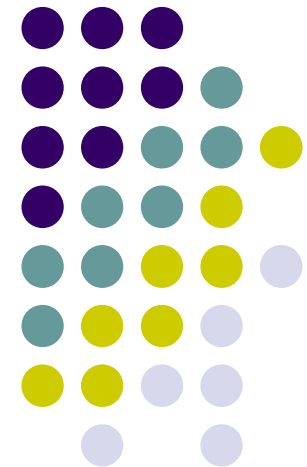


# Introdução à Otimização: Programação Linear

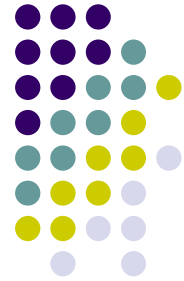
---

Marcone Jamilson Freitas Souza

Departamento de Computação  
Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação  
Universidade Federal de Ouro Preto  
<http://www.decom.ufop.br/prof/marcone>  
E-mail: [marcone.freitas@yahoo.com.br](mailto:marcone.freitas@yahoo.com.br)



# Roteiro



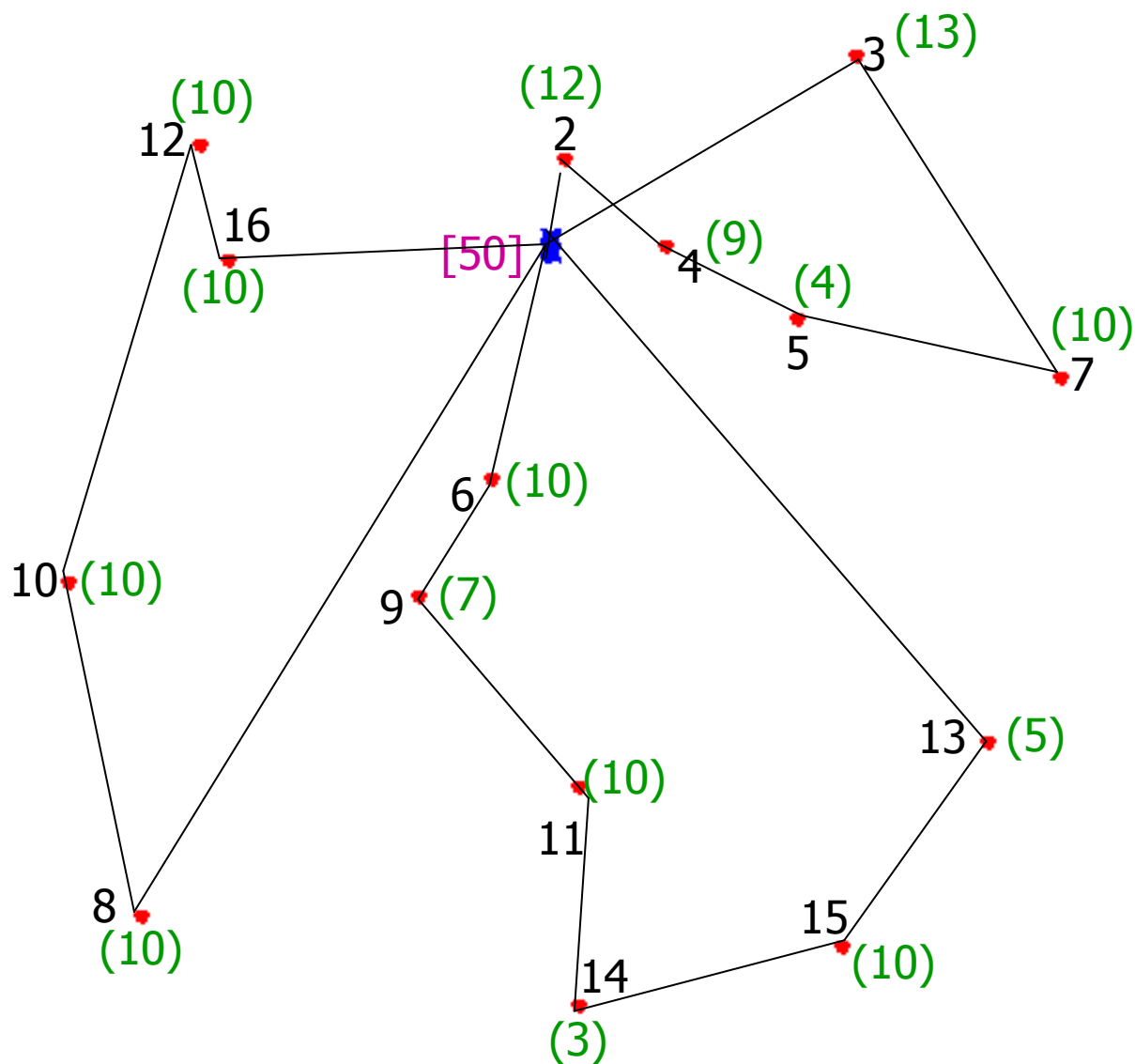
- Otimização
  - Introdução
  - Motivação
  - Modelagem em Programação Matemática
  - Programação Linear: princípios básicos
  - Programação Linear por Metas (*Goal programming*)
  - Programação Inteira: princípios básicos
  - Softwares de Otimização: LINGO / COIN-CLP / GLPK / CPLEX
- Heurísticas computacionais para otimização
  - Conceitos básicos
  - Heurísticas construtivas
  - Heurísticas clássicas de refinamento
  - Metaheurísticas
    - *Simulated Annealing*
    - *Variable Neighborhood Search (VNS)*
    - *Iterated Local Search (ILS)*
    - Algoritmos Genéticos
  - Aplicações de técnicas de otimização a processos produtivos:
    - Alocação dinâmica de caminhões
    - Planejamento da produção,
    - Controle de Pátio de Minérios
    - Corte de Estoque (*Cutting Stock*)
    - Seleção de projetos

