SOFTWARES DE OTIMIZAÇÃO: MANUAL DE REFERÊNCIA

Aloísio de Castro Gomes Júnior

Marcone Jamilson Freitas Souza

Projeto patrocinado pelo programa PRÓ-ATIVA da UFOP

DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Janeiro de 2004

Conteúdo

Lista de Figuras

Capítulo 1

LINDO

1.1 Introdução

1.1.1 O que é o LINDO?

LINDO (Linear, INteractive, and Discrete Optimizer) é uma conveniente, mas poderosa ferramenta para resolver Problemas de Programação linear, inteira e quadrática.

1.1.2 Sintaxe de um Modelo LINDO

Um Modelo LINDO deverá conter os seguinte itens:

- Função objetivo (fo) que deverá iniciar com os comandos MAX para maximizar e MIN para Minimizar e à frente deverá ser colocada a função objetivo.
- A declaração SUBJECT TO (sujeito a) que pode ser substituído por st ou s.t. e logo após serão declaradas as restrições do problema.
- Para finalizar deveremos declarar o comando END.

Observação: As variáveis devem ser declaradas com no máximo 8 letras e nas linhas com as restrições deve ser colocado ")"logo após o nome da restrição.

1.2 Exemplos de Modelos LINDO

1.2.1 Todas as variáveis são não negativas

Seja o seguinte problema:

Problema da Dieta

Um nutricionista precisa estabelecer uma dieta contendo, pelo menos, 11mg de vitamina A, 70mg de vitamina C e 250 mg de vitamina D. A tabela abaixo resume a quantidade de cada vitamina em disponibilidade nos alimentos leite, carne, peixe e salada e apresenta, também, a necessidade diária dessas vitaminas e os custos de cada alimento.

Calcular as quantidades dos quatro alimentos que devem ser incluídos na dieta diária, a fim de que os seguintes requisitos nutricionais sejam satisfeitos a custo mínimo.

Tabela de Requisitos Nutricionais e Custo dos Alimentos

Alimento/ Vitamina	**Leite (l)**	**Carne (Kg)**	**Peixe (Kg)**	**Salada (100g)**	**Requisito Nutricional Mínimo**
A	2 mg	2 mg	10 mg	20 mg	11 mg
C	50 mg	20 mg	10 mg	30 mg	70 mg
D	80 mg	70 mg	10 mg	80 mg	250 mg
Custo (R$)	1,20	5,00	7,00	1,00	

Modelando o problema, obtemos o seguinte PPL:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{min} & 1,20x_1 & + & 5,00x_2 & + & 7,00x_3 & + & 1,00x_4 & & \\
\text{s.a} & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 10x_3 & + & 20x_4 & \geq & 11 \\
 & 50x_1 & + & 20x_2 & + & 10x_3 & + & 30x_4 & \geq & 70 \\
 & 80x_1 & + & 70x_2 & + & 10x_3 & + & 80x_4 & \geq & 250 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

O modelo LINDO para este PPL é apresentado na figura 1.1.

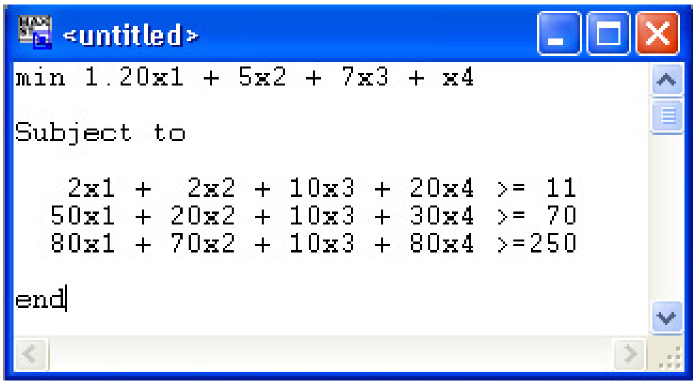


Figura 1.1: Modelo LINDO para o problema da dieta

Depois de digitado o modelo clique no menu SOLVE ⇒ COMPILE MODEL(CTRL+E), em seguida clique novamente em SOLVE ⇒ SOLVE(CTRL+S). Aparecerá uma tela parecida como na figura 1.2.

1.2.2 Existem variáveis inteiras

Seja o seguinte problema:

Problema da Fábrica de móveis

Uma grande fábrica de móveis dispõe de um estoque de 250m de tábuas, 600m de prancha e 500m de painéis de conglomerado. A fábrica normalmente oferece uma linha de móveis composta por um modelo de escrivaninha, uma mesa de reunião, um armário e uma prateleira. Cada tipo de móvel consome uma certa quantidade de matéria-prima, conforme a tabela abaixo. A escrivaninha é vendida por 100 u.m., a mesa por 80 u.m.,o armário por 120 u.m. e a prateleira por 20 u.m. Pede-se exibir um modelo de programação linear que maximize a receita com a venda dos móveis.

Matéria-prima consumida por cada móvel

	Quantidade de material em metros consumidos por unidade de produto				**Disponibilidade do recurso (m)**
	Escrivaninha	**Mesa**	**Armário**	**Prateleira**	
Tábua	1	1	1	4	250
Prancha	0	1	1	2	600
Painéis	3	2	4	0	500
Valor de Revenda (u.m.)	100	80	120	20	

Modelando o problema, obtemos o seguinte PPL:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max & 100x_1 & + & 80x_2 & + & 120x_3 & + & 20x_4 & & \\
\text{s.a} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & \leq & 250 \\
 & & & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 600 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & & \leq & 500 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Para este PPL temos duas formas de modelá-lo no LINDO. Em ambas deve ser acrescentado o comando GIN [nome da variável], indicando que aquela variável é do tipo inteiro, como na figura 1.3. Quando várias variáveis são inteiras o comando GIN pode ser utilizado como mostrado na figura 1.4, ou seja, GIN [número de variáveis inteiras].

1.2.3 Existem variáveis limitadas superiormente e inferiormente

Seja o seguinte problema:

Problema da Confeitaria

Uma confeitaria produz dois tipos de bolos de sorvete: chocolate e creme. Cada lote de bolo de chocolate é vendido com um lucro de 3 u.m. e os lotes de creme com o lucro de 1 u.m. Contratos com várias lojas impõem que sejam produzidos no mínimo 10 lotes de bolo de chocolate por dia e que o total de lotes fabricados nunca seja menor do que 20. O mercado só é capaz de consumir até 40 bolos de creme e 60 de chocolate. As máquinas de preparação de sorvete disponibilizam 180 horas de operação, sendo que cada lote de bolos de chocolate consome 2 horas de trabalho e cada lote de bolos de creme 3 horas. Determinar o esquema de produção que maximize os lucros com a venda dos bolos de sorvete.

Modelando o problema, obtemos o seguinte PPL:

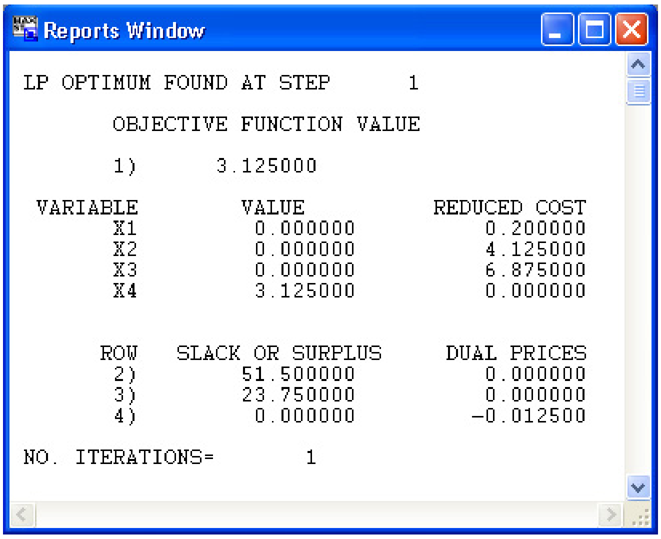


Figura 1.2: Solução para o problema da Dieta

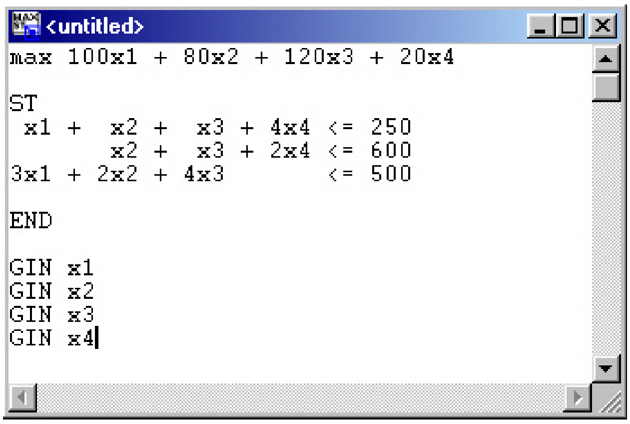


Figura 1.3: Modelo LINDO para o problema da fábrica de móveis

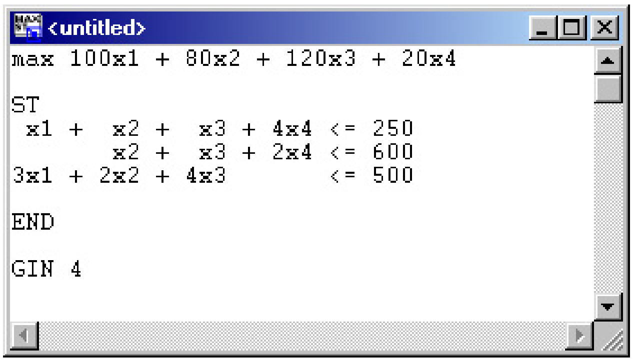


Figura 1.4: Forma alternativa do Modelo LINDO para o problema da fábrica de móveis

$$
\begin{array}{|lccccrr|}
\hline
\max & x_1 & + & 3x_2 & & & \\
\text{s.a} & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 180 \\
 & x_1 & + & x_2 & \geq & 20 \\
 & x_1 & & & \leq & 40 \\
 & & & x_2 & \leq & 60 \\
 & & & x_2 & \geq & 10 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Neste modelo podemos observar a presença de variáveis limitadas superiormente e inferiormente. Neste caso, para evitar a ampliação da dimensão da base, devemos colocar após o comando END, os comandos SUB [nome da variável] [valor limite] para limitar a variável superiormente e SLB [nome da variável] [valor limite] para limitar a variável inferiormente. A figura 1.5 ilustra a utilização de variáveis canalizadas.

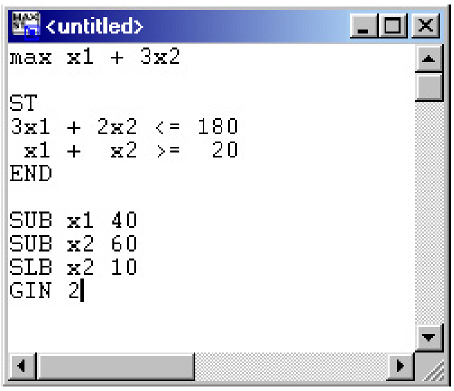


Figura 1.5: Modelo LINDO para o problema da confeitaria

1.2.4 Existem variáveis binárias

Seja o seguinte problema:

Problema do Sistema de Defesa Antiaérea

Um determinado conjunto de armas antiaéreas está distruibuído de forma a defender uma cidade de um ataque. São n plataformas de mísseis. Sabe-se que d_{ij} é a distância entre a plataforma da arma i e a ameaça j (avião inimigo ou míssil), que o alcance máximo dos mísseis é de r_i, que o custo de cada tiro sobre uma ameaça j é de c_{ij} e o valor de neutralização da ameaça é v_j. Em cada ataque, o sistema de defesa deve selecionar, dentre m ameças, apenas k possíveis alvos.

Elaborar o modelo matemático de alocação arma x alvo que minimiza o custo de defesa.

Para este problema tomaremos a seguinte variável de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Caso a arma } i \text{ seja designada à ameaça } j, \\ 0 & \text{Caso contrário.} \end{cases} \quad , \; i = 1, ..., n \text{ e } j = 1, ..., m$$

Consideraremos ainda os seguintes dados:

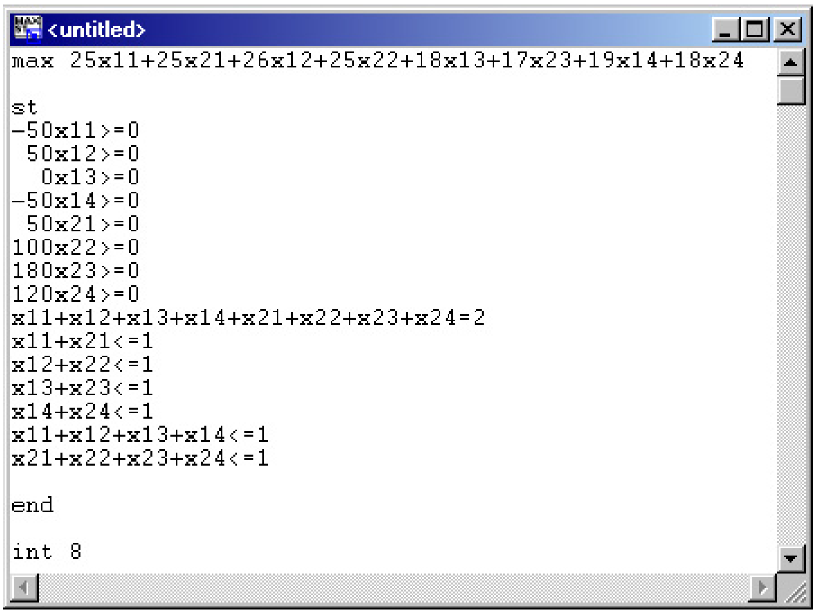
Dados sobre as Plataformas antiaéreas

Plataforma i	Ameaça j	Distância da ameaça j (d_{ij})	Alcance (r_i)	Custo (c_{ij})	Valor da neutralização (v_j)
P1	Avião1	200	150	5	30
	Avião2	100		4	30
	Míssil1	150		2	35
	Míssil2	200		1	35
P2	Avião1	150	200	5	30
	Avião2	100		5	30
	Míssil1	20		3	35
	Míssil2	80		2	35

Modelando o problema obteremos o seguinte PPL:

$$
\begin{array}{ll}
\max & \sum_{j=1}^{m} v_j\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right) \\
\text{s.a} & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 1, \forall i = 1, ..., n \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1, \forall j = 1, ..., m \\
& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = k \\
& (r_i - d_{ij})x_{ij} \geq 0, i = 1, ..., n; j = 1, ..., k, ..., m
\end{array}
$$

Considerando os dados da tabela dada e sendo $k = m - n = 2$ (número de alvos possíveis), obtemos o modelo LINDO mostrado na figura 1.6. Há neste modelo oito variáveis binárias. Para declará-las no LINDO, devemos acrescentar após o comando END o comando INT <nome de cada variável> em cada linha ou simplesmente, INT <número de variáveis>.




```
max 25x11+25x21+26x12+25x22+18x13+17x23+19x14+18x24

st
-50x11>=0
 50x12>=0
  0x13>=0
-50x14>=0
 50x21>=0
100x22>=0
180x23>=0
120x24>=0
x11+x12+x13+x14+x21+x22+x23+x24=2
x11+x21<=1
x12+x22<=1
x13+x23<=1
x14+x24<=1
x11+x12+x13+x14<=1
x21+x22+x23+x24<=1

end

int 8
```

Figura 1.6: Modelo LINDO para o problema da defesa antiaérea

Deve ser observado que o modelo apresentado na figura 1.6 é o resultado da aplicação da formulação matemática acima sem simplificação.

1.2.5 Existem variáveis livres

Consideremos o seguinte PPL:

$$\begin{array}{|lrcrcr|}
\hline
\min & 5x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s.a} & x_1 & + & x_2 & \geq & 5 \\
 & x_1 & - & x_2 & \geq & 7 \\
 & x_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \text{qq.} & \\
\hline
\end{array}$$

Neste exemplo estamos tomando como exemplo que a variável x_2 é livre, ou seja, pode assumir qualquer valor. Para modelarmos este PPL utilizando o LINDO devemos acrescentar após o comando END, o comando FREE $<$nome da variável ou número de variáveis$>$, conforme mostra a figura 1.7.

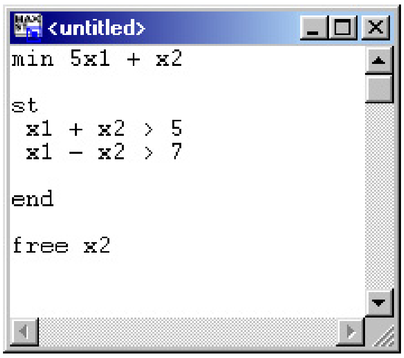


Figura 1.7: Modelo LINDO para o PPL usando variável livre

1.3 Utilizando Quadros (TABLEAU) com o LINDO

Para resolvermos PPL's utilizando quadros do SIMPLEX (tableaus) no LINDO devemos proceder da maneira que se segue, levando em consideração as seguintes teclas de atalho:

Comando	**Teclas de atalho**
Compilar (Compile Model)	$CTRL + E$
Fazer Pivoteameneo (Pivot)	$CTRL + N$
Exibir quadro (Tableau)	$ALT + 7$

Exemplo 1:

Primeiramente devemos digitar o PPL. Vamos tomar como exemplo o PPL abaixo:

$$\begin{array}{|lrcrcr|}
\hline
\min & -5x_1 & - & 3x_2 & & \\
\text{s.a} & 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \\
\hline
\end{array}$$

O modelo LINDO relativo à esse PPL é apresentado na figura 1.8.

Antes de gerarmos o 1^o quadro devemos compilar o modelo $(CTRL + E)$. Para gerarmos o primeiro quadro para este modelo pressionamos as teclas $ALT + 7$. O quadro gerado é apresentado na figura 1.9.

Agora vamos fazer o pivoteamento. Pressione as teclas $CTRL + N$ para a aparecer a janela da figura 1.10. Nesta janela, selecionamos a opção USE MINE e escolhemos a variável que vai entrar na base (Variable Selection) e a variável que vai sair da base (Row Selection), onde SLK 2 e 3 são as variáveis de folga. Clique em CLOSE e depois em CANCEL. Gere o novo quadro usando as teclas $ALT + 7$. O segundo quadro é mostrado na figura 1.11.

Pela análise do quadro vemos que ainda não obtemos a melhor solução, então devemos repetir os passos citados acima até encontrar a melhor solução para o PPL, ou seja, fazemos um novo pivoteamento e geramos um novo quadro. Para isto devemos pressionar novamente $CTRL + N$ e selecionar a variável que deve entrar na base e aquela que deve sair, feito isso geramos o novo quadro. Para o nosso exemplo o novo quadro $(ALT + 7)$ é apresentado na figura 1.12. Como podemos observar este quadro é ótimo, portanto encontramos a melhor para o problema.

