Modelagem de problemas de programação linear

Marcone Jamilson Freitas Souza, Departamento de Computação, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, 35400-000 Ouro Preto, MG, Brasil. Homepage: http://www.decom.ufop.br/prof/marcone E-mail: marcone@iceb.ufop.br

(1) Um produtor deseja formular uma ração de custo mínimo para suinos em crescimento (30 a 60 Kg), a partir de uma lista de alimentos, cujas informações nutricionais e preço por Kg estão apresentadas na tabela a seguir:

Alimento	Proteína (%)	Energia (Kcal/Kg)	Cálcio (%)	Fósforo (%)	Lisina (%)	Preço ($/Kg)
Milho	8,51	3493	0,02	0,27	0,23	1,80
Farinha de soja	45,60	3378	0,36	0,55	2,87	4,20
Farelo de trigo	15,30	2103	0,12	0,88	0,57	2,00
Farinha de carne	45,20	2133	11,60	5,40	2,28	7,50
Farinha de sangue	80,90	2809	0,20	0,15	6,57	9,00
Fosfato bicálcico	-	-	22,61	17,03	-	14,50
Cálcio	-	-	37,00	-	-	0,80
Sal	-	-	-	-	-	3,00
Mistura mineral	-	-	-	-	-	28,00
Mistura vitamínica	-	-	-	-	-	145,00

Sabe-se que a composição nutricional resultante da mistura deve satisfazer às recomendações mínimas e máximas estabelecidas conforme a seguinte tabela:

Item	Mínimo requerido	Máximo requerido
Proteína (%)	15,50	16,00
Energia (Kcal/Kg)	3260	3360
Fósforo (%)	0,50	0,52
Cálcio/Fósforo	1,30	1,40
Farelo de trigo (%)	0,00	15,00
Farinha de carne (%)	0,00	3,00
Farinha de sangue (%)	0,00	2,00
Lisina (%)	0,69	∞
Sal (%)	0,50	0,50
Mistura mineral (%)	0,10	0,10
Mistura vitamínica (%)	0,10	0,10

Determinar a melhor composição para 1 Kg de ração.

(2) Deseja-se formar p ligas L_s a partir de q matérias primas R_j. Sabe-se que:

(a) uma unidade da matéria prima R_j contém a_{ij} unidades do metal M_i;

(b) uma unidade da liga L_s contém b_{is} unidades do metal M_i;

(c) uma unidade da matéria prima R_j custa c_j unidades monetárias;

(d) uma unidade da liga L_s é vendida a v_s unidades monetárias;

(e) de cada matéria prima R_j só existem u_j unidades disponíveis;

Faça um modelo de programação linear que permita determinar a quantidade x_j de matéria prima R_j a ser comprada e a quantidade y_s de liga L_s a ser vendida para que o lucro seja máximo.

(3) Uma cadeia de lojas deseja planejar sua política de compras de um determinado material para um período de 6 meses. O consumo diário previsto para os seis meses é o apresentado na tabela a seguir:

Mês	1	2	3	4	5	6
Consumo diário (t)	2	3	3	4	5	3

Mensalmente é feito um pedido do material à fábrica, que faz a entrega no início do primeiro dia de cada mês. Esse material é estocado. No início de cada dia, um caminhão passa pelo estoque, apanha a quantidade a ser consumida naquele dia e faz a distribuição pelas diversas lojas. Os custos de estocagem são de \$200,00 por tonelada e por dia, e são calculados levando-se em conta a quantidade estocada durante o dia. A capacidade de estocagem é de 150 toneladas. O custo do material varia de mês para mês segundo a seguinte tabela:

Mês	1	2	3	4	5	6
Custo por tonelada (\$)	90000	80000	88000	87000	96000	93000

Determinar a política de compras de modo a minimizar custos de estocagem e de compra do material, considerando o mês de 30 dias.