# Otimização

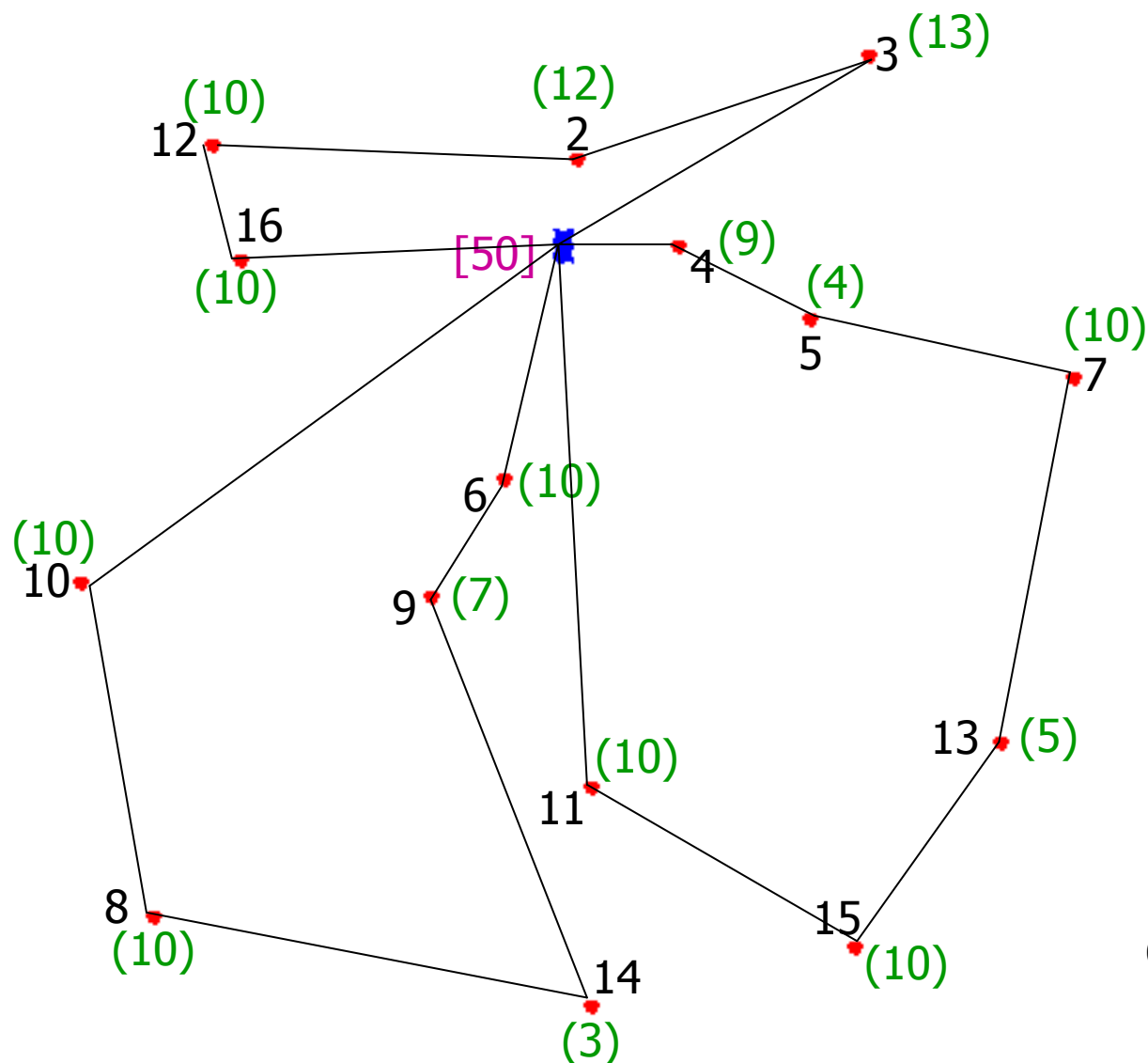


- Área da Pesquisa Operacional que utiliza o método científico para apoiar a tomada de decisões, procurando determinar como melhor projetar e operar um sistema, usualmente sob condições que requerem a alocação de recursos escassos.
- Trabalha com modelos determinísticos
  - As informações relevantes são assumidas como conhecidas (sem incertezas)
- Aplicações típicas:
  - Mistura de minérios
  - Planejamento da produção
  - Roteirização
  - Escala de pessoal

# Problema de Roteamento de Veículos (*Vehicle Routing Problem*)

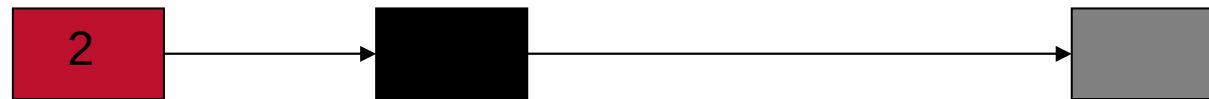
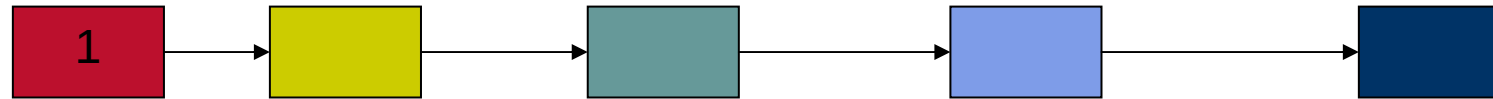


# Problema de Roteamento de Veículos (Vehicle Routing Problem)

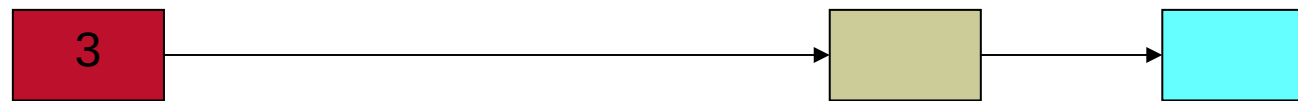
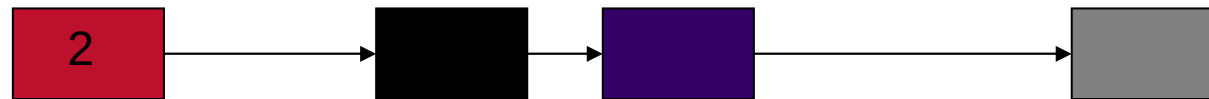
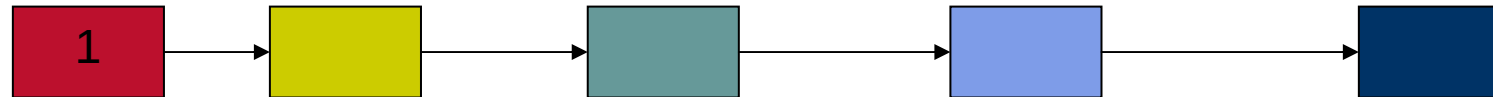