Exemplo 2:

$$\begin{array}{|lrcrcr|}
\hline
\text{min} & -6x_1 & - & 10x_2 & & \\
\text{s.a} & 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \\
\hline
\end{array}$$

Para este exemplo temos o modelo LINDO apresentado na figura 1.13. Vamos resolver este problema utilizando quadros tableau para isto vamos seguir os seguintes passos:

1^o) Geramos o primeiro quadro pressionando as teclas $ALT + 7$. (Figura 1.14)

2^o) Através da análise do quadro decidimos qual variável deve entrar na base e qual deve sair $(CTRL + N)$. (Figura 1.10)

3^o) Geramos um novo quadro $(ALT + 7)$. (Figura 1.15)

4^o) Analisamos este novo quadro. Observamos para este exemplo que não existe $c_j < 0$, mas a variável X1 que não está na base tem coeficiente igual a 0. Portanto colocando X1 na base obtemos uma outra solução ótima, como mostra a figura 1.16. Para este exemplo temos várias soluções ótimas e elas são dadas pela seguinte equação:

$$y = \alpha(0,3) + (1-\alpha)(1.052, 2.368), \text{ onde } \alpha \in [0,1]$$

Exemplo 3:

$$\begin{array}{|lrcrcr|}
\hline
\text{min} & -2x_1 & - & 2x_2 & & \\
\text{s.a} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & -0.5x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \\
\hline
\end{array}$$

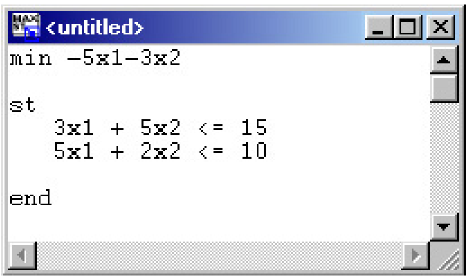


Figura 1.8: Modelo LINDO para o exemplo 1

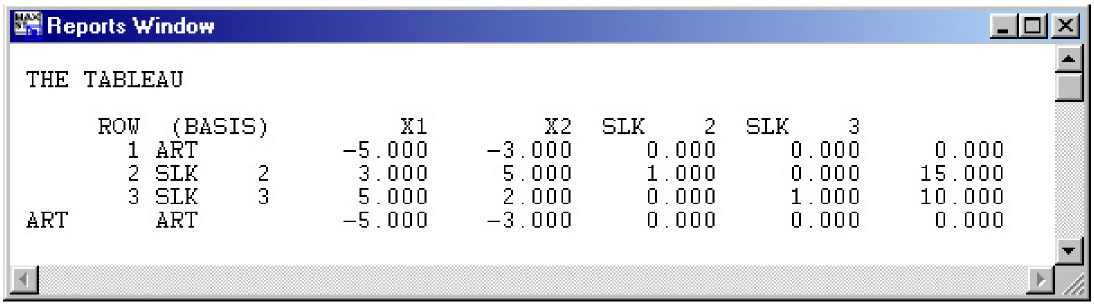


Figura 1.9: 1^{o} quadro para o exemplo 1

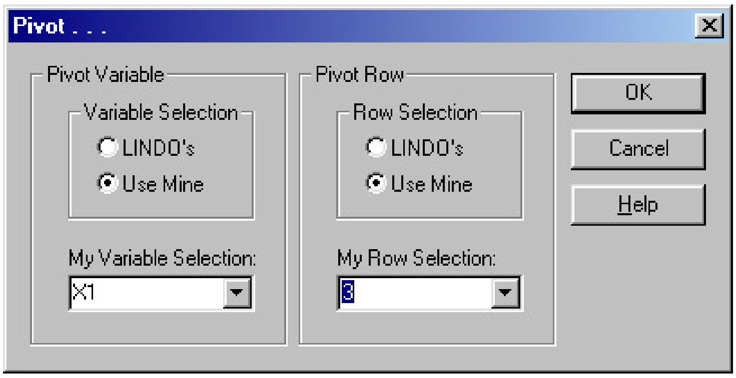


Figura 1.10: Janela de Pivoteamento

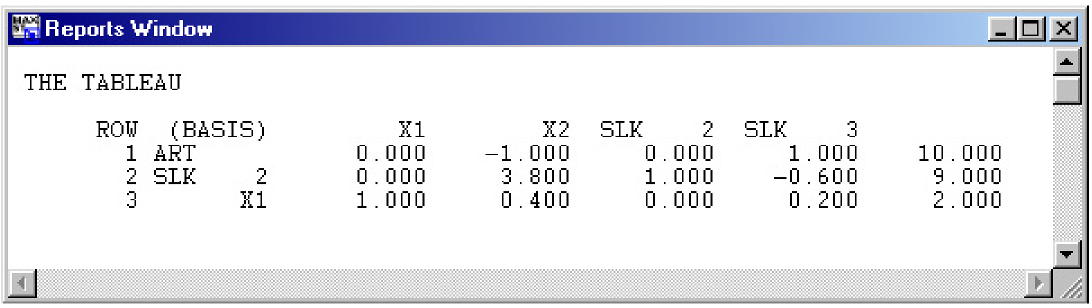


Figura 1.11: 2^{o} quadro para o exemplo 1

```
Reports Window

THE TABLEAU

     ROW  (BASIS)         X1        X2   SLK    2  SLK    3
       1 ART            0.000     0.000     0.263     0.842     12.368
       2        X2      0.000     1.000     0.263    -0.158      2.368
       3        X1      1.000     0.000    -0.105     0.263      1.053
```

Figura 1.12: 3^o quadro para o exemplo 1

```
C:\User\Aloisio\Pesquisa O...
min -6x1-10x2

st
   3x1 + 5x2 <= 15
   5x1 + 2x2 <= 10
```

Figura 1.13: Modelo LINDO para o exemplo 2

```
Reports Window

THE TABLEAU

     ROW  (BASIS)         X1        X2   SLK    2  SLK    3
       1 ART           -6.000   -10.000     0.000     0.000      0.000
       2 SLK     2      3.000     5.000     1.000     0.000     15.000
       3 SLK     3      5.000     2.000     0.000     1.000     10.000
ART      ART           -6.000   -10.000     0.000     0.000      0.000
```

Figura 1.14: 1^o quadro para o exemplo 2

```
Reports Window

     ROW  (BASIS)         X1        X2   SLK    2  SLK    3
       1 ART            0.000     0.000     2.000     0.000     30.000
       2        X2      0.600     1.000     0.200     0.000      3.000
       3 SLK     3      3.800     0.000    -0.400     1.000      4.000
```

Figura 1.15: 2^o quadro para o exemplo 2

```
Reports Window

THE TABLEAU

     ROW  (BASIS)         X1        X2   SLK    2  SLK    3
       1 ART            0.000     0.000     2.000     0.000     30.000
       2        X2      0.000     1.000     0.263    -0.158      2.368
       3        X1      1.000     0.000    -0.105     0.263      1.053
```

Figura 1.16: 3^o quadro para o exemplo 2

Após digitarmos o modelo e o compilarmos, geraremos o 1ºquadro (Figura 1.18). Logo após utilizaremos o quadro de pivoteamento e decidiremos qual variável entra e qual variável sai da base (figura 1.10) e analisamos o novo quadro (figura 1.19), decidimos qual variável entra e qual variável. Analisando o 3ºquadro (figura 1.20 observamos que se a variável SLK 2 entrar na base encontraremos uma solução melhor ($\exists\ c_j < 0$), mas os coeficientes das restrições são negativos, portando nenhuma variável pode entrar na base, portanto este problema não tem solução.

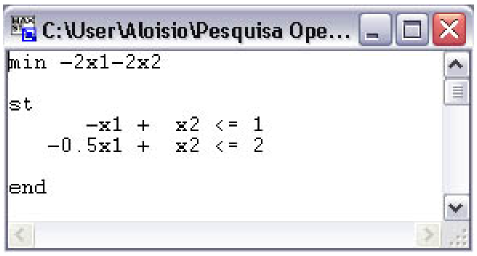


Figura 1.17: Modelo LINDO para o exemplo 3

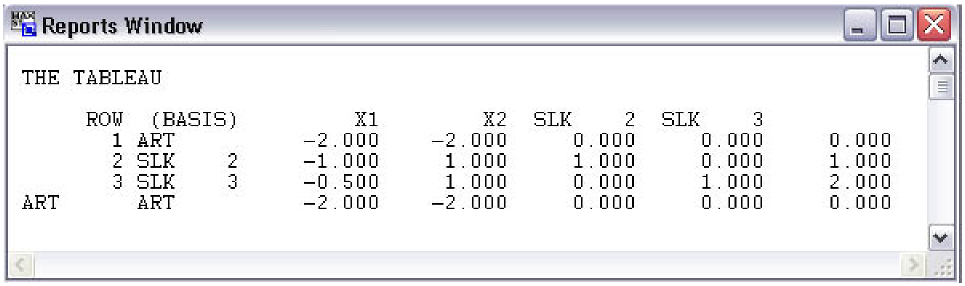


Figura 1.18: 1º quadro para o exemplo 3

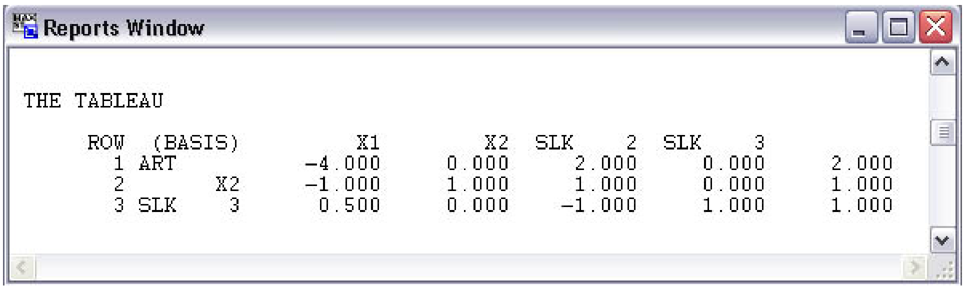


Figura 1.19: 2º quadro para o exemplo 3

1.4 Análise de Sensibilidade

Para utilizarmos a análise de sensibilidade no LINDO, tomaremos o seguinte exemplo:

Um pecuarista tem disponíveis três tipos de ração para gado. Cada tipo tem sua composição em termos de quatro nutrientes. O pecuarista quer misturar essas rações para obter um produto final que satisfaça às exigências mínimas dos animais em termos de nutrientes. A composição e as exigências estão apresentadas no quadro abaixo:

Nutrientes	**% por Kg**			**Exigência mínima em Kg por saco de 100 Kg**
	Ração 1	**Ração 2**	**Ração 3**	
1	30	25	10	6
2	20	30	20	4
3	25	15	30	4
4	25	30	40	6
Custo/Kg	1.00	1.20	1.30	

O objetivo é conseguir uma mistura de mínimo custo. Para este exemplo responderemos as seguintes questões:

1) Qual o intervalo de estabilidade para o custo da primeira ração?

2) Qual o desconto, em reais, no preço segunda ração a partir do qual seu uso é interessante?

3) Qual o preço máximo da terceira ração que não altera a quantidade ótima encontrada?

4) Se a exigência do nutriente 1 passasse de 6 para 7 Kg em cada 100 Kg de mistura, qual a variação de preço que ocorreria?

5) Para cada diminuição de 1 Kg de nutriente 4 na mistura, o custo desta cai em R$ 3,05. Essa informação vale até para quantos quilos diminuídos?

6) Suponha que o pecuarista pudesse usar um quarto tipo de ração ao custo de R$ 1,10/Kg, e que essa ração tivesse 25% de cada nutriente. Valeria a pena usar esse tipo de ração?

Para responder estas questões primeiramente vamos modelar este PPL:

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{min} & x_1 & + & 1.20x_2 & + & 1.30x_3 & & \\
\text{s.a} & 0.30x_1 & + & 0.25x_2 & + & 0.10x_3 & \geq & 6 \\
 & 0.20x_1 & + & 0.30x_2 & + & 0.20x_3 & \geq & 4 \\
 & 0.25x_1 & + & 0.15x_2 & + & 0.30x_3 & \geq & 4 \\
 & 0.25x_1 & + & 0.30x_2 & + & 0.40x_3 & \geq & 6 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

O modelo LINDO para este PPL é apresentado na figura 1.21. Depois de digitado o modelo, vamos compilá-lo ($CTRL+E$) e depois resolvê-lo ($CTRL+S$), mas desta vez vamos responder sim a pergunta DO RANGE(SENSITIVITY)ANALYSIS?, ou seja, vamos fazer a análise de sensibilidade deste PPL. A janela REPORTS WINDOW mostrará a tela mostrada na figura 1.22 e é a partir desta janela que responderemos as perguntas para este PPL.

1) Para responder esta pergunta vamos analisar o campo OBJ COEFICIENT RANGES da janela REPORTS WINDOW. O campo "OBJ COEFICIENT RANGES"nos apresenta os subcampos

Reports Window

```
THE TABLEAU

     ROW   (BASIS)        X1         X2  SLK    2  SLK    3
       1  ART           0.000      0.000   -6.000     8.000     10.000
       2        X2      0.000      1.000   -1.000     2.000      3.000
       3        X1      1.000      0.000   -2.000     2.000      2.000
```

Figura 1.20: 3^o quadro para o exemplo 3

C:\User\Aloisio\Pesquisa Operacional\B...

```
min x1 + 1.20x2 + 1.30x3
st
 N1) 0.30x1 + 0.25x2 + 0.10x3 >= 6
 N2) 0.20x1 + 0.30x2 + 0.20x3 >= 4
 N3) 0.25x1 + 0.15x2 + 0.30x3 >= 4
 N4) 0.25x1 + 0.30x2 + 0.40x3 >= 6
end
```

Figura 1.21: Modelo LINDO para o PPL dos Nutrientes

Reports Window

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      23.05263

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1        18.947369          0.000000
       X2         0.000000          0.086842
       X3         3.157895          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      N1)         0.000000         -0.789474
      N2)         0.421053          0.000000
      N3)         1.684211          0.000000
      N4)         0.000000         -3.052632

NO. ITERATIONS=       2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                          OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE          ALLOWABLE
                   COEF         INCREASE           DECREASE
      X1        1.000000         0.117857           0.187500
      X2        1.200000         INFINITY           0.086842
      X3        1.300000         0.300000           0.966667

