Método Simplex das Duas Fases

1 Descrição do método

Suponhamos inicialmente que tenham sido efetuadas transformações no PPL, de modo que tenhamos $b_i \geq 0$, para todas as restrições. Para cada igualdade i introduziremos uma variável artificial não-negativa x_i^a. Também em cada desigualdade do tipo $\geq$ adicionaremos, além da variável de folga, uma variável artificial não-negativa, isto é :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_i^a = b_i \\ x_i^a \geq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} + x_i^a = b_i \\ x_{n+i} \geq 0, x_i^a \geq 0 \end{cases}$$

A fase I do método visa a obtenção de uma solução básica viável inicial para o PPL original P. Com a introdução das variáveis artificiais, temos um novo PPL *P'*, diferente de P, mas com uma solução básica viável inicial fácil de ser obtida. Para tanto, basta considerar como variáveis básicas:

(a) as variáveis de folga associadas às restrições do tipo $\leq$,

(b) as variáveis artificiais correspondentes às demais restrições.

A seguir, devemos caminhar de SBV (Solução Básica Viável) em SBV de *P'* até se obter uma SBV de P. A questão é saber quando teremos uma solução básica viável de P. Para cumprir esse objetivo, trabalharemos na primeira fase com uma função objetivo artificial, a saber, $Q^a(x) = \sum_i x_i^a$, a qual deve ser minimizada. Como $x_i^a \geq 0 \;\; \forall\, i$, o menor valor possível será obtido para $x_i^a = 0 \; \forall i$.

Terminando a Fase I, abandonamos $Q^a(x)$ e passamos a trabalhar com a função objetivo dada no problema original.

1.1 Exemplo 1

Aplicar o método simplex ao seguinte PPL :

Maximizar Q(x)= $6x_1$ - x_2
sa:

$$\begin{array}{ccccc} 4x_1 & + & x_2 & \leq & 21 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 13 \\ x_1 & - & x_2 & = & -1 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0 \quad ; \quad x_2 \geq 0$$

Introduzindo as variáveis de folga e as variáveis artificiais, obtém-se:

Minimizar Q'(x)= -6x_1 + x_2
sa:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 21 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & - & x_4 & + & x_1^a & & & = & 13 \\ -x_1 & + & x_2 & & & & & & & + & x_2^a & = & 1 \end{array}$$
$$x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_1^a,\, x_2^a \geq 0$$

Temos então o seguinte quadro:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	x_2^a	b
x_3	4	1	1	0	0	0	21
x_1^a	2	3	0	-1	1	0	13
x_2^a	-1	1	0	0	0	1	1
	-6	1	0	0	0	0	Q'

O sistema anterior apresenta a seguinte solução básica, a saber: variáveis não-básicas, $x_1 = x_2 = x_4 = 0$; e variáveis básicas, $x_3 = 21$, $x_1^a = 13$, $x_2^a = 1$. Substituindo os valores encontrados para x_1 e x_2 nas restrições do problema original, verificamos que algumas restrições são violadas. Iremos introduzir a função objetivo artificial, que representa a soma das inviabilidades, a qual deve ser minimizada. Logo podemos montar o seguinte quadro:

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	x_2^a	b	
(L_1)	x_3	4	1	1	0	0	0	21	
(L_2)	x_1^a	2	3	0	-1	1	0	13	
(L_3)	x_2^a	-1	1	0	0	0	1	1	Q.1
(L_4)		0	0	0	0	1	1	Q^a	
(L_5)		-6	1	0	0	0	0	Q'	

Como x_1^a e x_2^a estão na base, devemos anular seus coeficientes na função objetivo artificial, de forma a colocar a PPL na forma canônica. Para tanto, efetuamos a seguinte operação com linhas: $L_4 \leftarrow -L_2 + L_4$ e $L_4 \leftarrow -L_3 + L_4$, que resultam no quadro a seguir:

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	x_2^a	b	
(L_1)	x_3	4	1	1	0	0	0	21	
(L_2)	x_1^a	2	3	0	-1	1	0	13	
(L_3)	x_2^a	-1	1	0	0	0	1	1	Q.2
(L_4)		-1	-4	0	1	0	0	$Q^a - 14$	
(L_5)		-6	1	0	0	0	0	Q'	

Note-se que na linha da função objetivo artificial temos coeficientes negativos, sendo o de x_2 o menor deles. Assim, a variável x_2 deve entrar na base e uma vez que o $x_2^a = min\{21/1,\ 13/3,\ 1/1\} = 1$, então x_2^a deixará a base (L_3 é a linha pivotal). Desta forma, obtemos o quadro Q.3 a partir das seguintes operações: $L_1 \leftarrow -L_3 + L_1$; $L_2 \leftarrow -3L_3 + L_2$; $L_4 \leftarrow 4L_3 + L_4$ e $L_5 \leftarrow -L_3 + L_5$