Dentre todas as possíveis roteirizações, determine aquela que minimiza a distância total percorrida<sup>5</sup>

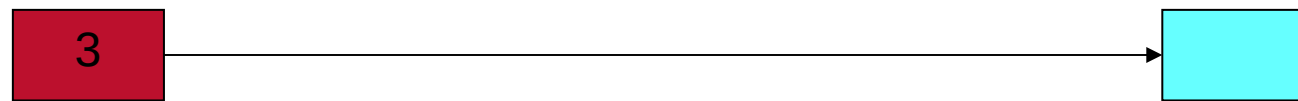
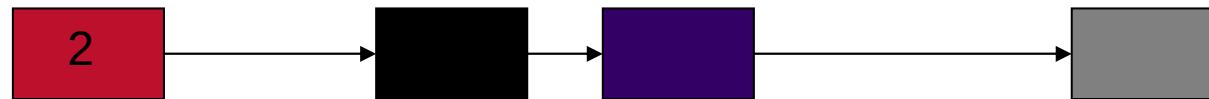
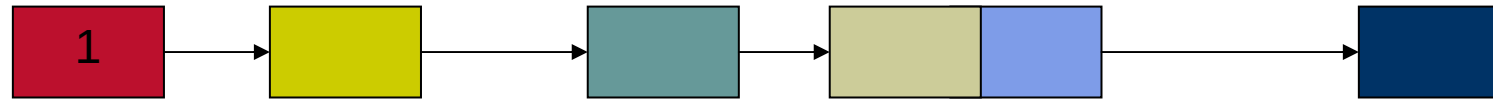
# Escala de Motoristas (*Crew Scheduling*)



# Escala de Motoristas (*Crew Scheduling*)

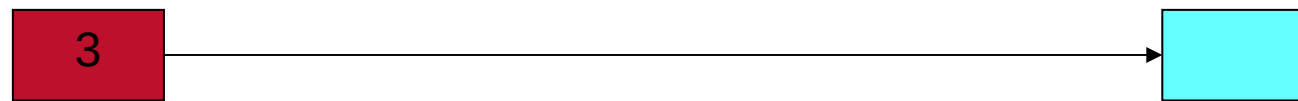
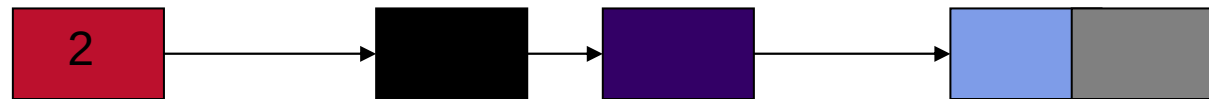
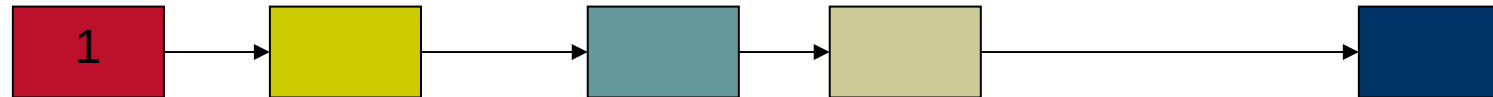