                          RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW         CURRENT        ALLOWABLE          ALLOWABLE
                   RHS          INCREASE           DECREASE
      N1        6.000000         1.200000           1.333333
      N2        4.000000         0.421053           INFINITY
      N3        4.000000         1.684211           INFINITY
      N4        6.000000        18.000000           1.000000
```

Figura 1.22: REPORTS WINDOW para o PPL dos Nutrientes

ALLOWABLE INCREASE E ALLOWABLE DECREASE que se referem ao quanto o custo pode aumentar ou pode diminuir para que os valores ótimos de cada ração permaneçam o mesmo, respectivamente. Então para o nosso exemplo vamos analisar a variável x_1, a qual se refere à Ração 1. Podemos observar que o custo desta ração pode aumentar até R\$0.117857 e diminuir em até R\$0.187500 que a quantidade ótima da ração continuará a mesma. Ou seja:

$$c_1 - 0.18 \leq \bar{c}_1 \leq c_1 + 0.11 \Rightarrow 0.82 \leq \bar{c}_1 \leq 1.11$$

2) Para responder a 2^a pergunta, vamos analisar a variável x_2 no campo REDUCED COST ou então o campo ALLOWABLE DECREASE desta variável, onde é apresentado o valor para o qual o uso desta ração é interessante. Para o nosso exemplo temos que o valor para o desconto deve ser de R\$0.09 de forma que o uso da Ração 2 seja interessante.

3) Para encontrar o preço máximo da 3^a ração que não altera a quantidade ótima encontrada, devemos analisar o campo ALLOWABLE DECREASE da variável x_3, lá encontramos o valor 0.3000, portanto o preço máximo da ração 3 deve ser de R\$1.60 para a que quantidade ótima permaneça o mesmo.

4) Esta pergunta será respondida através da análise do campo DUAL PRICE referente à restrição que envolve o nutriente 1, que neste caso é a restrição N1. Lá encontramos o valor -0.789474, que corresponde ao valor que será acrescido (ou diminuído) ao custo total se uma unidade a mais (ou a menos) do nutriente for exigida. Então se aumentarmos para 7 a exigência do nutriente 1 o custo total será aumentado em R\$0.78.

5) Vamos responder esta pergunta utilizando o campo RIGHTHAND SIDE RANGES, que corresponde às restrições do PPL, especificamente analisaremos o subcampo ALLOWABLE DECREASE referente ao nutriente 4, ou seja N4, que nos dará o valor que poderá ser diminuído para o qual a quantidade do nutriente continuará a mesma. Portanto, podemos observar que esta informação vale até para uma diminuição de 1Kg.

6) Para respondermos esta pergunta vamos fazer as seguintes análises:

$$c_4 - z_4$$

$$z_4 = (c^B)^t y_4$$

$$y_4 = B^{-1} a_4$$

A matriz B^{-1} pode ser encontrada através do TABLEAU final do PPL. Então pressionamos as teclas $ALT + 7$ para aparecer o TABLEAU na janela REPORTS WINDOW, a matriz B^{-1} se encontra abaixo das variáveis de folga e como no nosso PPL todas as restrições são de $\geq$ então devemos multiplicar cada coluna da matriz por -1. Portanto temos que:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -2.63 & 0 & 0 & 0.30 \\ 0.32 & -1 & 0 & 0.20 \\ 0.26 & 0 & -1 & 0.25 \\ 4.21 & 0 & 0 & -1.05 \end{bmatrix}$$

Portanto, temos que:

$$y_4 = \begin{bmatrix} -2.63 & 0 & 0 & 0.30 \\ 0.32 & -1 & 0 & 0.20 \\ 0.26 & 0 & -1 & 0.25 \\ 4.21 & 0 & 0 & -1.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.13 \\ -0.065 \\ -0.015 \\ 0.79 \end{bmatrix}$$

Daí,

$$z_4 = \begin{bmatrix} 1.30 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.13 \\ -0.065 \\ -0.015 \\ 0.79 \end{bmatrix} = 0.96$$

Portanto,

$$c_4 - z_4 = 1.10 - 0.96 = 0.14$$

Como $c_4 - z_4 > 0 \Rightarrow$ não vale a pena usar esta ração.

Capítulo 2

SOLVER (EXCEL)

2.1 O que é o SOLVER?

O Solver faz parte de um conjunto de programas algumas vezes chamado de ferramentas de análise hipotética. Com o Solver você pode localizar um valor ideal para uma fórmula em uma célula – chamada de célula de destino – em uma planilha. O Solver trabalha com um grupo de células relacionadas direta ou indiretamente com a fórmula na célula de destino. O Solver ajusta os valores nas células variáveis que você especificar – chamadas de células ajustáveis – para produzir o resultado especificado por você na fórmula da célula de destino. Você pode aplicar restrições para restringir os valores que o Solver poderá usar no modelo e as restrições podem se referir a outras células que afetem a fórmula da célula de destino. Poderemos visualizar isto melhor através de exemplos.

No nosso curso, usaremos o SOLVER para resolver Problemas de Programação Linear.

2.2 Exemplos de como Modelar usando o SOLVER do Excel

Para familiarizarmos com o uso do SOLVER utilizaremos uma série de exemplos para a fixação de seus principais comandos.

2.2.1 Problema da Fábrica de Automóveis

Alfa Inc. deve produzir 1000 automóveis Alfa. A empresa tem quatro fábricas. Devido a diferenças na mão-de-obra e avanços tecnológicos, as plantas diferem no custo de produção unitário de cada carro. Elas também utilizam diferentes quantidades de matéria-prima e mão-de-obra. O custo de operação, o tempo necessário de mão-de-obra e o custo de matéria-prima para produzir uma unidade de cada carro em cada uma das fábricas estão evidenciados na tabela abaixo.

Fábrica	Custo Unitário (em R$1.000,00)	Mão-de-Obra (horas de fabricação)	Matéria-Prima (unidades de material)
1	15	2	3
2	10	3	4
3	9	4	5
4	7	5	6

Um acordo trabalhista assinado requer que pelo menos 250 carros sejam produzidas na fábrica 3. Existem 3200 horas de mão-de-obra e 4000 unidades de material que podem ser alocados às quatro fábricas.

O modelo de decisão do problema é dado abaixo, onde x_j representa a quantidade de automóveis a serem fabricadas na fábrica $j = 1, 2, 3, 4$.

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\min & 15x_1 & + & 10x_2 & + & 9x_3 & + & 7x_4 & & \\
\text{s.a} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & \leq & 3200 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & \leq & 4000 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1000 \\
 & & & & & x_3 & & & \geq & 250 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Para resolvermos este PPL utilizando o Excel, devemos primeiramente designar uma célula para representar cada uma das seguintes entidades:

- Função Objetivo (FO) (Expressão a ser minimizada ou maximizada);
- Varáveis de Decisão (variáveis que o modelador pode alterar seu valor);
- Para cada restrição temos uma célula representando o lado esquerdo da restrição (LHS) e outra representando o lado direito darestrição (RHS).

	A	B	C	D	E	F	G
1	ALFA INC.						
2							
3	Função		Coeficiente da Variável				
4	Objetivo	X1	X2	X3	X4		
5		15	10	9	7		
6	**Variáveis**						
7	Z=	0					
8							
9	**Restrições**		Coeficiente da Variável				Constantes
10	Nº	X1	X2	X3	X4	LHS	RHS
11	**1**	2	3	4	5	0	3200
12	**2**	3	4	5	6	0	4000
13	**3**	1	1	1	1	0	1000
14	**4**			1		0	250

Figura 2.1: Modelagem do Exemplo da seção 2.2.1 no Excel

A figura 2.1 apresenta uma das possíveis maneiras de representar o PPL em uma planilha do Excel. Nesta planilha as células a seguir designarão cada uma das entidades citadas anteriormente.

- B7 irá representar o valor da FO a ser minimizada;
- B6 a E6 representarão os valores que as variáveis de decisão assumirão na solução;
- F11 a F14 irão representar os LHS das 4 restrições;
- G11 a G14 irão representar os RHS das 4 restrições.

Para que possamos definir cada uma das células anteriormente citadas necessitamos inserir uma série de parâmetros do nosso PPL, tais como todos os coeficientes das restrições e da FO. Para lembrar o que cada célula representa é aconselhável a colocação de títulos que especifiquem o conteúdo de cada célula (células com texto). As células B5 a E5 são utilizadas para inserir os valores dos coeficientes da FO, enquanto as células de B11 a E14 representam os coeficientes das 4 restrições.

Agora devemos definir cada uma das entradas citadas anteriormente. A tabela a seguir representa as fórmulas colocadas em cada uma destas células.

Fórmulas utilizadas nas células da modelagem do Exemplo 1

B7	=B5*B6+C5*C6+D5*D6+E5*E6	FO
F11	=B11*B6+C11*C6+D11*D6+E11*E6	LHS da 1^a restrição
F12	=B12*B6+C12*C6+D12*D6+E12*E6	LHS da 2^a restrição
F13	=B13*B6+C13*C6+D13*D6+E13*E6	LHS da 3^a restrição
F14	=B14*B6+C14*C6+D14*D6+E14*E6	LHS da 4^a restrição

Obs.: os símbolos $ significam que a linha e a coluna são fixos.

Precisamos agora avisar ao Excel quais são as células que representam nossa FO, as variáveis de decisão, as restrições do modelo, e finalmente, mandar o Excel resolver para nós. Isto é feito utilizando a ferramenta SOLVER do Excel. Para tal, clique com o botão esquerdo do mouse sobre o menu *FERRAMENTAS* e logo em seguida em *SOLVER*, caso a ferramenta SOLVER não esteja disponível, clique no menu *FERRAMENTAS* e depois em *SUPLEMENTOS* e marque a opção SOLVER para que a mesma fique disponível, o Excel instalará a ferramenta tornando-a disponível para uso.

Após este procedimento aparecerá na tela a janela representada pela figura 2.2. Nesta janela é que serão informadas ao software as células que representarão a FO, as variáveis de decisão e as restrições.

Na parte superior da janela da figura 2.2 aparece um campo para a entrada de dados chamado *"Definir célula de destino"* que representará o valor da FO. Existem duas maneiras para designar esta célula. A primeira é clicar sobre o ícone que está do lado direito do campo, que levará você a planilha de dados, nesse ponto devemos clicar sobre a célula que representa a FO e pressionar a tecla *ENTER* para voltar a janela do SOLVER. A segunda é digitar o nome da cálula (B7 no nosso exemplo) no campo. Realizando uma das duas maneiras, a janela resultante é apresentada na figura 2.3.

Na linha seguinte são apresentadas as opções de maximizar, minimizar e atingir valor. Dependendo do problema devemos clicar sobre uma das três, no nosso exemplo devemos clicar sobre Min, pois nosso exemplo é de minimização. A opção *"Valor de"* pode ser utilizada em análise do tipo ponto de equilíbrio, onde desejamos que a função Lucro (por exemplo) atinja o valor de 0. Nos casos de Programação Linear esta opção não será utilizada.

Na próxima linha há um campo denominado *"Células Variáveis"*. Neste campo serão inseridas as células que representarão as variáveis de decisão. Os valores podem ser inseridos como o caso da FO, isto é, clicando sobre o ícone à direita do campo e marcando as células escolhidas ou simplesmente digitando seus nomes utilizando as regras do Excel para tal. Utilizando uma das maneiras, a janela terá o formato da figura 2.4.

O próximo passo é designar as restrições do problema. Devemos inserir uma restrição ou um grupo de restrições (desde que as restrições tenham o mesmo sinal de restrição e estejam adjacentes) de cada vez. Para inserir a 1^a restrição devemos clicar no botão *"Adicionar"* para aparecer uma janela de entrada de restrições.

A janela de entrada de restrições tem três campos, que representam o LHS - *"Referência de célula:"* (à esquerda), o sinal da restrição (ao centro), e o RHS - *"Restrição"* (à direita). Como já mencionado anteriormente, o LHS representa a equação do lado esquerdo da restrição (o lado esquerdo do dicionário modificado). O RHS representa o lado direito da restrição (a constante do dicionário). A figura 2.5 representa a entrada da 1^a e 2^a restrições. Para entrar com os valores nos campos, deve-se proceder como nos casos anteriores, usando o ícone à direita ou digitando o nome da célula.

O passo seguinte será o de clicar no botão *"OK"*, no caso de não haver nenhuma outra restrição, ou no botão *"Adicionar"* para confirmar esta restrição e abrir espaço para uma nova entrada. No nosso exemplo, devemos clicar em *"Adicionar"* e inserir as outra restrições. Ao final de todas as entradas a janela do SOLVER terá a forma da figura 2.6.

Devemos agora inserir as restrições de não-negatividade e definir que o modelo é de Programação Linear, para isto, devemos clicar no botão *"Opções"* e marcar as opções *"Presumir modelo linear"* e *"Presumir não negativos"* como é mostrada na figura 2.7 e depois clique no botão *"OK"* para

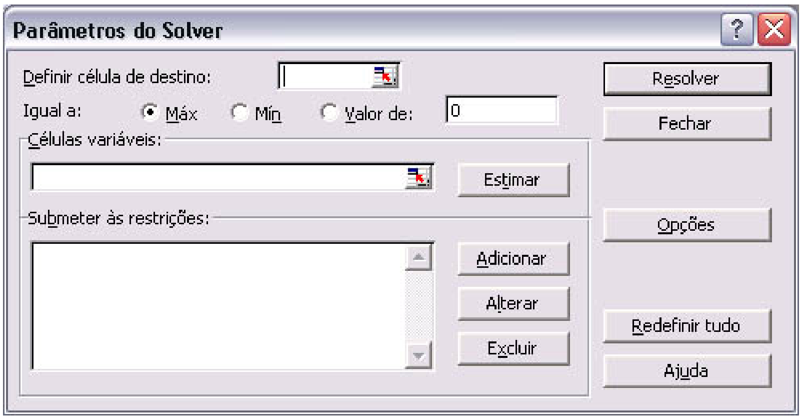


Figura 2.2: Janela da ferramenta SOLVER

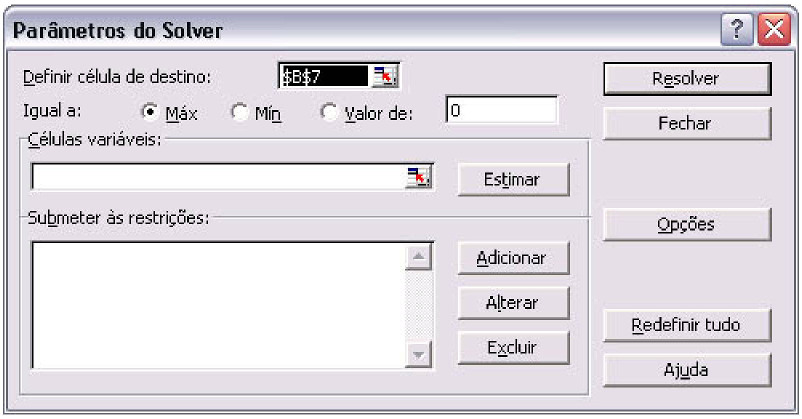


Figura 2.3: Escolha da Célula de Destino

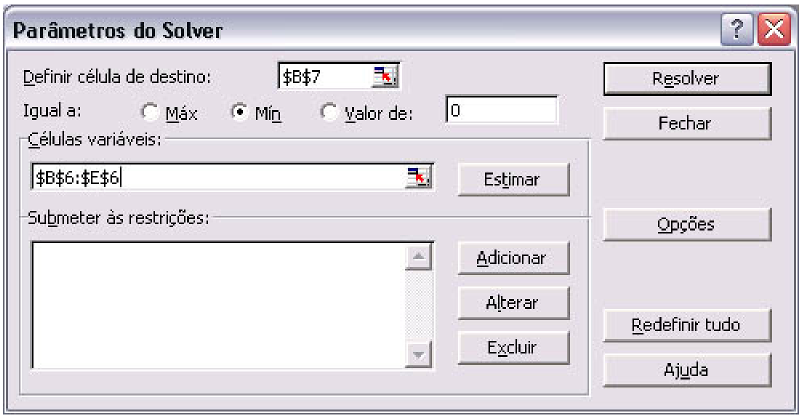


Figura 2.4: Janela do Solver após a designação das células variáveis

Figura 2.5: Formato da entrada da 1^a e 2^a restrições

confirmar.

Uma vez inserido o modelo e suas características, devemos efetivamente resolvê-lo. Para tanto basta clicar no botão *"Resolver"* na janela dos parâmetros do SOLVER do Excel. Se o modelo foi corretamente inserido, será processado e o resultado aparecerá automaticamente na planilha. Aparecerá uma janela como a mostrada na figura 2.8. Se observarmos valores incoerentes ou inesperados, devemos neste ponto clicar na opção *"Restaurar Valores Originais"* para restaurar os valores iniciais do modelo. Existe ainda a opção de requisitar três tipos de relatórios (lado direito da janela).

Ao clicar no botão *"OK"*, a janela de Resultados do SOLVER será apagada e os resultados aparecerão na planilha como mostrado na figura 2.9.

2.2.2 Problema do Empréstimo do Banco

O Banco Municipal de Ouro Preto (BMOP) está formulando sua política de crédito para o próximo trimestre. Um total de 12 milhões será alocado às várias modalidades de empréstimo que ele pretende conceder. Sendo uma instituição de atendimento pleno, obriga-se a atender a uma clientela diversificada. A tabela abaixo prevê as modalidades de empréstimos praticadas pelo Banco, as taxas de juro por ele cobradas e a possibilidade de débitos não honrados, medida em probabilidade, com base nas experiências passadas.

Tipo de Empréstimo	**Taxa de Juro**	**Probabilidade de Débito não honrado**
Pessoal	0,140	0,10
Compra de automóvel	0,130	0,07
Compra de casa própria	0,120	0,03
Agrícola	0,125	0,05
Comercial	0,100	0,02

Os débitos não honrados são assumidos como irrecuperáveis e, portanto, não produzem retorno. A competição com outras instituições similares, nas áreas mencionadas, requer que o Banco aloque, pelo menos 40% do total disponível, em empréstimos agrícolas e comerciais. Para apoiar a indústria da construção civil na região, os empréstimos para compra da casa própria devem ser, pelo menos, 50% do total alocado para empréstimos pessoais e destinados a compra de carro. Além disso, o Banco deseja incluir na sua política de empréstimos a condição de que a razão entre o total de débitos não honrados em todos os empréstimos e o total emprestado, não exceda 0,04. Formule um modelo de programação linear para otimizar a política de crédito do Banco.

O modelo de decisão do problema é dado abaixo, onde x_j representa a quantidade de dinheiro alocado para empréstimos do tipo j = (1=Pessoal, 2=Compra de Automóveis, 3=Compra de Casa

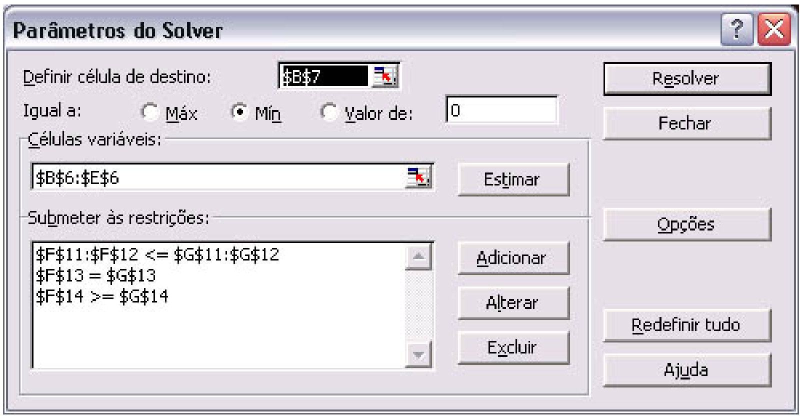


Figura 2.6: Janela de entrada dos parâmetros do SOLVER para o Exemplo da seção 2.2.1

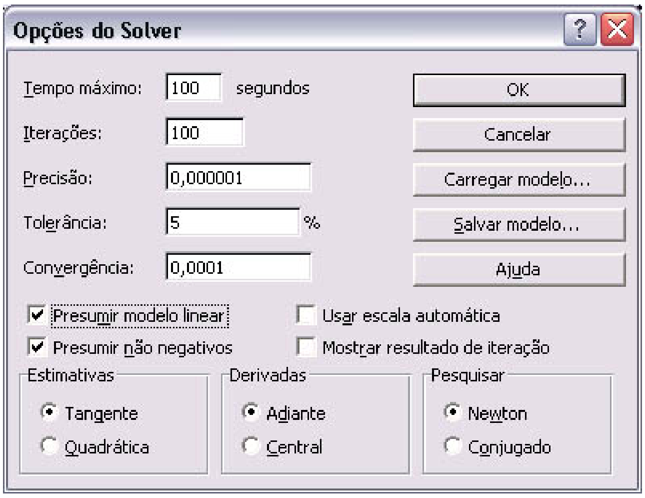


Figura 2.7: Janela de Opções do SOLVER

Figura 2.8: Opções de Resultado da ferramenta SOLVER

