmo apresentado.

IV. METODOLOGIA

O método a ser seguido neste trabalho pode ser descrito em duas fases. Primeiro será aplicado uma heurística construtiva com a finalidade de gerar uma solução inicial para o problema. Estratégias tipicamente utilizadas nesta fase são algoritmos gulosos e construção aleatória [10]. Enquanto que na segunda fase será aplicado uma metaheurística, algumas abordagens encontradas na literatura são: *Simulated Annealing* [11], *Busca Tabu* [12], *GRASP* [13], *Iterated Local Search* [14], Algoritmos Genéticos [15] entre outros.

O algoritmo metaheurístico parte de uma solução inicial e percorre o espaço de busca através dos vizinhos, avaliando as soluções encontradas baseado em uma função objetivo. A melhor solução encontrada, ou seja, aquela que apresentar o menor número de cores, será retornada.

O desenvolvimento de um algoritmo exato, permitirá avaliar o quanto as soluções apresentadas pelo algoritmo metaheurístico ficaram próximas do ótimo. Podemos definir algumas propriedades e limites superiores e inferiores relacionados ao valor exato do número cromático de um grafo [16]:

$\chi(G) = 1$ se e somente se G é completamente desconexo, ou seja, o grafo não possui arestas;

$\chi(G) \geq 3$ se e somente se G tem ciclo ímpar, ou seja, se o grafo G possua um subgrafo G' tal que G' seja um caminho fechado sem vértices repetidos com quantidade ímpar de vértices;

$\chi(G) \geq \omega(G)$ onde $\omega(G)$ indica o número do maior clique;

$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, onde $\Delta(G)$ é o grau do maior vértice de G ;

$\chi(G) \leq \Delta(G)$ para G conexo, a não ser que G seja um grafo completo ou um ciclo ímpar;

$\chi(G) \leq 4$ para qualquer grafo planar (Teorema das Quatro Cores).

Podemos destacar algumas abordagens presentes na literatura utilizando algoritmos exatos, são elas: *Branch-and-Cut* [17], *Backtracking* [18].

O testes serão realizados utilizando algumas instâncias reais de tamanhos e densidade variados de grafos, disponíveis em *The Second DIMACS Implementation Challenge* [19].

O experimento consiste em executar os algoritmos desenvolvidos para as instâncias selecionadas e coletar informações como tempo de execução, em seguida, analisar o resultado fornecido pela função objetivo do algoritmo metaheurístico comparando com a solução ótima do algoritmo exato.

V. RESULTADOS ESPERADOS

O principal resultado esperado é um algoritmo baseado em metaheurísticas com complexidade de tempo polinomial que forneça soluções próximas as soluções ótimas que serão dadas pelo algoritmo exato. Com isso, podemos recomendar o uso daquele algoritmo a fim de fornecer soluções para instâncias de grafos densos com elevado número de vértices. Situação em que o uso de algoritmos exatos é inviável, uma vez que o tempo necessário para a execução é proibitivo.

REFERÊNCIAS

- [1] G. Chartrand and P. Zhang, *Chromatic Graph Theory*, 1st ed. Chapman and Hall CRC, 2008.
- [2] M. R. Gary and D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, 1st ed. New York, NY, USA: W. H. Freeman, 1979.
- [3] F. T. Leighton, "A graph coloring algorithm for large scheduling problems," *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, vol. 84, no. 6, pp. 489–503, 1979.
- [4] D. D. Werra, "An introduction to timetabling," *European Journal of Operational Research*, vol. 19, no. 2, pp. 151–162, 1985.
- [5] F. Chow and J. Hennessy, "The priority-based coloring approach to register allocation," *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, vol. 12, no. 4, pp. 501–536, 1990.
- [6] A. Caprara, L. Kroon, M. Monaci, M. Peeters, and P. Toth, "Passenger railway optimization," *Transportation, Handbook in Operations Research and Management Science*, no. 14, pp. 129–187, 2007.
- [7] A. Gamst, "Some lower bounds for a class of frequency assignment problems," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 35, no. 1, pp. 8–14, 1986.
- [8] T. Woo, S. Su, and R. Newman Wolfe, "Resource allocation in a dynamically partitionable bus network using a graph coloring algorithm," *IEEE Transactions on Communication*, vol. 39, no. 12, pp. 1794–1801, 1991.
- [9] F. Glover and G. Kochenberger, *Handbook of metaheuristics*, 1st ed. Springer, 2003.
- [10] M. J. F. Souza, "Inteligência computacional para otimização," 2009, notas de aula.
- [11] M. Chams, A. Hertz, and D. D. Werra, "Some experiments with simulated annealing for coloring graphs," *European Journal of Operational Research*, vol. 32, no. 2, pp. 260–266, 1987.
- [12] A. Hertz and D. D. Werra, "Using tabu search techniques for graph coloring," *Computing*, vol. 39, no. 4, pp. 345–351, 1987.
- [13] M. Laguna and R. Martí, "A grasp for coloring sparse graphs," *Computational optimization and applications*, vol. 19, no. 2, pp. 165–178, 2001.
- [14] L. Paquete and T. Stützle, "An experimental investigation of iterated local search for coloring graphs," *Applications of Evolutionary Computing*, pp. 191–208, 2002.
- [15] W. Erben, "A grouping genetic algorithm for graph colouring and exam timetabling," *Practice and Theory of Automated Timetabling III*, pp. 132–156, 2001.
- [16] H. G. Santos, "Teoria dos grafos," 2011, notas de aula.
- [17] I. Méndez-Díaz and P. Zabala, "A branch-and-cut algorithm for graph coloring," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 154, no. 5, pp. 826–847, 2006.
- [18] S. Prestwich, "Using an incomplete version of dynamic backtracking for graph colouring," *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, vol. 1, pp. 61–73, 1999.
- [19] D. S. Johnson and M. A. Trick, "Np hard problems: Maximum clique, graph coloring, and satisfiability," AMS, Providence, RI, 1996, <http://algs4.cs.princeton.edu/66search/>, visitado em 21/05/2011.