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	x_2^a	b	
(L_1)	x_3	5	0	1	0	0	-1	20	
(L_2)	x_1^a	5	0	0	-1	1	-3	10	
(L_3)	x_2	-1	1	0	0	0	1	1	Q.3
(L_4)		-5	0	0	1	0	4	$Q^a - 10$	
(L_5)		-5	0	0	0	0	-1	Q'-1	

Ainda há coeficiente negativo na linha da função objetivo artificial. Logo x_1 deve entrar na base. Temos ainda que $x_1^a = min\{20/5,\ 10/5\} = 2$, o que indica que x_1^a deve deixar da base (L_2 é a linha pivotal). Obtemos o quadro Q.4 após as seguintes operações de pivotamento: $L_1 \leftarrow -L_2 + L_1$; $L_3 \leftarrow (1/5)L_2 + L_3$; $L_4 \leftarrow L_2 + L_4$; $L_5 \leftarrow L_2 + L_5$; $L_2 \leftarrow (1/5)L_2$;

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	x_2^a	b
(L_1)	x_3	0	0	1	1	-1	2	10
(L_2)	x_1	1	0	0	-1/5	1/5	-3/5	2
(L_3)	x_2	0	1	0	-1/5	1/5	2/5	3
(L_4)		0	0	0	0	1	1	Q^a
(L_5)		0	0	0	-1	1	-4	Q'+9

Q.4

Observando a linha da função objetivo artificial em Q.4 percebemos que esta solução é ótima com relação à função objetivo artificial. Portanto, chegamos ao final da Fase I. Como $Q^a(x^*) = \sum x_i^{a^*} = 0$, geramos uma solução básica viável inicial para o PPL original. Como as variáveis artificiais são todas não-básicas e não têm qualquer significado real, podemos eliminá-las, bem como a função artificial $Q^a(x)$. Ao eliminar a linha referente à função objetivo artificial e as colunas referentes às variáveis artificiais, passamos à fase II com o seguinte quadro reduzido do Simplex:

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
(L_1)	x_3	0	0	1	1	10
(L_2)	x_1	1	0	0	-1/5	2
(L_3)	x_2	0	1	0	-1/5	3
(L_4)		0	0	0	-1	Q'+9

Q.5

Observando a linha da função objetivo em Q.5, verificamos que a atual solução não é ótima, logo a variável x_4 deve entrar na base. Como existe um único $y_{ij} > 0$ na coluna de x_4, isto é, o elemento 1 na primeira linha, x_3 deve deixar a base (L_1 é a linha pivotal). Chegamos a Q.6 efetuando as seguintes operações de pivotamento: $L_2 \leftarrow (1/5)L_1 + L_2$; $L_3 \leftarrow (1/5)L_1 + L_3$; $L_4 \leftarrow L_1 + L_4$;

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_4	0	0	1	1	10
x_1	1	0	1/5	0	4
x_2	0	1	1/5	0	5
	0	0	1	0	Q'+ 19

Q.6

Note-se que a solução obtida acima, ou seja, $x^* = (4{,}5{,}0{,}10)$ com $Q(x^*) = -Q'x^*) = 19$ é ótima, pois não há mais como melhorar o valor da função objetivo.

<u>CASOS ESPECIAIS</u>

A Fase I termina ao atingirmos o menor valor possível para $Q^a(x)$. Suponhamos que este mínimo seja atingido para uma determinada solução x^*. Vejamos o que pode acontecer com $Q^a(x^*)$, bem como com as variáveis artificiais.

a) $Q^a(x^*) = \sum x_i^{a^*} > 0$
Isto significa que o problema original não possui solução.

b) $Q^a(x^*) = \sum x_i^{a^*} = 0$
Logo $x_i^{a^*} = 0$, para todo i. Encontramos então uma solução básica viável para o problema.

b.1) Todas as variáveis artificiais são VNB .
Como as variáveis artificiais não têm qualquer significado, podemos neste caso simplesmente eliminá-las, bem como a função objetivo artificial. Passamos à Fase II do método, trabalhando, agora, com a função objetivo dada por *Q(x)*.

b.2) Existe variável artifial que é VB.
Primeiramente eliminamos todas as variáveis artificiais que são VNB, inclusive os respectivos coeficientes em *Q(x)* e $Q^a(x)$. Permanecem, portanto, somente as variáveis artificiais que são VB.
Há dois casos considerar:

b.2.1) Na linha referente à variável artificial x_j^a que é VB, existe $y_{jk} \neq 0$ para alguma coluna não-básica k.
Neste caso, para qualquer que seja o valor do coeficiente $\bar{c_k}$, podemos fazer com que x_k entre na base em lugar de x_j^a, com o valor $x_k = 0 \,/\, y_{jk} = 0$, sem que o valor da função objetivo se altere, pois Q(x) - Q($\hat{x}$)= $c_k x_k = 0 \Rightarrow Q(x) = Q(\hat{x})$. Trata-se, portanto, de uma solução básica (viável) degenerada.

b.2.2) Na linha referente à variável artificial x_j^a que é VB, tem-se $y_{jk} = 0$ para todas as colunas não-básicas k.
Neste caso, como $y_{jk} = 0$ para todo k, então conseguimos anular uma equação do sistema Ax=b utilizando apenas transformações elementares sobre as equações do sistema. Trata-se, pois, de uma restrição redundante, que pode ser eliminada. Assim, se ao final da Fase I, tivermos uma variável qualquer x_j^a na base com $y_{jk} = 0$ para todo k, devemos eliminar a linha e a coluna à ela relativas.