Própria, 4=Agrícola e 5=Comercial).

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
\max & 0,126x_1 & + & 0,121x_2 & + & 0,116x_3 & + & 0,119x_4 & + & 0,098x_5 & & \\
\text{s.a} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 12 \\
 & & & & & & & x_4 & + & x_5 & \geq & 4{,}8 \\
 & -0,05x_1 & - & 0,05x_2 & + & x_3 & & & & & \geq & 0 \\
 & 0,06x_1 & + & 0,03x_2 & - & 0,01x_3 & + & 0,01x_4 & - & 0,02x_5 & \leq & 0 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Para resolvermos este PPL, devemos proceder da mesma forma apresentada no exemplo da seção 2.2.1, só que o modelo deve ser parecido com o da figura 2.10.

A figura 2.10 apresenta uma das possíveis maneiras de representar o PPL em uma planilha do Excel. Nesta planilha as células a seguir designarão cada uma das entidades:

- B7 irá representar o valor da FO a ser maximizada;
- B6 a F6 representarão os valores que as variáveis de decisão assumirão na solução;
- G11 a G14 irão representar os LHS das 4 restrições;
- H11 a H14 irão representar os RHS das 4 restrições.

As fórmulas utilizadas são apresentadas na tabela a seguir.

Fórmulas utilizadas nas células da modelagem do Exemplo 2

B7	=B6*B5+C6*C5+D6*D5+E6*E5+F6*F5
G11	=B11*B6+C11*C6+D11*D6+E11*E6+F11*F6
G12	=B12*B6+C12*C6+D12*D6+E12*E6+F12*F6
G13	=B13*B6+C13*C6+D13*D6+E13*E6+F13*F6
G14	=B14*B6+C14*C6+D14*D6+E14*E6+F14*F6

A janela com os parâmetros do SOLVER é apresentado na figura 2.11 e a planilha com os resultados é mostrada na figura 2.12.

2.2.3 Problema da Fábrica de Motores

A LCL Motores Ltda., uma fábrica de motores especiais, recebeu recentemente R$90.000,00 em pedidos de seus três tipos de motores. Cada motor necessita de um determinado número de horas de trabalho no setor de montagem e de acabamento.

A LCL pode terceirizar parte da sua produção. A tabela a seguir resume estes dados.

Modelo	**1**	**2**	**3**	**TOTAL**
Demanda	3000 unid.	2500 unid.	500 unid.	6000 unid.
Montagem	1 h/unid.	2 h/unid.	0,5 h/unid.	6000 h
Acabamento	2,5 h/unid.	1 h/unid.	4 h/unid.	10000 h
Custo Produção	R$50	R$90	R$120	
Terceirizado	R$65	R$92	R$140	

	A	B	C	D	E	F	G
1				A L F A I N C.			
2							
3	Função		Coeficiente da Variável				
4	Objetivo	X1	X2	X3	X4		
5		15	10	9	7		
6	**Variáveis**	250	500	250	0		
7	Z=	11000					
8							
9	**Restrições**		Coeficiente da Variável				Constantes
10	**Nº**	X1	X2	X3	X4	LHS	RHS
11	**1**	2	3	4	5	3000	3200
12	**2**	3	4	5	6	4000	4000
13	**3**	1	1	1	1	1000	1000
14	**4**			1		250	250

Figura 2.9: Resultados inseridos na planilha

	A	B	C	D	E	F	G	H
1					B M O P			
2								
3	Função			Coeficiente da Variável				
4	Objetivo	X1	X2	X3	X4	X5		
5		0,126	0,121	0,116	0,119	0,098		
6	**Variáveis**							
7	Z=	0						
8								
9	**Restrições**		Coeficiente da Variável					Constantes
10	**Nº**	X1	X2	X3	X4	X5	LHS	RHS
11	**1**	1	1	1	1	1	0	12
12	**2**				1	1	0	4,8
13	**3**	-0,05	-0,05	1			0	0
14	**4**	0,06	0,03	-0,01	0,01	-0,02	0	0

Figura 2.10: Modelagem do Exemplo da seção 2.2.2 no Excel

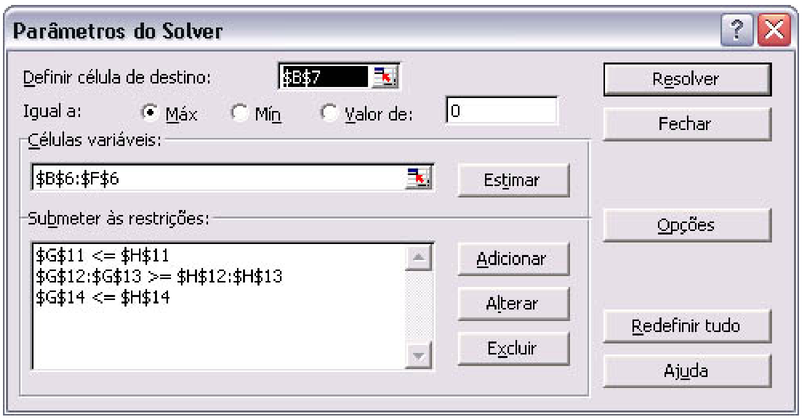


Figura 2.11: Janela de entrada dos parâmetros do SOLVER

A LCL Motores deseja determinar quantos motores devem ser produzidos em sua fábrica e quantos devem ser produzidos de forma terceirizada para atender à demanda de pedidos.

Seja F_i o número de motores fabricados pela LCL do modelo i (i=1,2,3) e T_i o número de motores terceirizados pela LCL do modelo i(i=1,2,3).

O modelo de decisão do problema é dado a seguir.

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\text{min} & 50F_1 & + & 90F_2 & + & 120F_3 & + & 65T_1 & + & 92T_2 & + & 140T_3 & & \\
\text{s.a} & F_1 & + & 2F_2 & + & 0,5F_3 & & & & & & & \leq & 6000 \\
 & 2,5F_1 & + & F_2 & + & 4F_3 & & & & & & & \leq & 10.000 \\
 & F_1 & + & & & & & T_1 & & & & & = & 3.000 \\
 & & & F_2 & + & & & & & T_2 & & & = & 2.500 \\
 & & & & & F_3 & + & & & & & T_3 & = & 500 \\
 & \multicolumn{13}{l}{F_i,\, T_i \geq 0,\ \forall i\text{=1,2,3}}
\end{array}
$$

Para resolvermos este PPL, devemos proceder da mesma forma apresentada no exemplo da seção 2.2.1, só que o modelo deve ser parecido com o da figura 2.13.

A figura 2.13 apresenta uma das possíveis maneiras de representar o PPL em uma planilha do Excel. Nesta planilha as células a seguir designarão cada uma das entidades:

- B7 irá representar o valor da FO a ser minimizada;
- B6 a G6 representarão os valores que as variáveis de decisão assumirão na solução;
- H11 a H15 irão representar os LHS das 5 restrições;
- I11 a I15 irão representar os RHS das 5 restrições.

As fórmulas utilizadas são apresentadas na tabela a seguir.

Fórmulas utilizadas nas células da modelagem do Exemplo 3

B7	=B6*B5+C6*C5+D6*D5+E6*E5+F6*F5+G6*G5
H11	=B11*B6+C11*C6+D11*D6+E11*E6+F11*F6+G11*G6
H12	=B12*B6+C12*C6+D12*D6+E12*E6+F12*F6+G12*G6
H13	=B13*B6+C13*C6+D13*D6+E13*E6+F13*F6+G13*G6
H14	=B14*B6+C14*C6+D14*D6+E14*E6+F14*F6+G14*G6
H15	=B15*B6+C15*C6+D15*D6+E15*E6+F15*F6+G15*G6

A janela com os parâmetros do SOLVER é apresentado na figura 2.14 e a planilha com os resultados é mostrada na figura 2.15.

2.2.4 Problema da Escolha de Carteira de Investimentos

A LCL Investimentos S.A. gerencia recursos de terceiros através da escolha de carteiras de investimentos para diversos clientes, baseados em *bonds* de diversas empresas. Um de seus clientes exige que:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				**B M O P**				
2								
3	Função		Coeficiente da Variável					
4	Objetivo	X1	X2	X3	X4	X5		
5		0,126	0,121	0,116	0,119	0,098		
6	**Variáveis**	0	0	6	6	0		
7	Z=	1,41						
8								
9	**Restrições**		Coeficiente da Variável					Constantes
10	Nº	X1	X2	X3	X4	X5	LHS	RHS
11	**1**	1	1	1	1	1	12	12
12	**2**				1	1	6	4,8
13	**3**	-0,05	-0,05	1			6	0
14	**4**	0,06	0,03	-0,01	0,01	-0,02	0	0

Figura 2.12: Resultados inseridos na planilha para o exemplo da seção 2.2.2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				**LCL Motores Ltda.**					
2									
3	Função			Coeficiente da Variável					
4	Objetivo	F1	F2	F3	T1	T2	T3		
5		50	90	120	65	92	140		
6	**Variáveis**								
7	Z=	0							
8									
9	**Restrições**			Coeficiente da Variável					Constantes
10	Nº	F1	F2	F3	T1	T2	T3	LHS	RHS
11	**1**	1	2	0,5				0	6000
12	**2**	2,5	1	4				0	10000
13	**3**	1			1			0	3000
14	**4**		1			1		0	2500
15	**5**			1			1	0	500

Figura 2.13: Modelagem do Exemplo da seção 2.2.3 no Excel

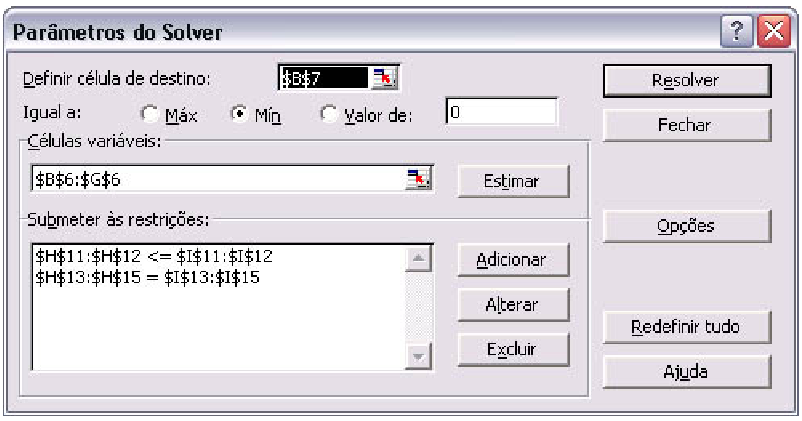


Figura 2.14: Janela de entrada dos parâmetros do SOLVER

- Não mais de 25% do total aplicado deve ser investido em um único investimento.

- Um valor superior a 50% do total aplicado deve ser investido em títulos de maturidades maiores que 10 anos.

- O total aplicado em títulos de alto risco deve ser, no máximo, de 50% do total investido.

A tabela a seguir mostra os dados dos títulos selecionados. Determine qual percentual do total deve ser aplicado em cada tipo de título.

	Retorno Anual	**Anos para Vencimento**	**Risco**
Título 1	8,7%	15	1 - muito baixo
Título 2	9,5%	12	3 - regular
Título 3	12,0%	8	4 - alto
Título 4	9,0%	7	2 - baixo
Título 5	13,0%	11	4 - alto
Título 6	20,0%	5	5 - muito alto

Seja P_i o percentual do total aplicado no título do tipo $i = 1, \ldots, 6$.

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
\max & \displaystyle\sum_{j=1}^{6} c_j * P_j & & & & & & & & & & & & \\
\text{s.a} & P_1 & + & P_2 & + & P_3 & + & P_4 & + & P_5 & + & P_6 & = & 100 \\
 & P_1 & + & P_2 & + & & & & & P_5 & & & \geq & 50 \\
 & & & & & P_3 & + & & & P_5 & + & P_6 & \leq & 50 \\
 & \multicolumn{13}{l}{P_i \leq 25, \forall i = 1, \ldots, 6} \\
 & \multicolumn{13}{l}{P_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, 6}
\end{array}$$

onde c= $\begin{bmatrix} 0,00087 \\ 0,00095 \\ 0,00120 \\ 0,00090 \\ 0,00130 \\ 0,00200 \end{bmatrix}$ e P= $\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix}$

Para resolvermos este PPL, devemos proceder da mesma forma apresentada no exemplo da seção 2.2.1, só que o modelo deve ser parecido com o da figura 2.16.

A figura 2.16 apresenta uma das possíveis maneiras de representar o PPL em uma planilha do Excel. Nesta planilha as células a seguir designarão cada uma das entidades:

- B7 irá representar o valor da FO a ser maximizada;
- B6 a G6 representarão os valores que as variáveis de decisão assumirão na solução;
- H11 a H19 irão representar os LHS das 9 restrições;
- I11 a I19 irão representar os RHS das 9 restrições.

As fórmulas utilizadas são apresentadas na tabela a seguir.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**LCL Motores Ltda.**								
2									
3	Função	Coeficiente da Variável							
4	Objetivo	F1	F2	F3	T1	T2	T3		
5		50	90	120	65	92	140		
6	**Variáveis**	3000	500	500	0	2000	0		
7	Z=	439000							
8									
9	**Restrições**	Coeficiente da Variável							Constantes
10	Nº	F1	F2	F3	T1	T2	T3	LHS	RHS
11	**1**	1	2	0,5				4250	6000
12	**2**	2,5	1	4				10000	10000
13	**3**	1			1			3000	3000
14	**4**		1			1		2500	2500
15	**5**			1			1	500	500

Figura 2.15: Resultados inseridos na planilha para o exemplo da seção 2.2.3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**LCL Investimentos S.A.**								
2									
3	Função	Coeficiente da Variável							
4	Objetivo	P1	P2	P3	P4	P5	P6		
5		0,00087	0,00095	0,0012	0,0009	0,0013	0,002		
6	**Variáveis**								
7	Z=	0							
8									
9	**Restrições**	Coeficiente da Variável							Constantes
10	Nº	P1	P2	P3	P4	P5	P6	LHS	RHS
11	**1**	1	1	1	1	1	1	0	100
12	**2**	1	1			1		0	50
13	**3**			1		1	1	0	50
14	**4**	1						0	25
15	**5**		1					0	25
16	**6**			1				0	25
17	**7**				1			0	25
18	**8**					1		0	25
19	**9**						1	0	25

Figura 2.16: Modelagem do Exemplo da seção 2.2.4 no Excel

Fórmulas utilizadas nas células da modelagem do Exemplo 4

B7	=B6*B5+C6*C5+D6*D5+E6*E5+F6*F5+G6*G5
H11	=B11*B6+C11*C6+D11*D6+E11*E6+F11*F6+G11*G6
H12	=B12*B6+C12*C6+D12*D6+E12*E6+F12*F6+G12*G6
H13	=B13*B6+C13*C6+D13*D6+E13*E6+F13*F6+G13*G6
H14	=B14*B6+C14*C6+D14*D6+E14*E6+F14*F6+G14*G6
H15	=B15*B6+C15*C6+D15*D6+E15*E6+F15*F6+G15*G6
H16	=B16*B6+C16*C6+D16*D6+E16*E6+F16*F6+G16*G6
H17	=B17*B6+C17*C6+D17*D6+E17*E6+F17*F6+G17*G6
H18	=B18*B6+C18*C6+D18*D6+E18*E6+F18*F6+G18*G6
H19	=B19*B6+C19*C6+D19*D6+E19*E6+F19*F6+G19*G6

A janela com os parâmetros do SOLVER é apresentado na figura 2.17 e a planilha com os resultados é mostrada na figura 2.18.

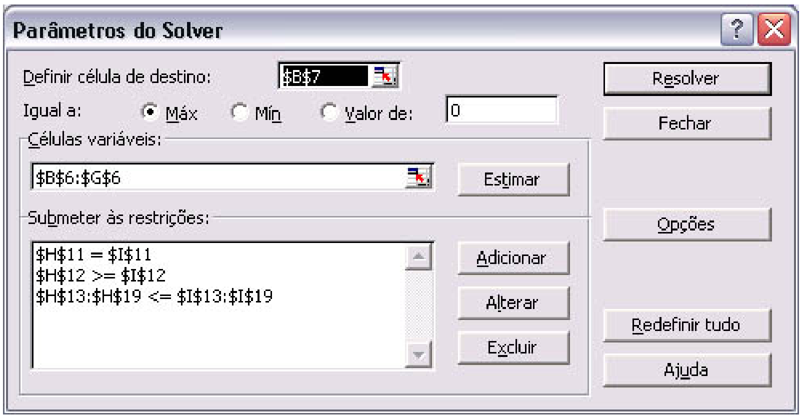


Figura 2.17: Janela de entrada dos parâmetros do SOLVER

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**LCL Investimentos S.A.**								
2									
3	Função	Coeficiente da Variável							
4	Objetivo	P1	P2	P3	P4	P5	P6		
5		0,00087	0,00095	0,0012	0,0009	0,0013	0,002		
6	**Variáveis**	0	25	0	25	25	25		
7	Z=	0,12875							
8									
9	**Restrições**	Coeficiente da Variável							Constantes
10	Nº	P1	P2	P3	P4	P5	P6	LHS	RHS
11	**1**	1	1	1	1	1	1	100	100
12	**2**	1	1			1		50	50
13	**3**			1		1	1	50	50
14	**4**	1						0	25
15	**5**		1					25	25
16	**6**			1				0	25
17	**7**				1			25	25
18	**8**					1		25	25
19	**9**						1	25	25

Figura 2.18: Resultados inseridos na planilha para o exemplo da seção 2.2.4

2.2.5 Problema da Mistura de Petróleo

Uma refinaria processa vários tipos de petróleo. Cada tipo de petróleo possui uma planilha de custos diferente, expressando, condições de transporte e preços na origem. Por outro lado, cada tipo de petróleo representa uma configuração diferente de subprodutos para a gasolina. Na medida em que certo tipo de petróleo é utilizado na produção da gasolina, é possível a programação das condições de octanagem e outros requisitos. Esses requisitos implicam na classificação do tipo de gasolina obtida.

Supondo que a refinaria trabalhe com uma linha de quatro tipos diferentes de petróleo e deseje produzir as gasolinas amarela, azul e superazul, programar a mistura dos tipos de petróleo atendendo às condições que se seguem nas tabelas a seguir:

Quantidade Disponível de Petróleo

Tipo de Petróleo	**Quantidade Máxima Disponível (barril/dia)**	**Custos por Barril/dia (R$)**
1	3.500	19
2	2.200	24
3	4.200	20
4	1.800	17

Percentuais para Limites de Qualidade das Gasolinas

Tipo de Gasolina	**Especificação**	**Preço de Venda (R$/Barril)**
Superazul	Não mais que 30% de 1 Não menos que 40% de 2 Não mais que 50% de 3	35
Azul	Não mais que 30% de 1 Não menos que 10% de 2	28
Amarela	Não mais que 70% de 1	22

Onde $x_{ij} \equiv$ número de barris de petróleo de tipo j ($j = 1, 2, 3, 4$) que serão destinados à produção da gasolina i ($i =$ A-gasolina Amarela, Z-gasolina aZul e S-gasolina Superazul).

O modelo de decisão para este problema é apresentado a seguir:

(a) Função Objetivo:

Maximizar $Q(x) = 3x_{A1} - 2x_{A2} + 2x_{A3} - 5x_{A4} + 9x_{Z1} + 5x_{Z2} + 8x_{Z3} + x_{Z4} + 16x_{S1} + 11x_{S2} + 15x_{S3} + 8x_{S4}$

(b) Restrições Tecnológicas:

1) $x_{A1} + x_{Z1} + x_{S1} \leq 3.500$

2) $x_{A2} + x_{Z2} + x_{S2} \leq 2.200$

3) $x_{A3} + x_{Z3} + x_{S3} \leq 4.200$

4) $x_{A4} + x_{Z4} + x_{S4} \leq 1.800$

5) $0,7x_{S1} - 0,3x_{S2} - 0,3x_{S3} - 0,3x_{S4} \leq 0$

6) $-0,4x_{S1} + 0,6x_{S2} - 0,4x_{S3} - 0,4x_{S4} \geq 0$

7) $-0,5x_{S1} - 0,5x_{S2} + 0,5x_{S3} - 0,5x_{S4} \leq 0$

8) $0,7x_{Z1} - 0,3x_{Z2} - 0,3x_{Z3} - 0,3x_{Z4} \leq 0$

9) $0,9x_{Z1} - 0,1x_{Z2} - 0,1x_{Z3} - 0,1x_{Z4} \geq 0$

10) $0,3x_{A1} - 0,7x_{A2} - 0,7x_{A3} - 0,7x_{A4} \leq 0$

11) $x_{A1}, x_{A2}, x_{A3}, x_{A4}, x_{Z1}, x_{Z2}, x_{Z3}, x_{Z4}, x_{S1}, x_{S2}, x_{S3}, x_{S4} \geq 0$

Já definido o problema vamos agora modelá-lo no Excel.

Para resolvermos este PPL, devemos proceder da mesma forma apresentada no exemplo da seção 2.2.1, só que o modelo deve ser parecido com o da figura 2.19.

MISTURA DE PETRÓLEO

Função Objetivo	XA1	XA2	XA3	XA4	XZ1	XZ2	XZ3	XZ4	XS1	XS2	XS3	XS4
Coeficiente da Variável	3	-2	2	-5	9	5	8	1	16	11	15	8
Variáveis												
Z=												

Restrições Nº	XA1	XA2	XA3	XA4	XZ1	XZ2	XZ3	XZ4	XS1	XS2	XS3	XS4	LHS	Constantes RHS
1	1				1				1				0	3500
2		1				1				1			0	2200
3			1				1				1		0	4200
4				1				1				1	0	1800
5									0,7	-0,3	-0,3	-0,3	0	0
6									-0,4	0,6	-0,4	-0,4	0	0
7									-0,5	-0,5	0,5	-0,5	0	0
8					0,7	-0,3	-0,3	-0,3					0	0
9					0,9	-0,1	-0,1	-0,1					0	0
10	0,3	-0,7	-0,7	-0,7									0	0

Figura 2.19: Modelagem do Exemplo da seção 2.2.5 no Excel

A figura 2.19 apresenta uma das possíveis maneiras de representar o PPL em uma planilha do Excel. Nesta planilha as células a seguir designarão cada uma das entidades:

- C7 irá representar o valor da FO a ser maximizada;
- C6 a N6 representarão os valores que as variáveis de decisão assumirão na solução;
- O11 a O20 irão representar os LHS das 10 restrições;

- P11 a P20 irão representar os RHS das 10 restrições.

As fórmulas utilizadas são apresentadas na tabela a seguir.

Fórmulas utilizadas nas células da modelagem do Exemplo 5

C7	=C6*C5+D6*D5+E6*E5+...+M6*M5+N6*N5
P11	=C11*C6+D11*D6+E11*E6+...+M11*M6+N11*N6
P12	=C12*C6+D12*D6+E12*E6+...+M12*M6+N12*N6
P13	=C13*C6+D13*D6+E13*E6+...+M13*M6+N13*N6
P14	=C14*C6+D14*D6+E14*E6+...+M14*M6+N14*N6
P15	=C15*C6+D15*D6+E15*E6+...+M15*M6+N15*N6
P16	=C16*C6+D16*D6+E16*E6+...+M16*M6+N16*N6
P17	=C17*C6+D17*D6+E17*E6+...+M17*M6+N17*N6
P18	=C18*C6+D18*D6+E18*E6+...+M18*M6+N18*N6
P19	=C19*C6+D19*D6+E19*E6+...+M19*M6+N19*N6