(4) É preciso programar a produção agrícola alocando as atividades para três tipos de regiões. As características por região são:

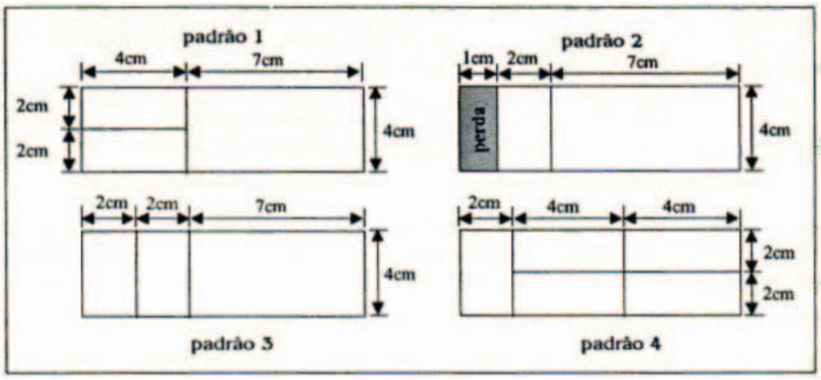
Regiões	Área total (em alqueires)	Disponibilidade de água na região (m^3)
A	400	600
B	600	800
C	300	375

Por sua vez, os produtos podem ser: trigo, algodão e soja. As características dos produtos são:

Produto	Área máxima por produto (em alqueires)	Consumo de água por área de terreno (m^3/alqueire)	Lucro por unidade de área (\$/alqueire)
Trigo	600	3	400
Algodão	500	2	300
Soja	325	1	100

Formule um problema de programação linear para alocar as atividades.

(5) Um fabricante de tiras metálicas recebeu um pedido para produzir 2000 tiras de tamanho 2 cm $\times$ 4 cm e 1000 tiras de 4 cm $\times$ 7 cm. As tiras podem ser produzidas a partir de chapas maiores disponíveis nos tamanhos de 10 cm $\times$ 3000 cm e 11 cm $\times$ 2000 cm. O departamento técnico encarregado de planejar o atendimento ao pedido decidiu que os padrões de corte mostrados na figura a seguir são adequados para produzir as tiras encomendadas. Formule um modelo de programação linear que permita minimizar o material usado (ou minimizar as perdas) no atendimento à encomenda.



(6) Uma determinada empresa está interessada em maximizar o lucro mensal proveniente de quatro de seus produtos, designados por I, II, III e IV. Para fabricar esses produtos, ela utiliza dois tipos de máquinas (M1 e M2) e dois tipos de mão-de-obra (MO1 e MO2), que têm as seguintes disponibilidades:

Máquinas	Disponibilidades (máquina-hora/mês)
M1	80
M2	20

Mão-de-obra	Disponibilidade (homem-hora/mês)
MO1	60
MO2	40

O setor técnico da empresa fornece os seguintes coeficientes, que especificam o total de horas de máquina e horas de mão-de-obra necessárias para a produção de uma unidade de cada produto:

Máquinas	Produtos			
	I	II	III	IV
M1	5	4	8	9
M2	2	6	-	8

Mão-de-obra	Produtos			
	I	II	III	IV
MO1	2	4	2	8
MO2	7	3	-	7

O setor comercial da empresa fornece as seguintes informações:

Produtos	Potencial de vendas (unidades/mês)	Lucro Unitário (R$/mês)
I	70	10,00
II	60	8,00
III	40	9,00
IV	20	7,00

Deseja-se planejar a produção mensal da empresa que maximize o lucro.

(7) Uma fábrica tem dois tipos de inspetores, I e II, responsáveis pelo controle de qualidade. Há necessidade de que pelo menos 1800 peças sejam inspecionadas em 8 horas por dia. Os inspetores do tipo I podem inspecionar peças numa taxa de 25 por hora, com uma confiabilidade de 95%. Já os inspetores do tipo II inspecionam 15 peças por hora com um confiabilidade de 95%. Os salários são de R$4,00/hora para o inspetor I e de R$3,00/hora para o inspetor II. Cada erro de qualquer dos inspetores custa à fábrica R$2,00. Há disponíveis 8 inspetores tipo I e 10 do tipo II. Determinar o número ótimo de inspetores que minimizam o custo total de inspeção.

(8) Uma firma estabelece um contrato com um cliente para fornecer 500 unidades do produto A e 700 unidades do produto B ao final de 2 meses. Os custos de produção (R$/mês) variam de acordo com o mês, conforme a tabela a seguir.