1.2 Exemplo 2

Aplicar o método simplex ao seguinte PPL :

Maximizar Q(x)= $x_1 + x_2$
sa:

$$
\begin{array}{rcrcl}
x_1 & + & 4x_2 & \geq & 4 \\
3x_1 & + & x_2 & = & 1 \\
\multicolumn{5}{c}{x_1 \geq 0 \quad ; \quad x_2 \geq 0}
\end{array}
$$

Colocando as variáveis de folga e as variáveis artificiais, obtém-se:

Minimizar Q'(x)= -x_1 - x_2
sa:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & x_1^a & & & = & 4 \\
3x_1 & + & 3x_2 & & & & & + & x_2^a & = & 1 \\
\multicolumn{11}{l}{x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_1^a,\, x_2^a \geq 0}
\end{array}
$$

Temos então o seguinte quadro:

	VB	x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a	b
(L_1)	x_1^a	1	4	-1	1	0	4
(L_2)	x_2^a	3	1	0	0	1	1
(L_3)		0	0	0	1	1	Q^a
(L_4)		-1	-1	0	0	0	Q'

Q.1

Como x_1^a e x_2^a estão na base, devemos anular os seus coeficientes na função objetivo artificial. Para tanto, efetuamos a seguinte operação com linhas : $L_3 \leftarrow -L_1 + L_3$ e $L_3 \leftarrow -L_2 + L_3$, resultando no quadro a seguir:

	VB	x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a	b
(L_1)	x_1^a	1	4	-1	1	0	4
(L_2)	x_2^a	3	1	0	0	1	1
(L_3)		-4	-5	0	0	0	$Q^a - 5$
(L_4)		-1	-1	0	0	0	Q'

Q.2

Note-se que na linha da função objetivo artificial temos coeficientes negativos, sendo o de x_2 o menor deles. Logo, x_2 deve entrar na base e uma vez que $min\{4/4,\ 1/1\}$ mostra um empate no critério de saída da base, escolheremos arbitrariamente x_2^a para deixar a base. Obteremos, assim, o quadro a seguir:

	VB	x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a	b
(L_1)	x_1^a	-11	0	-1	1	-4	0
(L_2)	x_2	3	1	0	0	1	1
(L_3)		11	0	1	0	5	Q^a
(L_4)		2	0	0	0	1	Q'+1

Q.3

Atingimos o fim da Fase I. Como $Q^*(x) = 0$, podemos então eliminar a variável artificial que é VNB, bem como a linha correspondente à função objetivo artificial.

	VB	x_1	x_2	x_3	x_1^a	b
(L_1)	x_1^a	-11	0	-1	1	0
(L_2)	x_2	3	1	0	0	1
(L_3)		2	0	0	0	Q'+1

Q.4

Como x_1^a é VB, não podemos eliminá-la imediatamente. Observe que na linha à ela correspondente (linha 1), o coeficiente de x_3 (que é VNB) é diferente de zero. Assim, podemos fazer x_3 entrar na base (com o valor zero, resultado da operação $x_3 = 0/-1 = 0$). Efetuada essa mudança de base, através do pivoteamento $L_1 \leftarrow -L_1$, obtemos o seguinte quadro do simplex:

	VB	x_1	x_2	x_3	x_1^a	b
(L_1)	x_3	11	0	1	-1	0
(L_2)	x_2	3	1	0	0	1
(L_3)		2	0	0	0	Q'+1

Q.5

Agora temos a variável artificial x_1^a sendo VNB. Logo podemos eliminá-la, ou seja :

VB	x_1	x_2	x_3	b
x_3	11	0	1	0
x_2	3	1	0	1
	2	0	0	Q'+1

Q.6

O quadro acima apresenta a seguinte solução ótima: $Q^*(x) = 1$ e $x^* = (0, 1, 0)$, finalizando então a Fase II do método.

1.3 Lista de Exercícios

Resolva os PPL's abaixo pelo método SIMPLEX, mostrando todas as iterações:

a) **MAX** f(x)$= 2x_1 + 3x_2$
sa:
$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & & & \geq & 1 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

b) **MIN** f(x)$= x_1 + x_2$
sa:
$$\begin{array}{ccccc} 2x_1 & - & 2x_2 & \geq & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & \geq & 1 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

c) **MAX** f(x)$= 2x_1 + 3x_2$
sa:
$$\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & & & \geq & 1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

d) **MAX** f(x)$= x_1 + x_2$
sa:
$$\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 5 \\ -6x_1 & - & 9x_2 & = & -15 \\ x_1 & - & x_2 & \geq & 0 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$