P20	=C20*C6+D20*D6+E20*E6+...+M20*M6+N20*N6

A janela com os parâmetros do SOLVER é apresentado na figura 2.20 e a planilha com os resultados é mostrada na figura 2.21.

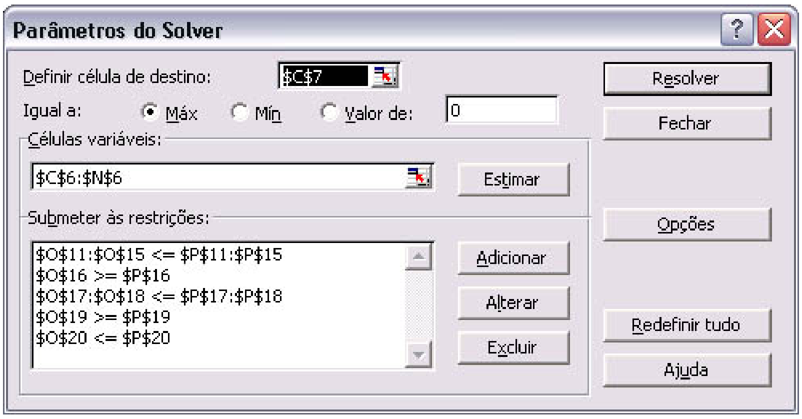


Figura 2.20: Janela de entrada dos parâmetros do SOLVER

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1		**MISTURA DE PETRÓLEO**														
2																
3		**Função**	**Coeficiente da Variável**													
4		**Objetivo**	**XA1**	**XA2**	**XA3**	**XA4**	**XZ1**	**XZ2**	**XZ3**	**XZ4**	**XS1**	**XS2**	**XS3**	**XS4**		
5			3	-2	2	-5	9	5	8	1	16	11	15	8		
6		**Variáveis**	0	0	0	0	1850	0	4200	150	1650	2200	0	1650		
7		Z=	114200													
9		**Restrições**	**Coeficiente da Variável**													**Constantes**
10		**Nº**	**XA1**	**XA2**	**XA3**	**XA4**	**XZ1**	**XZ2**	**XZ3**	**XZ4**	**XS1**	**XS2**	**XS3**	**XS4**	**LHS**	**RHS**
11		**1**	1				1				1				3500	3500
12		**2**		1				1				1			2200	2200
13		**3**			1				1				1		4200	4200
14		**4**				1				1				1	1800	1800
15		**5**									0,7	-0,3	-0,3	-0,3	0	0
16		**6**									-0,4	0,6	-0,4	-0,4	0	0
17		**7**									-0,5	-0,5	0,5	-0,5	-2750	0
18		**8**					0,7	-0,3	-0,3	-0,3					-10	0
19		**9**					0,9	-0,1	-0,1	-0,1					1230	0
20		**10**	0,3	-0,7	-0,7	-0,7									0	0

Figura 2.21: Resultados inseridos na planilha para o exemplo da seção 2.2.5

Capítulo 3

VISUAL XPRESS

3.1 O que é o Visual XPRESS?

O XPRESS-MP, assim como o LINDO, é uma poderosa ferramenta de modelagem e otimização matemática. Para o nosso curso utilizaremos o Visual XPRESS (versão para o Windows do XPRESS-MP) e cuja tela é apresentada na figura 3.1.

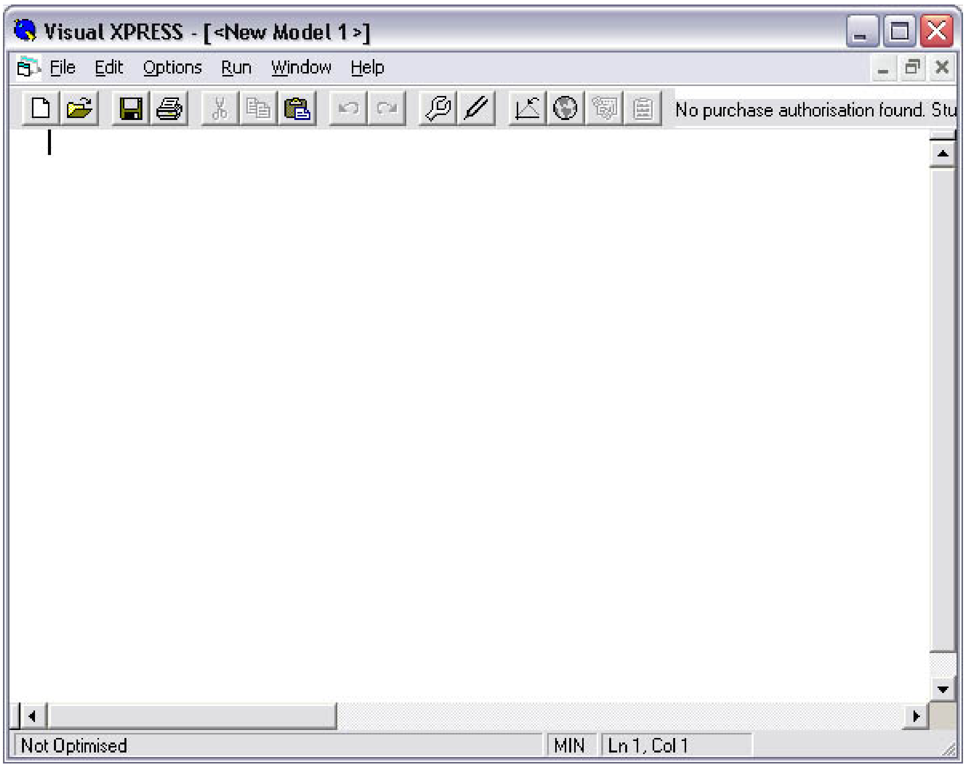


Figura 3.1: Tela Inicial do Visual XPRESS

3.2 Exemplos de como Modelar usando o Visual XPRESS

Para familiarizarmos com o uso do Visual XPRESS utilizaremos uma série de exemplos para a fixação de seus principais comandos.

3.2.1 O Problema do Atleta Indeciso

Um jovem atleta indeciso sente-se atraído pala prática de dois esportes: natação e ciclismo. Sabe por experiência que:

A natação exige um gasto em mensalidade do clube e deslocamento até a piscina que pode ser expresso em um custo médio de 3 reais por seção de treinamento de 2 horas.

O ciclismo, mais simples, acaba custando cerca de 2 reais pelo mesmo tempo de prática.

O orçamento do rapaz dispõe de 70 reais para seu treinamento.

Seus afazeres de aluno de graduação na universidade lhe dão liberdade de empregar, no máximo, 18 horas mensais e 80.000 calorias para os esforços físicos.

Cada seção de natação consome 1.500 calorias, enquanto cada etapa ciclística dispende 1.000 calorias. Considerando que o rapaz goste igualmente de ambos os esportes o problema consiste em planejar seu treinamento de forma a maximizar o número de seções de treinamento.

O modelo de decisão para este problema é apresentado a seguir:

Onde x_i é o número de práticas da natação ($i = 1$) e do ciclismo ($i = 2$).

$$\boxed{\begin{array}{lrcrcr}
\text{max} & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s.a} & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 70 \\
 & 1.500x_1 & + & 1.000x_2 & \leq & 80.000 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \\
 & x_j \in \mathcal{Z}^+ & & & &
\end{array}}$$

Outra forma de representar este PPL é:

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\text{max} & \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \\
\text{s.a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j \leq b_i \ \forall i = 1, \ldots, m \\
 & x_j \geq 0 \ , \forall j = 1,2 \text{ e } x_j \in \mathcal{Z}^+
\end{array}}$$

Onde:

n=2; m=3; c= $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$; a= $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1500 & 1000 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; b = $\begin{bmatrix} 70 \\ 80.000 \\ 18 \end{bmatrix}$; x = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

O modelo XPRESS para este exemplo é apresentado na figura 3.2.

Onde:

LET $\Rightarrow$ Define símbolos que podem ser usados depois no modelo. Aqui estamos definindo o número de variáveis (n) e o número de restrições do tipo $\leq$ (m).

VARIABLES ⇒ Define variáveis de decisão a serem usadas na especificação modelo. Para o nosso exemplo temos apenas a variável de decisão x e entre parêntesis é definido o número de variáveis a serem utilizadas, neste caso, n.

TABLES ⇒ Define as tabelas de dados a serem usadas no modelo. No nosso exemplo usaremos três tabelas de dados: a representando a matriz com o coeficiente das restrições, b representando o vetor com os termos independentes relativos às restrições e c representando o vetor de custos da função objetivo.

BOUNDS ⇒ Aqui são especificados os valores pelos quais as variáveis são limitados inferiormente ou superiormente, e também o tipo de variável a ser utilizado (**.UI.** → inteiras; **.BV.** → binária; **.FR.** → variáveis livres). No nosso exemplo, estamos especificando que as variáveis x_1 e x_2 são variáveis inteiras ($x(i = 1 : n)$ .UI.).

DATA ⇒ Usado para ler, dentro do próprio modelo, valores que serão usados nas tabelas de dados. No nosso exemplo, estamos lendo os valores para as tabelas de dados já especificadas anteriormente (a, b e c). Para a matriz a especificamos entre parêntesis o número da linha e depois o número da primeira coluna, a partir da qual serão atribuídos os dados. Ex.: a(1,1)=3,2 → $a_{11} = 3$ e $a_{12} = 2$.

CONSTRAINTS ⇒ Define a função objetivo e as restrições que agem nas variáveis de decisão do modelo. A função objetivo deve ser especificada com o símbolo **$** no final, indicando que aquela especificação é a função objetivo. Para o nosso exemplo temos:

RESTR(i=1:m) : SUM (j=1:n) a(i,j)*x(j) <= b(i)

A especificação das restrições é feita na forma de somatório, onde a matriz com os coeficientes das restrições é multiplicada pelas variáveis de decisão. É importante observar que cada restrição recebe um nome. No exemplo considerado o nome da 1^a restrição é restr(1) e o da 2^a, restr(2).

O mesmo acontece com a função objetivo, só que a multiplicação é do vetor de custos pelas variáveis de decisão, como é mostrado abaixo:

fo: SUM (j=1:n) c(j)*x(j) $

END ⇒ Indica que as especificações do modelo estão completas.

Observação: Para fazer comentários no Visual XPRESS digite **!** e logo após o comentário.

Depois de digitado o modelo devemos informar ao Visual XPRESS se o problema é de maximização ou de minimização. O Visual XPRESS considera o problema de minimização como padrão. Caso o problema seja de maximização devemos proceder da seguinte maneira:

1. Clique no menu OPTIONS e depois em OPTIMISER, aparecerá uma janela como a mostrada na figura 3.3.

2. Clique com o mouse no campo ressaltado na figura 3.3 para mudar de minimização para maximização e vice-versa.

3. Clique no botão OK para fechar a janela.

Após informado qual é o tipo do problema, vamos agora executar o modelo. Para executá-lo o modelo devemos levar em conta com quais tipos de variáveis estamos trabalhando. Caso haja pelo menos uma variável do tipo inteiro ou binário, devemos clicar em RUN e depois SOLVE GLOBAL para indicar que estamos resolvendo um problema de programação inteira mista. Caso contrário devemos clicar em RUN e depois SOLVE LP, isto é, estamos assumindo que todas as variáveis são contínuas. Depois de solucionado o problema é apresentado uma janela como a mostrada na figura 3.4. Clique no botão OK para fechar a janela.

Após executar o modelo, para visualizarmos o resultado do problema devemos clicar em RUN e depois em VIEW RESULTS. Assim poderemos visualizar a melhor solução obtida para o problema, como mostra a figura 3.5.

Para visualizar o resultado clique duas vezes sobre o campo que se deseja verificar o resultado, na figura 3.6, por exemplo, estamos visualizando os valores para a variável de decisão x_i.

Nos campos SHADOW PRICE e REDUCED COST são informados, respectivamente, os valores duais das restrições e os custos reduzidos das variáveis, isto é, os valores que devem ser abatidos (ou acrescidos) aos custos das variáveis de forma a torná-las atrativas.

3.2.2 O Problema do Sítio

Um sitiante está planejando sua estratégia de plantio para o próximo ano. Por informações obtidas nos órgãos governamentais, sabe que as culturas de trigo, arroz e milho serão as mais rentáveis na próxima safra. Por experiência, sabe que a produtividade de sua terra para as culturas desejadas é a constante na tabela a seguir:

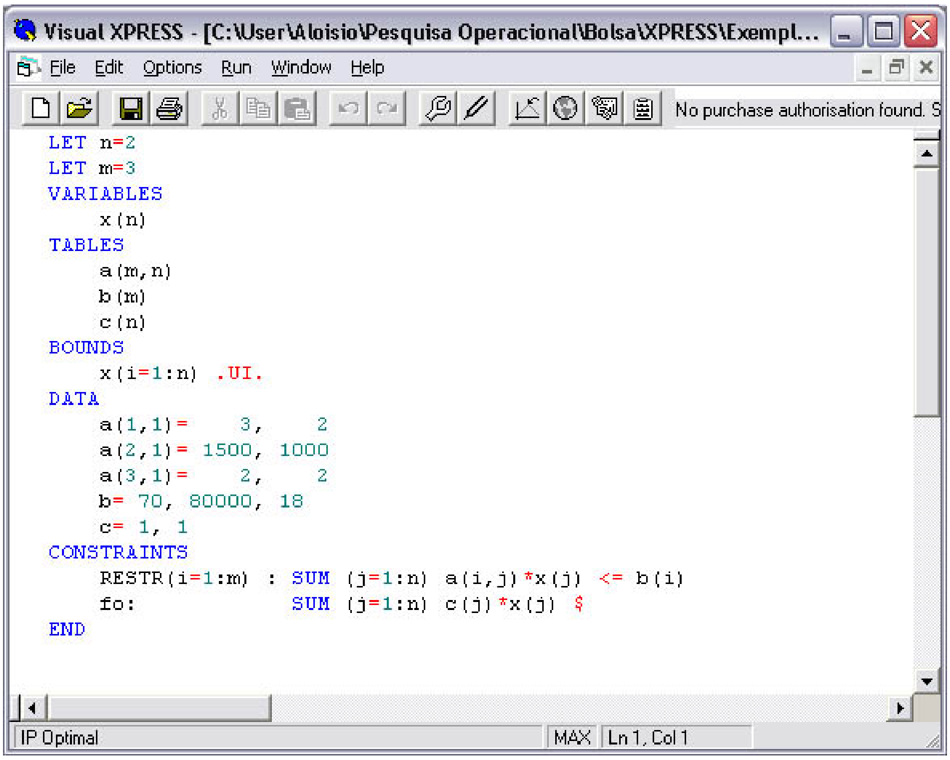


Figura 3.2: Modelo XPRESS para o exemplo da seção 3.2.1

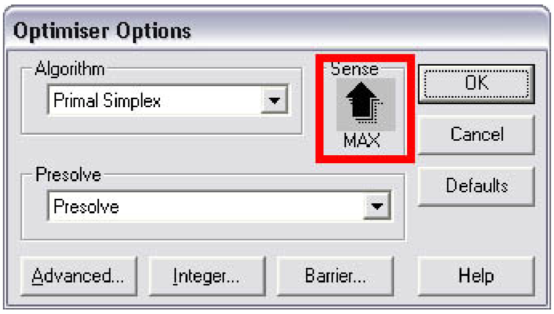


Figura 3.3: Janela de definição do tipo de problema

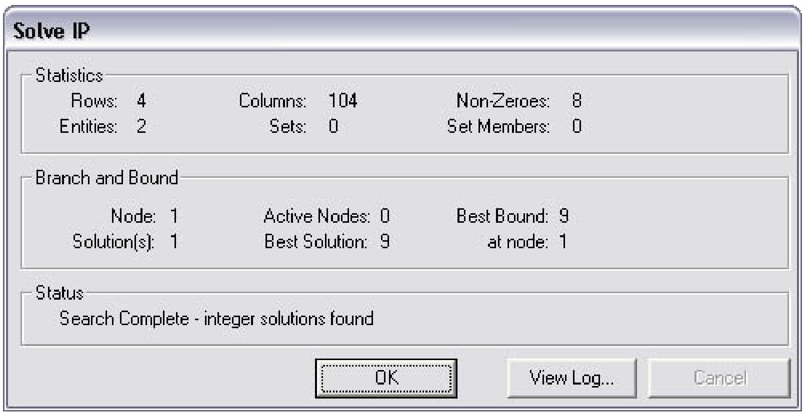


Figura 3.4: Janela com a solução do problema

Cultura	Produtividade em kg por m^2 (experiência)	Lucro por kg de Produção (Informações do Governo)
Trigo	0,2	10,80 centavos
Arroz	0,3	4,20 centavos
Milho	0,4	2,03 centavos

Por falta de um local de armazenamento próprio, a produção máxima, em toneladas, está limitada a 60. A área cultivável do sítio é de $200.000m^2$. Para atender as demandas de seu próprio sítio, é imperativo que se plante $400m^2$ de trigo, $800m^2$ de arroz e $10.000m^2$ de milho.

O modelo de decisão para este problema é apresentado a seguir:

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & 2,16x_T & + & 1,26x_A & + & 0,812x_M & & \\
\text{s.a} & x_T & & & & & \geq & 400 \\
 & & & x_A & & & \geq & 800 \\
 & & & & & x_M & \geq & 10.000 \\
 & x_T & + & x_A & + & x_M & \leq & 200.000 \\
 & 0,2x_T & + & 0,3x_A & + & 0,4x_M & \leq & 10.000 \\
 & x_T & , & x_A & , & x_M & \geq & 0
\end{array}
$$

Onde x_i é a quantidade de unidades de área a serem plantadas na cultura do tipo $i =$ (T-trigo, A-arroz e M-milho).

Os coeficientes da função objetivo deverão ser calculados multiplicando-se a produtividade por quilo pelo lucro previsto para cada quilo. O resultado do coeficiente será uma unidade monetária, no caso, o centavo.

Outra forma de representar este PPL é:

$$
\begin{array}{ll}
\max & \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \\
\text{s.a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j \leq b_i \ \forall i = 1,2 \\
 & x_1 \geq 400 \\
 & x_2 \geq 800 \\
 & x_3 \geq 10.000 \\
 & x_j \geq 0 \ , \forall j = 1,2,3
\end{array}
$$

Observação: Vamos considerar para este exemplo que $x_1 = x_T$, $x_2 = x_A$ e $x_3 = x_M$.

Onde:

n=3; c=$\begin{bmatrix} 2,16 & 1,26 & 0,812 \end{bmatrix}$; a=$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}$; b=$\begin{bmatrix} 200.000 \\ 10.000 \end{bmatrix}$; x=$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

O modelo XPRESS para este exemplo é apresentado na figura 3.7.

As diferenças deste exemplo para o exemplo anterior são:

1. O campo BOUNDS contém os valores nas quais as variáveis x_1, x_2 e x_3 são limitadas inferiormente. Note que entre parêntesis está o índice da variável.

2. A matriz de restrições a é lida em um arquivo chamado "a.dat", já digitado anteriormente contendo os valores desta matriz. Ele é lido pelo comando DISKDATA (ler tabela de dados

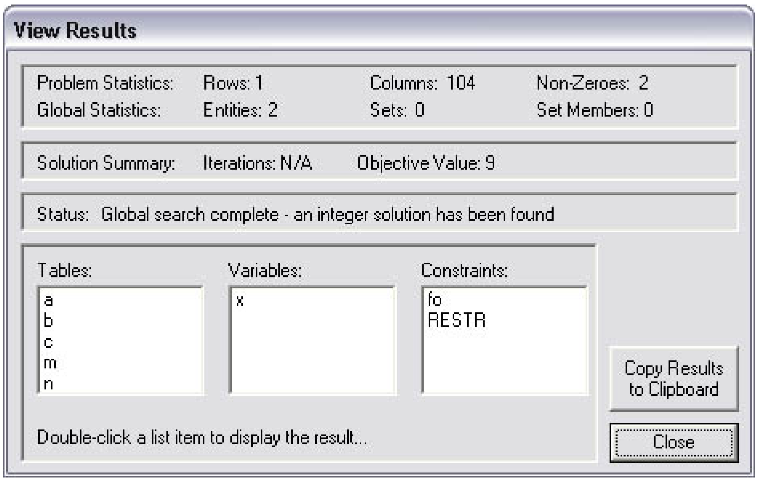


Figura 3.5: Janela mostrando a melhor solução do problema

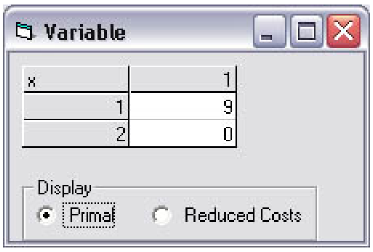


Figura 3.6: Janela com os valores para a variável de decisão x_i

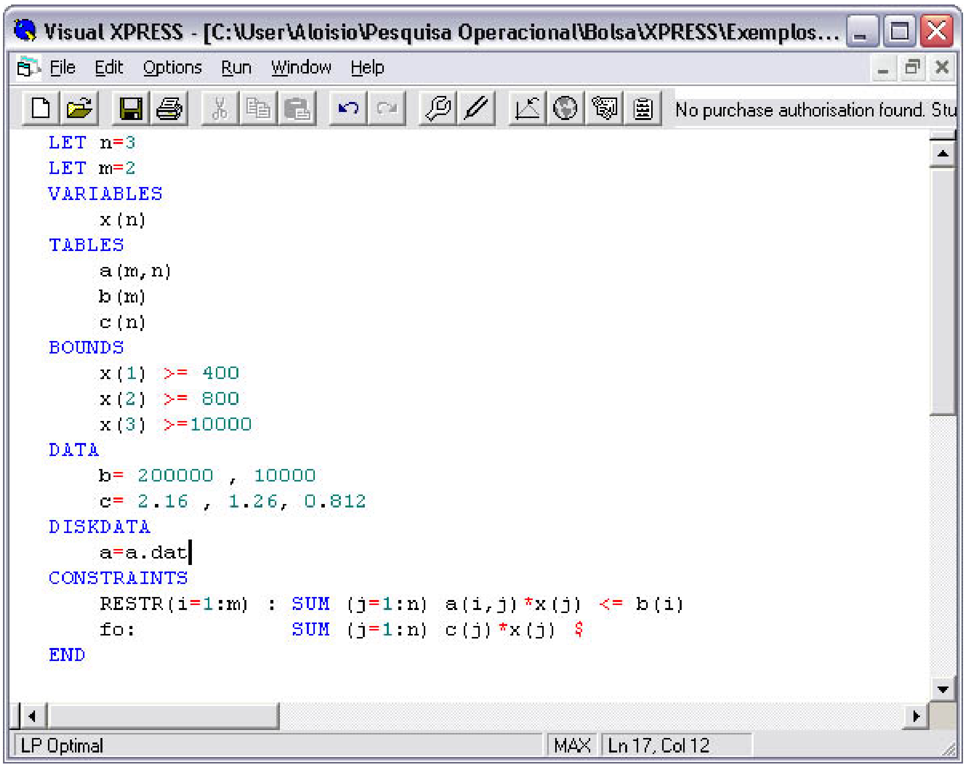


Figura 3.7: Modelo XPRESS para o exemplo da seção 3.2.2

armazenadas em arquivos no formato texto) e não pelo comando DATA como foi visto no exemplo anterior.

NOTA: Se o arquivo de dados a ser lido não está armazenado no mesmo diretório (pasta) do modelo do XPRESS além do nome do arquivo deve ser informado também o caminho indicando em que local do computador ele se encontra. Ex.: a=a:\a.dat (arquivo armazenado no disquete) ou c:\Teste\a.dat (arquivo armazenado no diretório teste no computador).

O arquivo que contém a matriz de restrições deve ser igual ao mostrado na figura 3.8, ele pode ser digitado em qualquer processador de texto simples, como o Bloco de Notas (NotePad) do Windows, no formato texto.

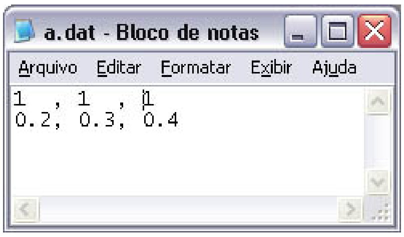


Figura 3.8: Arquivo contendo a matriz de restrições

Para executar o modelo e visualizar o resultado, proceda como foi descrito no exemplo da seção 3.2.1.

3.2.3 STAFF SCHEDULING (Escala de Funcionários)

Uma empresa necessita da segunite quantidade mínima de funcionários por dia:

Dia	**SEG**	**TER**	**QUA**	**QUI**	**SEX**	**SAB**	**DOM**
Funcionários Requeridos	20	20	13	10	12	16	18

Cada funcionário trabalha 5 dias consecutivos e tem 2 dias de folga e pode começar em qualquer dia da semana.

Cada funcionário recebe \$300,00 por semana. Se trabalhar aos sábados recebe em extra de \$25,00 e se for aos domingos um extra de \$35,00.

Faça uma escala de funcionários de forma a minimizar o gasto com pessoal.

O modelo de decisão para este problema é apresentado a seguir:

Onde x_i é a quantidade de funcionários necessários para iniciar o trabalho no dia i = (1=DOM; 2=SEG; 3=TER; 4=QUA; 5=QUI; 6=SEX; 7=SAB).

$$
\begin{array}{llllllllll}
\min & 335x_1 & +300x_2 & +325x_3 & +360x_4 & +360x_5 & +360x_6 & +360x_7 & & \\
\text{s.a} & x_1 & & & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq & 20 \\
 & x_1 & +x_2 & & & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq & 20 \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & +x_6 & +x_7 & \geq & 13 \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & & +x_7 & \geq & 10 \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & & & \geq & 12 \\
 & & x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & & \geq & 11 \\
 & & & x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq & 18 \\
 & x_1\ , & x_2\ , & x_3\ , & x_4\ , & x_5\ , & x_6\ , & x_7 & \geq & 0 \\
 & x_j \in \mathcal{Z}^+ & & & & & & & &
\end{array}
$$

Outra forma de representar este PPL é:

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \\
\text{s.a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j \geq b_i \ \forall i = 1, \ldots, m \\
 & x_j \geq 0 \ , \forall j = 1, 2, ..., 7 \text{ e } x_j \in \mathcal{Z}^+
\end{array}
$$

Onde:

n=7; m=7; c= $\begin{bmatrix} 335 & 300 & 325 & 360 & 360 & 360 & 360 \end{bmatrix}$;

a= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; b= $\begin{bmatrix} 20 & 20 & 13 & 10 & 12 & 16 & 18 \end{bmatrix}^t$;

x= $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{bmatrix}^t$.

O modelo XPRESS para este exemplo é apresentado na figura 3.9.

Neste exemplo todas as tabelas de dados são lidas através de arquivos armazenados no computador, inclusive os parâmetros que definem as dimensões do problema.

O arquivo contendo a matriz de restrições pode ser digitada como foi mostrada no exemplo anterior. O vetor de termos independentes das restrições (b) e o vetor de custos (c) deve ser digitado como mostra a figura 3.10, utilizando o Bloco de Notas ou outro processador de textos ASCII.

3.2.4 O Problema de Escalonamento de Motoristas

Um gerente de uma empresa de transporte urbano deseja determinar o escalonamento de seus motoristas. Para isto ele divide o dia em 6 períodos de 4 horas. Cada motorista trabalha no máximo 8 horas. A tabela a seguir mostra o número mínimo de motoristas que devem estar presentes em cada horário.