	Mês	
Produto	1	2
A	52	23
B	100	60

A entrega ao cliente será realizada de uma única vez no final do segundo mês. Os itens fabricados no primeiro mês serão estocados até a entrega. Os custos unitários de armazenamento são respectivamente R$0,10 e R$0,20 para os produtos A e B. Além disso, a matéria-prima deixada de um mês para o outro custa R$0,01 por Kg para ser estocada. Considere que a matéria-prima que sobre ao final do segundo mês já está computada no custo de fabricação e que a mão-de-obra excedente pode ser aproveitada em outras atividades. O consumo de matéria-prima e mão-de-obra por unidade de produto fabricado bem como as disponibilidades da firma são mostrados na tabela a seguir:

	Produtos		Disp/Mês	
Item	A	B	1	2
Mão-de-obra (h)	0,5	0,8	350	500
Matéria prima (Kg)	10	7	6000	4000

Planeje o processo produtivo da empresa para cumprir o contrato a custo total mínimo.

(9) O diretor de um hospital deve escolher um esquema de designação de leitos e quartos em uma nova ala que será construída. Existem 3 tipos de quartos possíveis:

- Com um leito
- Com dois leitos
- Com três leitos

O total de quartos a construir não pode ultrapassar 70. Por imposições de demanda, deverão ser oferecidos pelo menos mais 120 leitos. A percentagem de quartos de um leito deve ser restrita entre 15 a 30% do total de quartos. A necessidade em área construída é de:

- 10 m^2 por quarto com um leito

- 14 m^2 por quarto com dois leitos
- 17 m^2 por quarto com três leitos

Os pacientes dos quartos com dois e três leitos exigem apenas 80% da mão-de-obra que os do quarto individual. O que o hospital recebe por cada paciente internado é inversamente proporcional à capacidade do número de pessoas do quarto em que ele está internado. Considerando o hospital sempre lotado, formule o problema de forma a:

(a) Minimizar o esforço da mão-de-obra em apoio médico e administrativo
(b) Maximizar a arredação global
(c) Maximizar o número de leitos
(d) Minimizar o espaço necessário para a nova ala

(10) A companhia Coelho S.A. fabrica motores para brinquedos e pequenos aparelhos. O departamento de marketing está prevendo vendas de 6100 unidades do motor Roncam no próximo semestre. Esta é uma nova demanda e a companhia terá que testar sua capacidade produtiva. O motor Roncam é montado a partir de três componentes: o corpo, a base e a blindagem. Alguns destes componentes podem ser comprados de outros fornecedores, se houver limitações da Coelho S.A. Os custos de produção e os custos de aquisição em R$/unidade estão resumidos na tabela a seguir.

Componente	Custo de Aquisição (em R$)	Custo de Produção (em R$)
Corpo	10	8
Base	20	20
Blindagem	16	10

A fábrica da Companhia Coelho S.A. tem três departamentos. O requisito de tempo em minutos que cada componente consome em cada departamento está resumido na próxima tabela. O tempo disponível na companhia para cada componente está listado na última linha.

Componente	Tempo de Preparação (em minutos)	Tempo de molde (em minutos)	Tempo de fabricação (em minutos)
Corpo	2	4	2
Base	5	2	4
Blindagem	4	5	5
Disponibilidade	49200	49200	49200

Elabore um modelo, baseado em programação linear, que otimize o custo envolvido no atendimento ao pedido de vendas dos brinquedos.

<u>Sugestão</u>:

Seja x_{ij} a quantidade de componentes $i = \begin{cases} 1 & \text{Se o componente for o Corpo,} \\ 2 & \text{Se o componente for a Base,} \\ 2 & \text{Se o componente for a Blindagem.} \end{cases}$ a

serem utilizados no modo $j = \begin{cases} A & \text{Se o componente for adquirido,} \\ F & \text{Se o componente for fabricado.} \end{cases}$

(11) O administrador de um hospital deseja determinar o escalonamento dos enfermeiros. Para isso ele organiza um sistema de plantão dividindo o dia em 8 períodos de 3 horas. A tabela seguinte a seguir mostra o número mínimo de enfermeiros que devem estar presentes em cada horário.