Horário	**23-3**	**3-7**	**7-11**	**11-15**	**15-19**	**19-23**
Motoristas	15	30	26	32	30	19
Custos	120	110	100	100	100	110

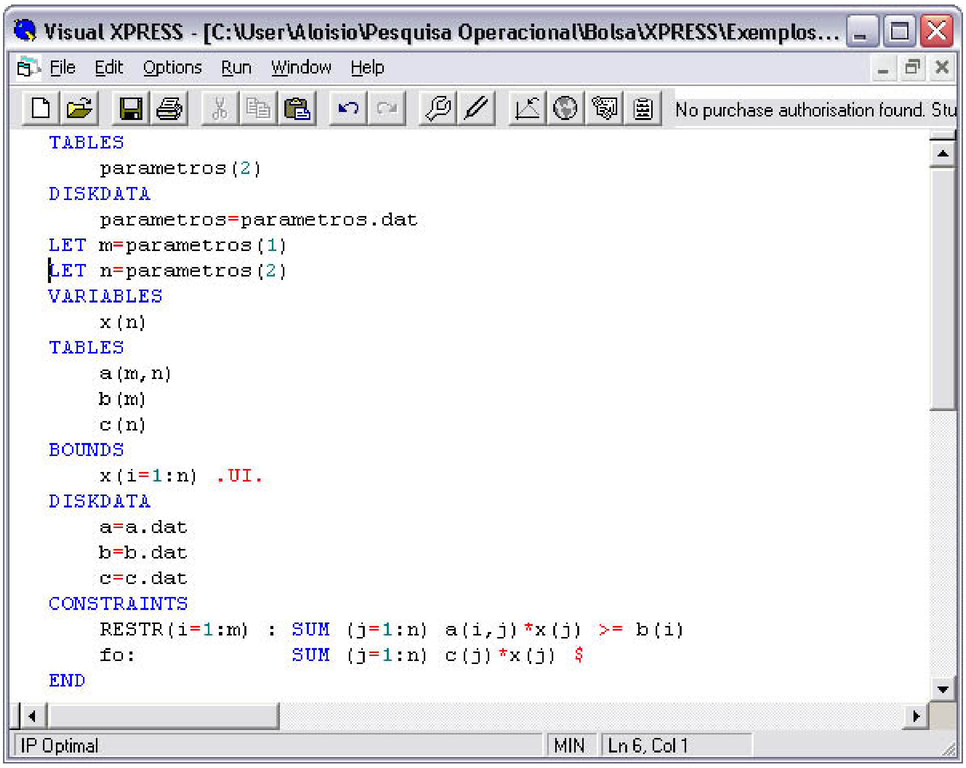


Figura 3.9: Modelo XPRESS para o exemplo da seção 3.2.3

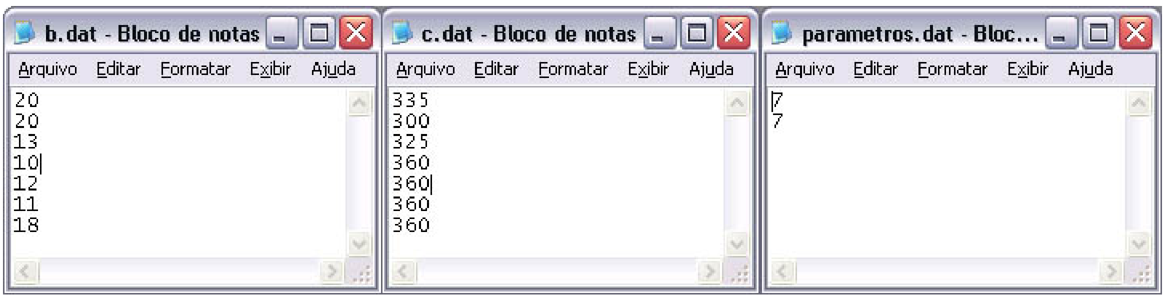


Figura 3.10: Arquivos contendo o vetor de restrições(b) e o vetor de custos(c) e os parâmteros

Como o gerente deve escalar os motoristas, minimizando os custos?

O modelo de decisão para este problema é apresentado a seguir, onde x_i é a quantidade de motoristas necessários para iniciar o trabalho no horário i = (23, 3, 7, 11, 15, 19).

$$
\begin{array}{lcccccccc}
\min & 120x_{23} & +\ 110x_3 & +\ 100x_7 & +\ 100x_{11} & +\ 100x_{15} & +\ 110x_{19} & & \\
\text{s.a} & x_{23} & & & & & +\ x_{19} & \geq & 15 \\
 & x_{23} & +\ x_3 & & & & & \geq & 30 \\
 & & x_3 & +\ x_7 & & & & \geq & 26 \\
 & & & x_7 & +\ x_{11} & & & \geq & 32 \\
 & & & & x_{11} & +\ x_{15} & & \geq & 30 \\
 & & & & & x_{15} & +\ x_{19} & \geq & 19 \\
 & x_{23}\ , & x_3\ , & x_7\ , & x_{11}\ , & x_{15}\ , & x_{19} & \geq & 0 \\
 & x_j \in \mathcal{Z}^+ & & & & & & &
\end{array}
$$

Consideraremos para este exemplo que: $x_{23} = x_1$, $x_3 = x_2$, $x_7 = x_3$, $x_{11} = x_4$, $x_{15} = x_5$ e $x_{19} = x_6$.

Outra forma de representar este PPL é:

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \\
\text{s.a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j \geq b_i \ \forall i = 1, \ldots, m \\
 & x_j \geq 0\ ,\ \forall j = 1, 2, ..., 6 \text{ e } x_j \in \mathcal{Z}^+
\end{array}
$$

Onde:

n=6; m=6; c= $\begin{bmatrix} 120 & 110 & 100 & 100 & 100 & 110 \end{bmatrix}$;

a= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

b= $\begin{bmatrix} 15 & 30 & 26 & 32 & 30 & 19 \end{bmatrix}^t$; x= $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}^t$.

O modelo XPRESS para este exemplo é apresentado na figura 3.11.

Neste exemplo a matriz de restrição é uma matriz esparsa, ou seja, muitos de seu valores são iguais a zero. O Visual XPRESS permite ler este formato de dados de uma maneira muito simples através do comando **DISKDATA -s**. O arquivo a ser lido deve ser colocado no formato mostrado na figura 3.12. O 1^o índice deve representar o número da linha i, o 2^o o número da coluna j e o 3^o o valor a_{ij}.

3.2.5 O Problema da Mochila

Dado n objetos, cada qual com um peso w_i e importância p_i, alocá-los em uma mochila de capacidade b maximizando a importância dos objetos colocados. Assumi-se que há apenas uma unidade de cada objeto.

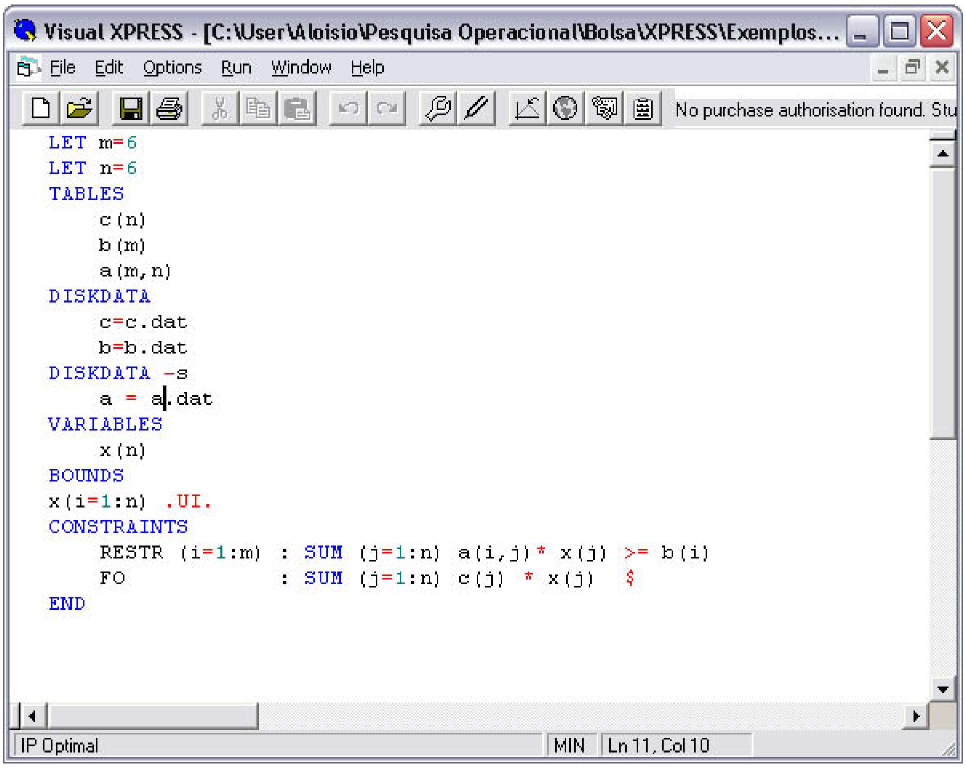


Figura 3.11: Modelo XPRESS para o exemplo da seção 3.2.4

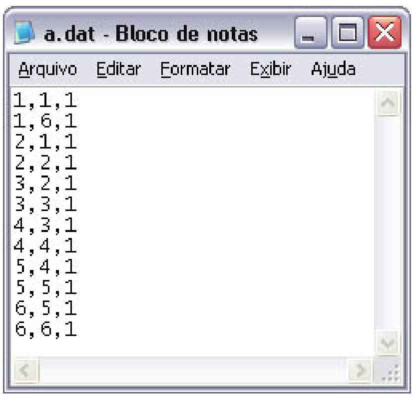


Figura 3.12: Arquivo contendo a matriz esparsa usada no exemplo da seção 3.2.4

A modelagem deste PPL é apresentado a seguir:

Seja $x_i = \begin{cases} 1; & \text{se o objeto i é alocado na mochila,} \\ 0; & \text{caso contrário.} \end{cases}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^{n} p_i * x_i \\ \text{s.a} & \sum_{i=1}^{n} w_i * x_i \leq b \\ & x_j \in \{0,1\}\ \forall\ i = 1, ..., n \end{array}}$$

Para este problema da mochila vamos considerar a seguinte tabela de dados:

Objeto(x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Peso (w_i) **(em kg)**	2	3	3	2	4	5	2	2	3	3
Importância (p_i)	1	1	4	2	3	4	1	2	5	4

Capacidade da mochila (b) = 20 kg

O modelo XPRESS para este exemplo é apresentado na figura 3.13.

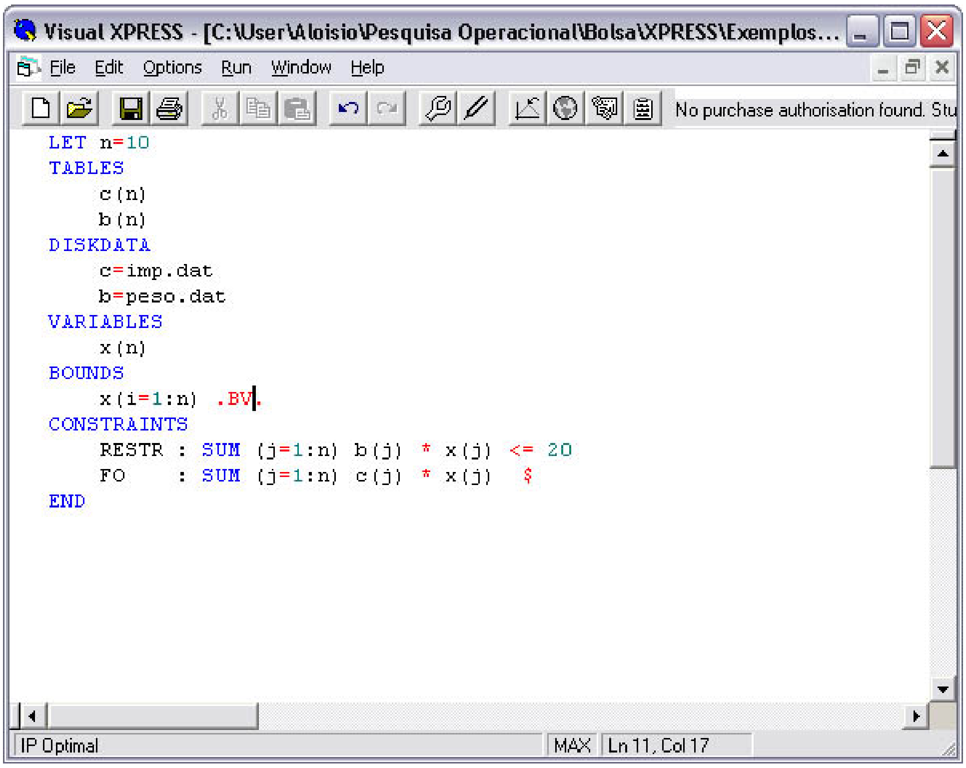


Figura 3.13: Modelo XPRESS para o exemplo da seção 3.2.5

Uma diferença deste problema para os anteriores é que aqui estamos trabalhando com variáveis binárias. Para informar este fato ao Visual XPRESS basta introduzir a seção BOUNDS com o comando x(i=1:n).BV. onde .BV. significa "Binary Value".

3.2.6 Problema da Liga de Ferro

Uma liga especial constituída de ferro, carvão, silício e níquel pode ser obtida usando a mistura desses minerais puros além de 2 tipos de materiais recuperados:

Material Recuperado 1(MR1): Composição: 60% de ferro, 20% de carvão e 20% de silício. Custo por Kg: $0,20.

Material Recuperado 2(MR2): Composição: 70% de ferro, 20% de carvão 5% de silício e 5% de níquel. Custo por Kg: $0,25.

A liga deve ter a seguinte composição final:

Matéria Prima	**% Mínima**	**% Máxima**
Ferro	60	65
Carvão	15	20
Silício	15	20
Níquel	5	8

O custo dos materiais puros são (por Kg): ferro: $0,30; carvão: $0,20; silício: $0,28; níquel: $0,50. Deseja-se produzir 1000 Kg desta liga. Qual deve ser a composição da mistura em termos dos materiais disponíveis, com menor custo por Kg?

O modelo de decisão para este problema é apresentado a seguir:

onde x_i é a quantidade de material i $= \begin{cases} 1 = & \text{ferro} \\ 2 = & \text{carvão} \\ 3 = & \text{silício} \\ 4 = & \text{níquel} \\ 5 = & \text{MR1} \\ 6 = & \text{MR2} \end{cases}$ em Kg a ser utilizado na mistura.

$$
\begin{array}{lrrrrrrcr}
\text{min} & 0,30x_1 & +\,0,20x_2 & +\,0,28x_3 & +\,0,50x_4 & +\,0,20x_5 & +\,0,25x_6 & & \\
\text{s.a} & 0,40x_1 & -\,0,60x_2 & -\,0,60x_3 & -\,0,60x_4 & & +\,0,10x_6 & \geq & 0 \\
 & 0,35x_1 & -\,0,60x_2 & -\,0,65x_3 & -\,0,65x_4 & -\,0,05x_5 & +\,0,05x_6 & \leq & 0 \\
 & -0,15x_1 & +\,0,85x_2 & -\,0,15x_3 & -\,0,15x_4 & +\,0,05x_5 & +\,0,05x_6 & \geq & 0 \\
 & -0,20x_1 & +\,0,80x_2 & -\,0,20x_3 & -\,0,20x_4 & & & \leq & 0 \\
 & -0,15x_1 & -\,0,15x_2 & +\,0,85x_3 & -\,0,15x_4 & +\,0,05x_5 & -\,0,10x_6 & \geq & 0 \\
 & -0,20x_1 & -\,0,20x_2 & +\,0,80x_3 & -\,0,20x_4 & & -\,0,15x_6 & \leq & 0 \\
 & -0,05x_1 & -\,0,05x_2 & -\,0,05x_3 & +\,0,95x_4 & -\,0,05x_5 & & \geq & 0 \\
 & -0,08x_1 & -\,0,08x_2 & -\,0,08x_3 & +\,0,92x_4 & -\,0,08x_5 & -\,0,03x_6 & \leq & 0 \\
 & x_1 & +\,x_2 & +\,x_3 & +\,x_4 & +\,x_5 & +\,x_6 & = & 1000 \\
 & x_1\ , & x_2\ , & x_3\ , & x_4\ , & x_5\ , & x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

Outra forma de representar este PPL é:

$$
\begin{array}{|ll|}
\hline
\min & \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \\
\text{s.a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j \geq 0 \ \forall i = 1, \ldots, m1 \\
& \sum_{j=1}^{n} b_{ij} * x_j \leq 0 \ \forall i = 1, \ldots, m2 \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1000 \\
& x_j \geq 0 \ , \forall j = 1, \ldots, 6 \\
\hline
\end{array}
$$

Onde:

n=6; m1=4; m2=4; c=$\begin{bmatrix} 0,30 & 0,20 & 0,28 & 0,50 & 0,20 & 0,25 \end{bmatrix}$;
a=$\begin{bmatrix} 0,40 & -0,60 & -0,60 & -0,60 & 0 & 0,10 \\ -0,15 & 0,85 & -0,15 & -0,15 & 0,05 & 0,05 \\ -0,15 & -0,15 & 0,85 & -0,15 & 0,05 & -0,10 \\ -0,05 & -0,05 & -0,05 & 0,95 & -0,05 & 0 \end{bmatrix}$;
b=$\begin{bmatrix} 0.35 & -0.60 & -0.65 & -0.65 & -0.05 & 0.05 \\ -0.20 & 0.80 & -0.20 & -0.20 & 0 & 0 \\ -0.20 & -0.20 & 0.80 & -0.20 & 0 & -0.15 \\ -0.08 & -0.08 & -0.08 & 0.92 & -0.08 & -0.03 \end{bmatrix}$;
x=$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}^t$.

Neste exemplo, informamos três parâmetros. O primeiro (n) informa o número de variáveis, o segundo(m1) o número de restrições do tipo $\geq$ e o terceiro(m2) o número de restrições do tipo $\leq$. O restante é idêntico aos demais problemas.

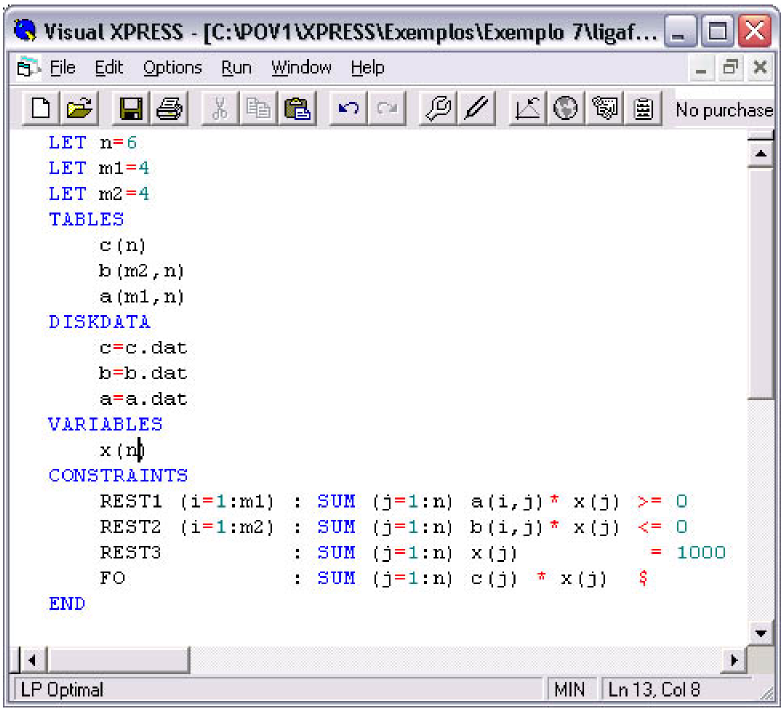


Figura 3.14: Modelo XPRESS para o exemplo da seção 3.2.6

Capítulo 4

LINGO

4.1 O que é o LINGO?

O LINGO é uma ferramenta simples para utilizar o poder da otimização linear ou não-linear para formular problemas grandes concisamente, resolvê-los e analisar a solução.

Neste curso aprenderemos algumas noções básicas de utilização deste poderoso software, trabalheremos com modelos simples e modelos comlexos, onde a leitura dos dados poderá ser feita diretamente no LINGO ou num arquivo do bloco de notas e até mesmo em uma planilha do Excel.

4.2 Exemplos de como Modelar usando o LINGO

Para familiarizarmos com o uso do LINGO utilizaremos uma série de exemplos para a fixação de seus principais comandos.

4.2.1 Problema da Otimização de Padrões de Produção

Uma determinada fábrica produz panelas de metal médias e grandes a partir de elementos circulares de diâmetros circulares de diâmetros de 0,25 e 0,40 metros, respectivamente. A primeira operação para obter as panelas é um corte desses elementos circulares sobre chapas de dimensão de 1,40 x 0,50 metros. Os elementos planos circulares são transformados em panelas em uma segunda operação de estamparia. Para o corte existem quatro tipo de matrizes conforme mostra a figura 4.1. A fábrica deseja uma produção diária mínima de 500 panelas médias (obtidas do elemento circular 0,25) e 350 grandes (obtidas do elemento circular de diâmetro 0,40). Os custos em reais por chapa pelo uso de cada matriz de corte são respectivamente: 1,2,3,2. Elaborar o modelo de Programação Linear que planeje a produção de modo a minimizar o custo com o uso de chapas.

Seja x_i a quantidade de chapas cortadas de acordo com a matriz, $i = 1, \ldots, 4$ a serem utilizadas na produção.

O modelo de decisão do problema é dado a seguir.

$$\boxed{\begin{array}{lccccccccc}
\text{min} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & \\
\text{s.a} & 8x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & & \geq & 500 \\
 & & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \geq & 350 \\
 & \multicolumn{9}{l}{x_i \geq 0,\ \forall i{=}1,\ldots,4 \text{ e } x_j \in \mathcal{Z}^+}
\end{array}}$$

Outra forma de representar o modelo de decisão deste problema é:

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\text{min} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \\
\text{s.a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j \geq b_i \ \forall i = 1,2 \\
 & x_j \geq 0 \ ,\ \forall j = 1,\ldots,4 \text{ e } x_j \in \mathcal{Z}^+
\end{array}}$$

onde: n=4; c= $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$; a= $\begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; b= $\begin{bmatrix} 500 \\ 350 \end{bmatrix}$ e x= $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$.

Para este exemplo, usaremos uma modelagem simples, parecida muito com a modelagem utilizada pelo LINDO.

Primeiramente devemos abrir o LINGO, depois de aberto o LINGO mostrará uma tela em branco, parecida com o da figura 4.2 onde será digitado o modelo.

Um modelo LINGO é muito parecido com o LINDO, conforme podemos observar através da figura 4.3.

Aqui neste modelo estamos declarando a Função-Objetivo (FO) a qual deve ser minimizada, daí o comando MIN. Caso este PPL fosse de maximização o comando a acompanhar a FO deveria ser o comando MAX. Nas duas linhas abaixo estão sendo declaradas as restrições do problema. Note que no final de cada comando devemos colocar ";". Não há necessidade de digitar END ao final do modelo. As quatro últimas linhas estão informando ao LINGO que as variáveis são do tipo inteiro, o que é feito através do comando @GIN(nome da variável). Os tipos de variáveis que podem ser usadas com o LINGO são apresentadas na tabela a seguir. Vale lembrar que os nomes das variáveis têm que ser iniciados por letras e podem ser seguidos por qualquer caracter alfanumérico.

Observação:

1. Caso queira fazer algum comentário basta digitar "!"seguido do comentário.

2. Você pode dar nome às linhas das restrições, para isto, basta digitar o nome da restrição entre colchetes. Ex.: [Rest1]

Tabela de tipos de variáveis do LINGO

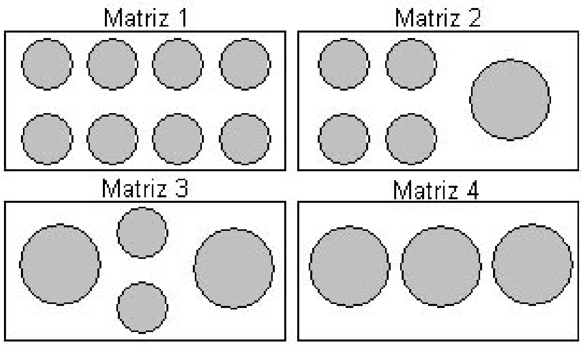


Figura 4.1: Padrões de Corte para o exemplo da seção 4.2.1

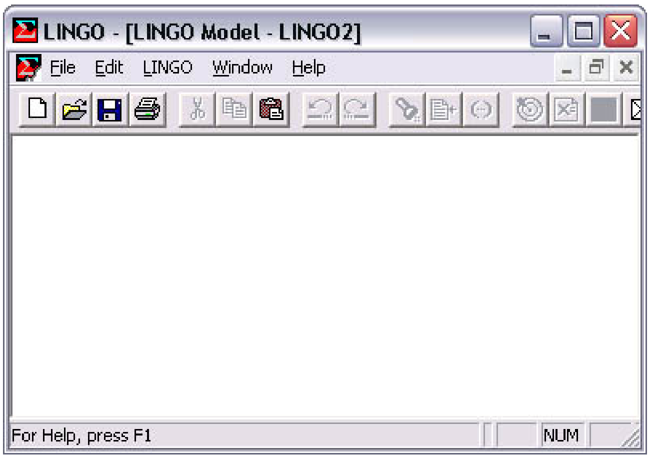


Figura 4.2: Tela Inicial do LINGO

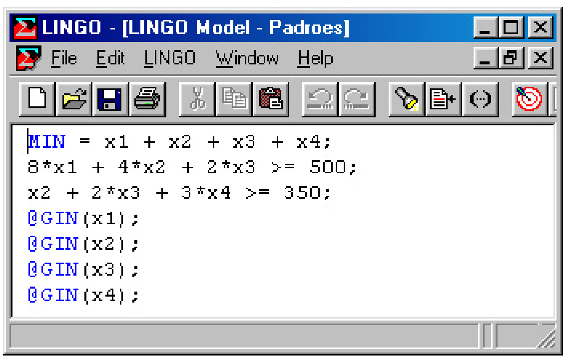


Figura 4.3: Modelo LINGO para o exemplo da seção 4.2.1

COMANDO	EXPLICAÇÃO
@GIN(VAR)	usado para designar variáveis inteiras
@BIN(VAR)	usado para designar variáveis binárias
@FREE(VAR)	usado para designar que a variável é livre
@BND(LI,VAR,LS)	usado para designar os valores pelos quais a variável VAR é limitada inferiormente e superiormente. Aqui temos que LI é valor mínimo da variável e LS é o valor máximo, ou seja, LI $\leq$ VAR $\leq$ LS.

No nosso exemplo todas as variáveis são inteiras, daí a necessidades da inclusão das últimas quatro linhas ao modelo. Agora só falta resolvê-lo, para isto basta clicar no menu *"LINGO"* e logo em seguida em *"SOLVE"*, ou simplesmente clique no botão *"SOLVE"* na barra de ferramentas. Se tudo estiver digitado corretamente aparecerá uma janela como a mostrada na figura 4.4.

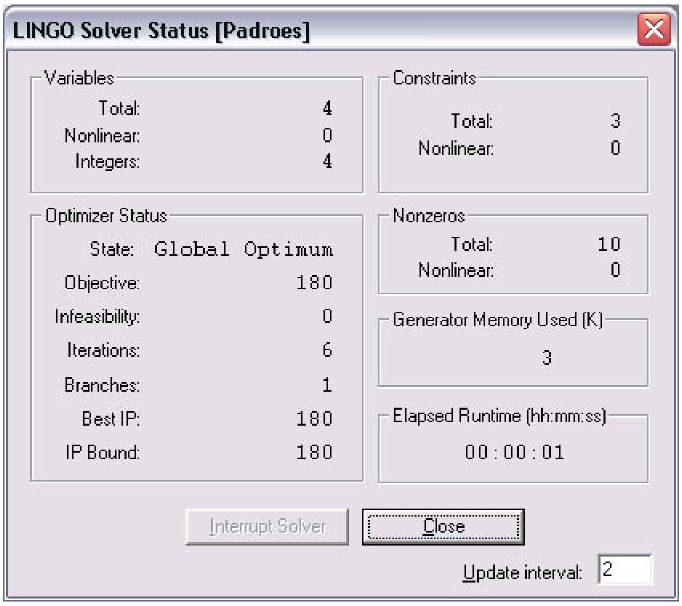


Figura 4.4: Janela de Resultados do LINGO

Clique no botão *"CLOSE"* para fechar esta janela, aparecerá na tela uma janela com os resultados do problema obtidos pelo LINGO, conforme pode ser observado na figura 4.5.

Em um relatório de solução do LINGO você encontrará uma parte denominada REDUCED COST (custo reduzido) para cada variável do problema. Ela pode ser interpretada da seguinte maneira:

O custo reduzido de uma variável do tipo real pode ser interpretado como a quantia de penalidade (positiva ou negativa, dependendo do problema) que você teria que pagar para introduzir uma unidade daquela variável na solução. No nosso exemplo, a variável x2 (caso ela fosse do tipo real) teria como custo reduzido 1, significando que se diminuirmos uma unidade do coeficiente da variável na FO, seu uso se tornaria interessante.

Já a coluna SLACK or SURPLUS, indica o excesso em restrições do tipo $\geq$ ou a folga em restrições do tipo $\leq$. No nosso exemplo podemos observar que temos uma folga de 4 unidades na 1^a restrição e 1 unidade na 2^a restrição.

A coluna DUAL PRICE pode ser interpretada como a quantia pela qual a função objetivo FO melhoraria (pioraria) quando o lado direito das restrições (constantes) é aumentado (diminuído) em uma unidade. Ele também pode ser entendido como o que estamos dispostos a pagar por unidades adicionais de um recurso. Por isto ele também é chamado de SHADOW PRICE. Essas informações, no entanto, só tem sentido se as variáveis envolvidas no modelo forem do tipo real e essa análise tem validade apenas em um certo intervalo de variação das restrições (vide final da seção 4.2.3 sobre como proceder para fazer esta análise).

4.2.2 Problema da Agência de Propaganda

Uma agência de propaganda planeja uma campanha de publicidade em três meios de comunicação: televisão, rádio e revistas. O propósito da propaganda é de alcançar tantos "fregueses em potencial"quanto possível. Os resultados de um estudo de mercado estão no quadro a seguir:

Meios de Comunicação \ Itens	**TV**		**Rádio**	**Revistas**
	Horário Comum	**Horário Nobre**		
Custo de uma unidade de propaganda	40.000	75.000	30.000	15.000
n^o de fregueses em potencial alcnçados por unidade de propaganda	400.000	900.000	500.000	200.000
n^o de fregueses do sexo feminino alcançados por unidade de propaganda	300.000	400.000	200.000	100.000

A empresa que encomendou a campanha não quer gastar mais que \$800.000 com propaganda. Além disso, requer:

a) que pelo menos 2 milhões de pessoas alcançadas sejam do sexo feminino;

b) que a propaganda vinculada pela TV seja limitada a um custo de \$500.000;

c) que pelo menos 3 unidades de propaganda sejam vinculadas no horário comum e pelo menos 2 durante horário nobre;

d) que o número de unidades de propaganda no rádio e na revista fique individualmente entre 5 e 10.

A modelagem para este PPL é apresentada a seguir:

$$
\boxed{\begin{array}{llllllllll}
\max & 400.000x_1 & + & 900.000x_2 & + & 500.000x_3 & + & 200.000x_4 & & \\
\text{s.a} & 40.000x_1 & + & 75.000x_2 & + & 30.000x_3 & + & 15.000x_4 & \leq & 800.000 \\
 & 300.000x_1 & + & 400.000x_2 & + & 200.000x_3 & + & 100.000x_4 & \geq & 2.000.000 \\
 & 40.000x_1 & + & 75.000x_2 & & & & & \leq & 500.000 \\
 & x_1 \geq 3 & ; & x_2 \geq 2 & ; & 5 \leq x_3 \leq 10 & ; & 5 \leq x_4 \leq 10 & & \\
 & \multicolumn{9}{l}{x_j \geq 0,\ \forall j{=}1,\ldots,4 \text{ e } x_j \in \mathcal{Z}^+}
\end{array}}
$$

Onde $x_j \equiv$ número de unidades de propaganda a serem veiculadas no meio de comunicação j=(1: horário comum na TV; 2: horário nobre na TV; 3: rádio; 4: revista).

Outra forma de representar o modelo de decisão deste problema é:

$$
\boxed{\begin{array}{ll}
\max & \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \\
\text{s.a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j \leq b_i \ \forall i = 1,2 \\
 & \sum_{j=1}^{n} d_j * x_j \geq 2.000.000 \\
 & x_1 \geq 3 \ ; \ x_2 \geq 2 \ ; \ 5 \leq x_3 \leq 10 \ ; \ 5 \leq x_4 \leq 10 \\
 & x_j \geq 0 \ , \ \forall j = 1,\ldots,4 \text{ e } x_j \in \mathcal{Z}^+
\end{array}}
$$

onde: n=4; c= $\begin{bmatrix} 400.000 \\ 900.000 \\ 500.000 \\ 200.000 \end{bmatrix}$; a= $\begin{bmatrix} 40.000 & 75.000 & 30.000 & 15.000 \\ 40.000 & 75.000 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; b= $\begin{bmatrix} 800.000 \\ 500.000 \end{bmatrix}$ d= $\begin{bmatrix} 300.000 \\ 400.000 \\ 200.000 \\ 100.000 \end{bmatrix}$ e x= $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$.

Para modelarmos este PPL no LINGO, usaremos uma forma diferente da proposta no exemplo anterior. Usaremos neste problema o conceito de SETS (grupos de objetos relacionados) que normalmente são utilizados em problemas de grande porte. Em um modelo LINGO, uma seção SETS é definida da seguinte forma:

SETS:

setname [/ member_list /] [: variable_list];

ENDSETS

onde:

setname ⇒ é o nome que você escolhe para designar o grupo de objetos.

[/member_list/] ⇒ lista de membros que constituem o grupo de objetos.

Tabela de exemplos de lista de membros de um grupo de objetos

Lista de Membros na forma implícita	Exemplo	Membros do grupo
1..n	1..5	1, 2, 3, 4, 5
StringM..StringN	TR3..TR204	TR3, TR4,...,TR204
dayM..dayN	MON..FRI	MON,TUE,WED,THU,FRI
monthM..monthN	OCT..JAN	OCT, NOV,DEC,JAN
monthYearM..monthYearN	OCT2001..DEZ2001	OCT2001,NOV2001,DEC2001

[:variable_list] ⇒ lista de variáveis (ou constantes) que tem as mesmas características do grupo de objetos. Quando há mais de uma variável (ou constante), elas devem ser separadas por vírgula.

Observação: os colchetes indicam que essas informações são opcionais.

Exemplo:

v1 / 1..4 /: x, C, D ;

Neste exemplo estamos definindo um grupo de objetos com nome v1, cujos membros são 1, 2, 3 e 4. x, C e D são variáveis (ou constantes) que têm esses membros em seu domínio de definição (x(1),...,x(4),C(1),...,C(4),D(1),...,D(4)).

Um grupo de objetos também pode ser derivado de outros grupos, como é o caso do exemplo abaixo, onde temos o grupo Matriz que depende dos grupos v1 e v2 e A é uma constante (no caso, uma matriz) que tem como domínio o conjunto dos membros dos grupos anteriores(A(1,1), A(1,2),...).

matriz(v2, v1): A;

Observação: Um SET pode ser entendido, fazendo uma analogia com a linguagem PASCAL, como uma estrutura de dados do tipo vetor (SETS simples) ou matriz (SETS derivado), onde cada posição é um membro do grupo de objetos.

Também usaremos os comando @SUM e @FOR, que são utilizados em conjunto com os grupos de objetos definidos na seção SETS. @SUM é utilizado para calcular um somatório e @FOR é um comando de repetição.

Usaremos também a seção DATA para ler os valores das constantes definidas na seção SETS.

Exemplos dos comandos @FOR e @SUM e da seção DATA são mostrados na figura 4.6, onde é apresentado a modelagem LINGO para este PPL.

Vale notar que as variáveis x1 e x2 são limitadas apenas inferiormente. Neste caso, o limite superior é representado por um número arbitrariamente grande, por exemplo, 1E19 (1×10^{19}).

Para resolver o problema procede-se da mesma forma do exemplo da seção 4.2.1.

4.2.3 Problema da Carteira de Investimento

Um investidor possui $18.000 e tem a sua disposição três opções para aplicar seu capital, além de deixá-lo, todo ou em parte, no banco, rendendo 6% ao ano.

ALTERNATIVA 1: Comprar um lote de ações cujo preço unitário é de $4,50 e cuja rentabilidade anual esperada é de 47%.

ALTERNATIVA 2: Comprar letras de câmbio cujo preço unitário é $3,00 e cuja rentabilidade

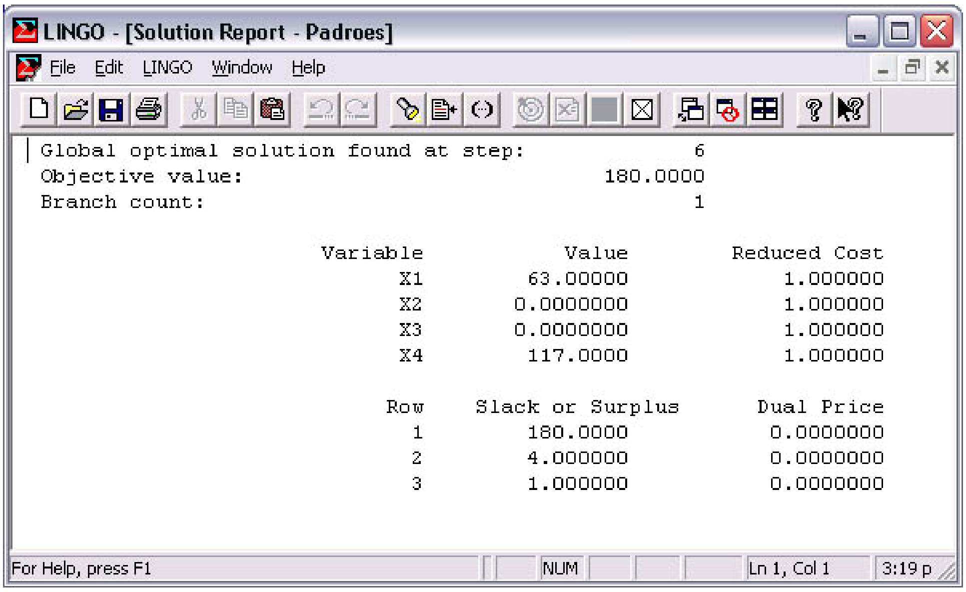


Figura 4.5: Relatório de Solução do LINGO para o Exemplo da seção 4.2.1

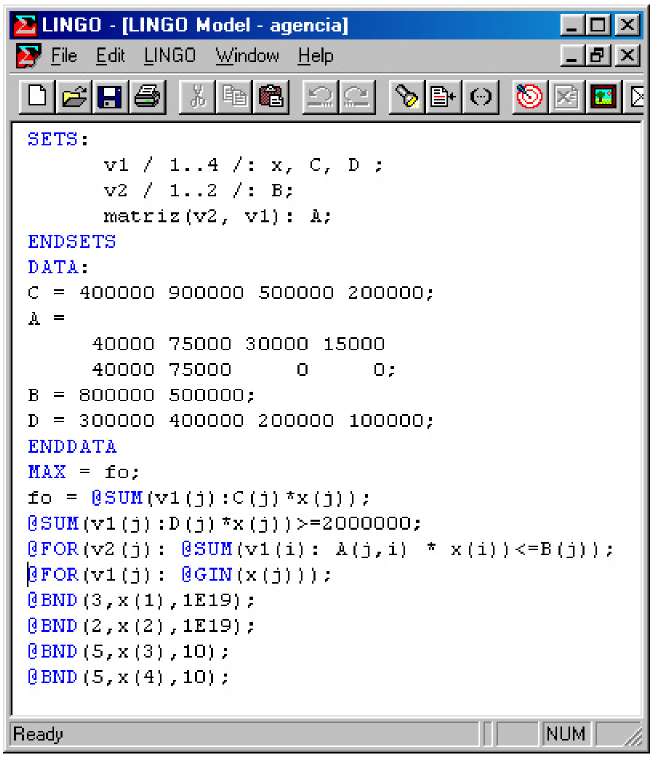


Figura 4.6: Modelo LINGO para o exemplo da seção 4.2.2

anual é de 32%.

ALTERNATIVA 3: Comprar Obrigações do Tesouro, cujo preço unitário é \$1,50 e cuja rentabilidade anual é de 8%.

Supondo que o investidor não desaja adquirir mais do que 1.750 ações e/ou letras de câmbio; que seu corretor só possa conseguir até 1.000 ações e 1.500 letras de câmbio; que o investidor queira - por medida de segurança quanto à liquidez - deixar, pelo menos, \$2.000 no banco; que o investimento feito em obrigações do Tesouro não ultrapasse 1,7 vezes o depósito deixado no banco, que quantidades o investidor deve alocar a cada alternativa, considerando que o seu objetivo é maximizar o seu capital no fim do ano? Formule um modelo de Programação Linear para responder esta pergunta.

A modelagem para este PPL é apresentada a seguir:

$$\begin{array}{|lrcrcrcrcr|}
\hline
\max & 6,62x_1 & + & 3,96x_2 & + & 1,62x_3 & + & 1,06x_4 & & \\
\text{s.a} & 4,50x_1 & + & 3,00x_2 & + & 1,50x_3 & + & x_4 & = & 18.000 \\
 & & & & & & & x_4 & \geq & 2.000 \\
 & 2,12x_1 & + & 0,96x_2 & + & 0,12x_3 & - & 0,06x_4 & \geq & 0 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & \leq & 1.750 \\
 & x_1 & & & & & & & \leq & 1.000 \\
 & & & x_2 & & & & & \leq & 1.500 \\
 & 7,65x_1 & + & 5,10x_2 & + & 4,05x_3 & & & \leq & 30.600 \\
 & \multicolumn{9}{l|}{x_j \geq 0,\ \forall j=1,\ldots,4} \\
\hline
\end{array}$$

Onde $x_4 \equiv$ total deixado no banco e $x_j \equiv$ número de opções do tipo j=(1: ações; 2: letras de câmbio; 3: obrigações do tesouro).

Outra forma de representar o modelo de decisão deste problema é:

$$\begin{array}{|ll|}
\hline
\max & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \\
\text{s.a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j * x_j = 18.000 \\
 & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j * x_j \geq 0 \\
 & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} d_{ij} * x_j \leq e_i \ \forall i = 1,2 \\
 & x_1 \leq 1.000,\ x_2 \leq 1.500,\ x_4 \geq 2.000 \\
 & x_j \geq 0\ ,\ \forall j = 1,\ldots,4 \\
\hline
\end{array}$$

onde: n=4; c= $\begin{bmatrix} 6,62 \\ 3,96 \\ 1,62 \\ 1,06 \end{bmatrix}$; a= $\begin{bmatrix} 4,50 \\ 3,00 \\ 1,50 \\ 1,00 \end{bmatrix}$; b= $\begin{bmatrix} 2,12 \\ 0,96 \\ 0,12 \\ -0,06 \end{bmatrix}$; d= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7,65 & 5,1 & 4,05 & 0 \end{bmatrix}$; e= $\begin{bmatrix} 1.750 \\ 30.600 \end{bmatrix}$

e x= $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$.

A diferença da modelagem deste PPL para os anteriores, reside no fato de que aqui os parâmetros são lidos através do comando DATA em um arquivo de texto já previamente digitado. Utiliza-se para isto o comando @FILE('nome do arquivo'). O nome do arquivo deve estar entre aspas simples e estar no diretório onde foi salvo o modelo. Caso contrário, deverá ser informado o caminho completo onde o mesmo se encontra (ex.: c=@FILE('C:\LINGO\SAMPLES\teste.txt'). Os valores nestes arquivos devem ser digitados um em cada linha.

Na figura 4.7 é apresentado a modelagem LINGO para este PPL usando este comando.

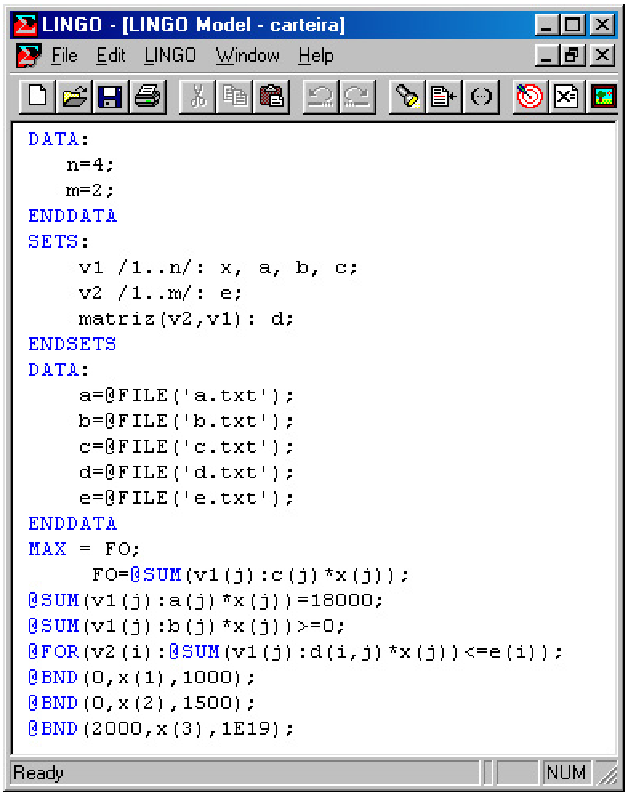


Figura 4.7: Modelo LINGO para o exemplo da seção 4.2.3

Para resolvê-lo, devemos proceder conforme foi explicado no exemplo da seção 4.2.1.

Neste exemplo mostraremos como fazer a análise de sensibilidade no LINGO. Inicialmente é necessário ativar esta opção. Para tanto, clique no menu *LINGO* e logo em seguida em *OPTIONS*. Vá até a aba *GENERAL SOLVER* e escolha a opção *PRICES & RANGES* no campo *DUAL COMPUTATIONS*. A figura 4.8 ilustra tal procedimento.

Após resolvido o modelo e ativada a opção *PRICES & RANGES* para o LINGO apresentar a análise de sensibilidade é necessário clicar no menu *LINGO* e em seguida em *RANGE* tendo como janela ativa a janela do modelo. A figura 4.9 apresenta a tela com o resultado da análise de sensibilidade deste exemplo.

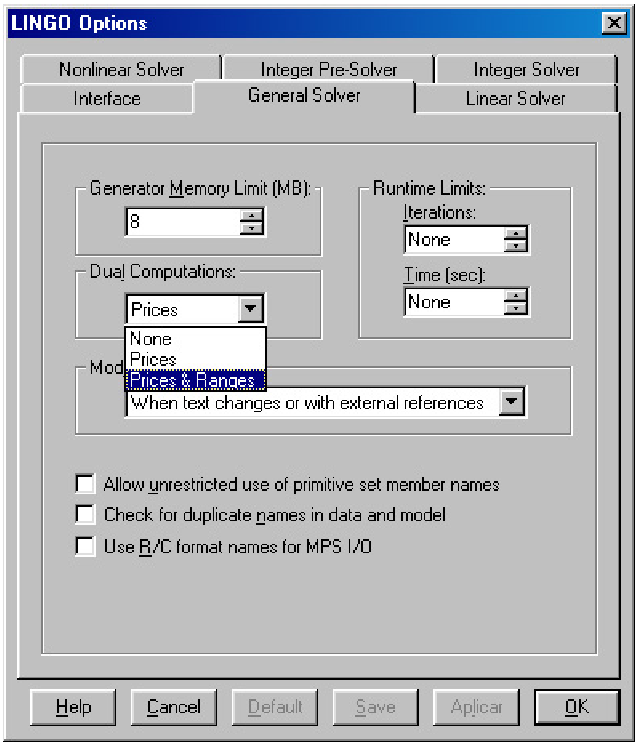
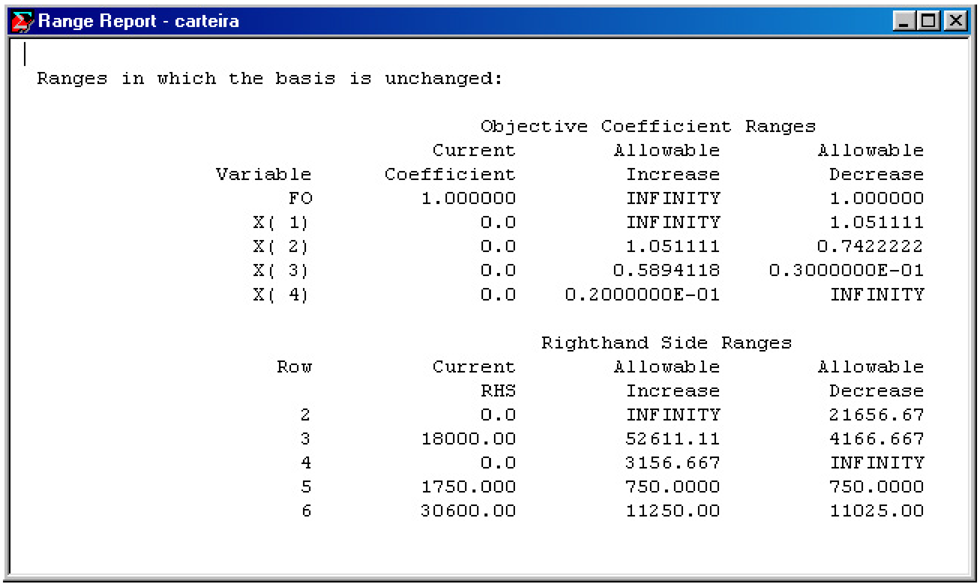


Figura 4.8: Janela de Opções de Configuração do LINGO


Range Report - carteira

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
FO	1.000000	INFINITY	1.000000
X(1)	0.0	INFINITY	1.051111
X(2)	0.0	1.051111	0.7422222
X(3)	0.0	0.5894118	0.3000000E-01
X(4)	0.0	0.2000000E-01	INFINITY

Righthand Side Ranges

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
2	0.0	INFINITY	21656.67
3	18000.00	52611.11	4166.667
4	0.0	3156.667	INFINITY
5	1750.000	750.0000	750.0000
6	30600.00	11250.00	11025.00

Figura 4.9: Análise de Sensibilidade para o exemplo da seção 4.2.3

Referências sobre análise de sensibilidade são encontradas no capítulo referente ao estudo do software LINDO.

4.2.4 Problema da Mochila

Dado n objetos, cada qual com um peso w_i e importância p_i, alocá-los em uma mochila de capacidade b maximizando a importância dos objetos colocados. Assumi-se que há apenas uma unidade de cada objeto.

A modelagem deste PPL é apresentado a seguir:

Seja $x_i = \begin{cases} 1; & \text{se o objeto i é alocado na mochila,} \\ 0; & \text{caso contrário.} \end{cases}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^{n} p_i * x_i \\ \text{s.a} & \sum_{i=1}^{n} w_i * x_i \leq b \\ & x_j \in \{0,1\}\ \forall\ i = 1, ..., n \end{array}}$$

Para este problema da mochila vamos considerar a seguinte tabela de dados:

Objeto(x_i)	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
Peso (w_i) **(em kg)**	2	3	4	5	1	5	4	2	3	7
Importância (p_i)	7	4	4	6	2	3	7	3	2	8

Objeto(x_i)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Peso (w_i) **(em kg)**	3	4	8	9	2	4	5	5	6	9
Importância (p_i)	4	2	9	8	3	5	6	7	7	9

Objeto(x_i)	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Peso (w_i) **(em kg)**	1	2	5	4	3	7	9	2	4	3
Importância (p_i)	1	3	5	3	2	6	8	3	3	1

Objeto(x_i)	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Peso (w_i) **(em kg)**	9	8	7	6	5	4	3	2	1	5
Importância (p_i)	4	7	9	7	7	7	5	3	2	2

Objeto(x_i)	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Peso (w_i) **(em kg)**	2	3	4	5	1	5	4	2	3	7
Importância (p_i)	2	4	5	6	1	8	9	5	5	8

Capacidade da mochila (b) = 150 kg

A modelagem LINGO deste PPL é apresentado na figura 4.10. Aqui podemos observar que a única diferença é que os parâmetros usados nos SETS são lidos através de arquivos textos com base no comando @FILE('nome do arquivo') e as soluções são geradas em arquivo texto através do comando @TEXT('nome do arquivo'). Para ler os parâmetros m e n em um único arquivo, basta separá-los por til, no caso, 50∽150.

Notamos que este PPL seria de difícil modelagem usando a forma apresentada no exemplo da seção 4.2.1, daí a comodidade da utilização da seção SETS em problemas deste porte.

4.2.5 Problema da Fábrica de Brinquedos

A companhia Coelho S.A. fabrica motores para brinquedos e pequenos aparelhos. O departamento de marketing está prevendo vendas de 6100 unidades do motor Roncam no próximo semestre. Esta é uma nova demanda e a companhia terá que testar sua capacidade produtiva. O motor Roncam é montado a partir de três componentes: o corpo, a base e a blindagem. Alguns destes componentes podem ser comprados de outros fornecedores, se houver limitações da Coelho S.A. Os custos de produção e os custos de aquisição em R$/unidade estão resumidos na tabela a seguir.

Componente	Custo de Aquisição (em R$)	Custo de Produção (em R$)
Corpo	10	8
Base	20	20
Blindagem	16	10

A fábrica da Companhia Coelho S.A. tem três departamentos. O requisito de tempo em minutos que cada componente consome em cada departamento está resumido na tabela a seguir. O tempo disponível na companhia para cada componente está listado na última linha.

Componente	Tempo de Preparação (em minutos)	Tempo de molde (em minutos)	Tempo de fabricação (em minutos)
Corpo	2	4	2
Base	5	2	4
Blindagem	4	5	5
Disponibilidade	49200	49200	49200

O modelo de decisão do problema é dado abaixo, onde x_{ij} representa a quantidade de componentes i=(1=se o componente for o Corpo, 2=se o componente for a Base e 3=se o componente for a Blindagem) a serem utilizados no modo j = (A=se o componente for adquirido e F=Se o componente for fabricado).

$$
\begin{array}{lccccccccccccr}
\text{min} & 8x_{1F} & + & 20x_{2F} & + & 10x_{3F} & + & 10x_{1A} & + & 20x_{2A} & + & 16x_{3A} & & \\
\text{s.a} & 2x_{1F} & + & 5x_{2F} & + & 4x_{3F} & & & & & & & \leq & 49200 \\
 & 4x_{1F} & + & 2x_{2F} & + & 5x_{3F} & & & & & & & \leq & 49200 \\
 & 2x_{1F} & + & 4x_{2F} & + & 5x_{3F} & & & & & & & \leq & 49200 \\
 & x_{1F} & & & & & + & x_{1A} & & & & & \geq & 6100 \\
 & & & x_{2F} & & & & & + & x_{2A} & & & \geq & 6100 \\
 & & & & & x_{3F} & & & & & + & x_{3A} & \geq & 6100 \\
 & x_{1F} & , & x_{2F} & , & x_{3F} & , & x_{1A} & , & x_{2A} & , & x_{3A} & \geq & 0
\end{array}
$$

Outra forma de representar este modelo é apresentado abaixo:

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \\
\text{s.a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j \leq 49.200 \ \forall i = 1, 2, 3 \\
 & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} d_{ij} * x_j \geq 6.100 \ \forall i = 1, 2, 3 \\
 & x_j \geq 0 \ , \forall j = 1, \ldots, 6
\end{array}
$$

onde: n=6; c= $\begin{bmatrix} 8 \\ 20 \\ 10 \\ 10 \\ 20 \\ 16 \end{bmatrix}$; a= $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; d= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e x= $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$.

Para efeito de cálculo, estamos adotando que $x_{1F}=x_1$, $x_{2F}=x_2$, $x_{3F}=x_3$, $x_{1A}=x_4$, $x_{2A}=x_5$ e $x_{3A}=x_6$.

O modelo LINGO para este PPL é apresentado na figura 4.11.

A diferença deste modelo para os outros está no fato de estarmos lendo as constantes da seção SETS através de uma planilha do Excel e depois exportando o resultado para a mesma, utilizando a seção DATA. Tanto a leitura quanto a exportação dos dados para a planilha é feita através do comando @OLE('nomearq.xls','nome do conjunto de células'). Para a utilização de uma planilha do Excel, devemos definir um nome para cada conjunto de células referenciadas no modelo. Considerando a planilha apresentada na figura 4.12, temos os seguintes conjuntos de células com seus respectivos nomes:

Conjunto de células	**Nome**
B3 a G3	custo
I5 a I7	Coef1
I8 a I10	Coef2
C16	FO
B5 a G7	Rest1
B8 a G10	Rest2
B14 a G14	x