Horário	24-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24
# enfermeiros	30	20	40	50	60	50	40	40

Cada enfermeiro cumpre um plantão normal de 6 horas, que pode começar apenas no início de um destes períodos. Alguns enfermeiros podem ser solicitados para estender o plantão por mais 3 horas seguidas. A hora-extra custa 50% mais caro. Em cada plantão, não mais que 40% dos enfermeiros podem estar cumprindo hora-extra. Como o administrador deve escalar os enfermeiros, minimizando o custo?

(12) Há um conjunto de m mochilas, cada qual com uma capacidade b_i em peso, e uma lista de n objetos. Sabendo-se que existe d_j unidades de cada objeto j, que cada um deles traz um retorno p_j e pesa w_j unidades, formule um modelo que maximize o retorno dos objetos a serem alocados às mochilas.

(13) A LCL Motores recebeu recentemente $90.000,00 em pedidos de seus 3 tipos de motores. Cada motor necessita de um determinado número de horas de trabalho no setor de montagem e de acabamento. A LCL pode terceirizar parte de sua produção. A tabela a seguir resume esses dados:

Modelo	1	2	3	Total
Demanda	3000 unid.	2500 unid.	500 unid.	6000 unid.
Montagem	1 h/unid.	2 h/unid.	0,5 h/unid.	6000 h
Acabamento	2,5 h/unid.	1 h/unid.	4 h/unid.	10000 h
Custo de produção	$50	$90	$120	-
Terceirizado	$65	$92	$140	-

A LCL Motores deseja determinar quantos motores devem ser produzidos em sua fábrica e quantos devem ser terceirizados de forma a atender à demanda de pedidos.

(14) A LCL Equipamentos produz 3 tipos de furadeiras que necessitam de tempos diferentes na linha de montagem. Para que cada tipo de furadeira seja fabricada, um custo de preparação da fábrica é incorrido (ajustes que devem ser feitos na linha de montagem). Suponha que todas as furadeiras do mesmo tipo serão produzidas de uma só vez (apenas uma preparação por tipo). Os dados relevantes à análise do problema encontram-se na tabela a seguir. Encontre as quantidades a serem fabricadas para maximizar o lucro do próximo mês.

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Total disponível
Montagem	2 h	3 h	2,5 h	600 h
Pintura	3 h	2 h	2,5 h	500 h
Lucro unitário	$50	$60	$65	-
Preparação	$5000	$4000	$3000	-

(15) Há um conjunto de m possíveis localidades para instalar uma fábrica. Há também um conjunto de n clientes a serem atendidos pelas fábricas. Para cada possível fábrica

i é dado o custo fixo de produção f_i, sua capacidade de produção p_i e o custo de transporte c_{ij} de uma unidade do produto da fábrica i para o cliente j. Para cada cliente j é dada a demanda d_j. Em quais localidades deve-se instalar as fábricas de forma a atender à demanda requerida no menor custo?

(16) Um fazendeiro pode criar ovinos, suínos e bovinos em sua propriedade. Se todo o espaço disponível fosse destinado a ovinos, 40 cabeças poderiam ser criadas. Sabe-se também que 4 carneiros ocupam o mesmo espaço útil que 6 porcos ou 3 vacas. Além disso, existe uma lei que obriga a criação mínima de um porco para cada outro animal da fazenda. Se os retornos esperados por cada ovino e suíno representam respectivamente 50% e 40% do resultado esperado com um bovino, como o fazendeiro pode planejar sua criação de forma ótima?

(17) Um fundo de investimento tem até R$300.000,00 para aplicar em duas ações. A empresa D é diversificada (tem 40% do seu capital aplicado em cerveja e o restante aplicado em refrigerantes) e espera-se que distribua bonificações de 12%. A empresa N não é diversificada (produz apenas cerveja) e espera-se que distribua bonificações de 20%. Para este investimento, considerando a legislação governamental aplicável, o fundo está sujeito às seguintes restrições: (a) o investimento na empresa diversificada pode atingir R$270.000,00; (b) o investimento na empresa não diversificada pode atingir R$150.000,00; (c) o investimento em cada produto (cerveja ou refrigerante) pode atingir R$180.000,00. Qual o esquema de investimento que maximiza o lucro?