```
DATA:
       n = @FILE('parametros.txt');
       b = @FILE('parametros.txt');
ENDDATA

SETS:
       vetor / 1..n /: x, w, p;
ENDSETS

DATA:
       w = @FILE('peso50.txt');
       p = @FILE('beneficio50.txt');
ENDDATA

MAX = fo;
fo = @SUM(vetor(j): p(j)*x(j));

@SUM(vetor(j): w(j)*x(j)) <= b;

@FOR(vetor(j): @BIN(x(j)));

DATA:
       @TEXT('solucao.txt')  = x, @dual(x);
       @TEXT('fo_otimo.txt') = fo;
ENDDATA
```

Figura 4.10: Modelo LINGO para o exemplo da seção 4.2.4

```
DATA:
   n=6;
   m=3;
ENDDATA

SETS:
   v1 /1..n/ : c, x;
   v2 /1..m/ : b, e;
   m1(v2,v1): a, d;
ENDSETS

DATA:
  c,a,d,b,e  =
@OLE('coelhos.xls','custo','Rest1','Rest2','Coef1','Coef2');
ENDDATA

MIN = FO;
FO = @SUM(v1(j):c(j)*x(j));

@FOR(v2(i):@SUM(v1(j):a(i,j)*x(j))<=b(i));
@FOR(v2(i):@SUM(v1(j):d(i,j)*x(j))>=e(i));

DATA:
@OLE('coelhos.xls','x','FO') = x,FO;
ENDDATA
```

Figura 4.11: Modelo LINGO para o exemplo da seção 4.2.5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Companhia Coelho S.A.								
2		X1F	X2F	X3F	X1A	X2A	X3A		
3	Custo	8	20	10	10	20	16		
4									
5	Disponilidade de Tempo	2	5	4	0	0	0	33750	49200
6		4	2	5	0	0	0	49200	49200
7		2	4	5	0	0	0	39850	49200
8	Quantidade a ser Produzida	1	0	0	1	0	0	6100	6100
9		0	1	0	0	1	0	6100	6100
10		0	0	1	0	0	1	6100	6100
11									
12	Quantidade a ser Produzida e/ou Adquirida e Custo Total								
13		X1F	X2F	X3F	X1A	X2A	X3A		
14		4675	0	6100	1425	6100	0		
15									
16		FO	R$				234.650,00		

Figura 4.12: Planilha do Excel usada no Exemplo seção 4.2.5

Bibliografia

[1] Dash Optimization Co., http://www.dashoptmization.com. *XPRESS-MP - User Guide Release 10*, 1999.

[2] M. C .Goldbarg e H. P. L. Luna. *Otimização Combinatória e Programação Linear: Modelos e Algoritmos*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 2000.

[3] Helmut Kopka and Patrick W. Dale. *A Guide to LATEX*. Addison-Wesley, Harlow, England, 3rd edition, 1999.

[4] Gerson Lachtermacher. *Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 2002.

[5] Lindo Systems Inc., Chicago. *LINDO: User's Manual*, 1996.

[6] Lindo Systems Inc., Chicago. *LINGO: the modeling language and optmizer*, 2001.