(18) Um agricultor está interessado na produção de milho e algodão. Ele deseja saber qual a combinação dessas 2 linhas de produção que lhe pode proporcionar a maior renda possível. Ele possui área disponível de 100 ha e sabe que pode dispor, durante o período de produção de milho e algodão, de 3600 homens/dia e 240 dias de trabalho de um trator médio. Com base em sua experiência, ele sabe que naquela terra e com sua técnica de produção, o milho produz 2000 Kg/ha e o algodão, 1800 Kg/ha. A cultura do milho exige 30 homens/dia por ha e 4 dias de serviço de trator por hectare, enquanto o algodão exige 60 homens/dia por ha e 2 dias de trator por ha. As perspectivas de preço são de R$1700,00 por tonelada de milho e de R$2040,00 por tonelada de algodão.

(19) Certa firma processa dois tipos de fibra sintética (A e B) usando as mesmas máquinas. No departamento responsável pela mistura de ingredientes, que dispõe de 200 horas por mês, a produção é limitada por 2 horas por tonelada da fibra A e 4 horas por tonelada da fibra B. No departamento responsável pela embalagem, as necessidades são 6 horas por tonelada da fibra A e 8 horas para a fibra B, com um total máximo de 480 horas disponíveis de máquinas por mês. Para o departamento responsável pelo corte das fibras, as necessidades são 10 e 6 horas por tonelada das fibras A e B, respectivamente. Esse departamento dispõe de apenas 600 horas de máquinas por mês. Outros departamentos limitam a produção de fibra B a um máximo de 35 toneladas por mês. O lucro é de R$8,00 por tonelada para a fibra A e R$10,00 por tonelada para a fibra B. A firma deseja determinar as quantidades mensais de fibras A e B que devem ser produzidas de forma a maximizar os lucros.

(20) Uma pequena fábrica de móveis produz dois modelos de molduras ornamentais, cujos preços de venda são, respectivamente, R$110,00 e R$65,00. Ela possui 7 peças de madeira e dispõe de 30 horas de trabalho para confeccionar os dois modelos, sendo que o modelo A requer 2 peças de madeira e 5 horas de trabalho, enquanto o modelo B necessita de 1 peça de madeira e 7 horas de trabalho. Quantas molduras de

cada modelo a fábrica deve montar se desejar maximizar o rendimento obtido com as vendas?

(21) Existem três matadouros, designados por A, B e C, pertencentes a um mesmo grupo, cada um situado em uma localidade. Esses matadouros fornecem peças de bois para três supermercados, D, E e F. A carne, porém, precisa passar antes por dois entrepostos: 1 e 2.

As ofertas dos matadouros, os custos unitários por peça transportada, bem como a capacidade de estocagem dos entrepostos, está representada pela tabela abaixo.

Matadouro	Entreposto 1	Entreposto 2	Oferta (peças)
A	35	30	750
B	27	23	980
C	33	26	670
Capacidade de estocagem	1500	1000	-

Dos entrepostos aos supermercados, os preços unitários de transporte e a procura de peças bovinas por parte dos supermercados seguem a tabela a seguir.

	Supermercado		
Entreposto	D	E	F
1	23	17	21
2	12	26	15
Procura	650	900	650

O dilema é quanto transportar de cada matadouro a cada entreposto e de cada entreposto para cada supermercado, de forma a minimizar o custo total de transporte.

Sugestão:

Seja x_{ij} o número de peças bovinas do matadouro i para o entreposto j e y_{jk} o número de peças bovinas do entreposto j para o supermercado k.

(22) Certa empresa trabalha com a produção de etiquetas autocolantes. O papel usado para sua confecção encontra-se em bobinas de mesmo comprimento. A largura das bobinas é de 50 cm. As encomendas para a próxima semana impõem as seguintes necessidades de corte: 32 bobinas de 15 cm de largura; 17 bobinas de 17,5 cm de largura e 21 bobinas de 20 cm de largura. Além do mais, é política da empresa manter em estoque o excedente ao pedido em quantidade máxima de 10 bobinas cortadas de acordo com a encomenda. Essa ação evita a imobilização de capital, uma vez que são incertos os próximos pedidos. Determine um esquema de corte de forma a minimizar os desperdícios face às necessidades da produção da empresa.