# Escala de Motoristas (*Crew Scheduling*)

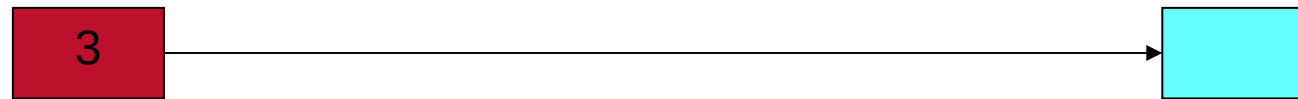
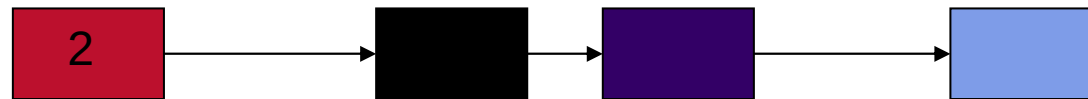
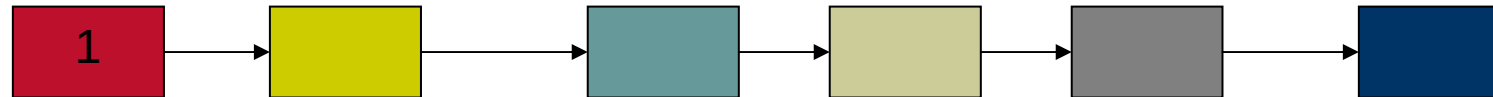




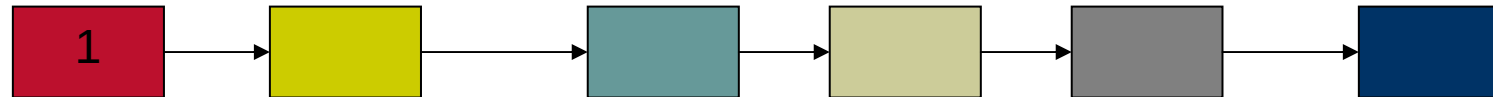
# Escala de Motoristas (Crew Scheduling)



# Escala de Motoristas (*Crew Scheduling*)



# Escala de Motoristas (*Crew Scheduling*)



Redução de um tripulante!

# Programação de jogos de competições esportivas (*Sports timetabling*)



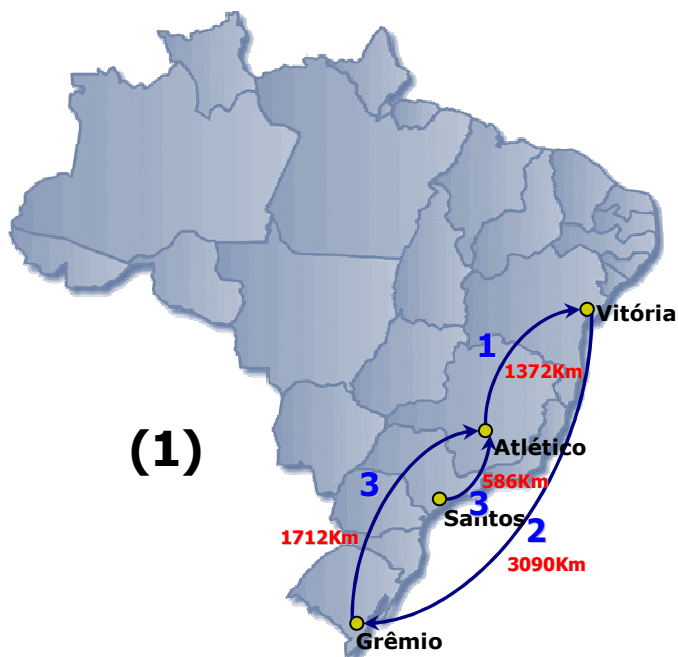
## INTRODUÇÃO

- ✓ Montar uma tabela de jogos entre os times participantes de uma competição esportiva
- ✓ Satisfazer as restrições da competição
- ✓ Minimizar os custos relativos ao deslocamento dos times

# Programação de jogos de competições esportivas (*Sports timetabling*)



## INTRODUÇÃO



Vitória x Atlético | Grêmio x Atlético | Atlético x Santos  
Distância total percorrida: 6760 Km



Atlético x Vitória | Grêmio x Atlético | Atlético x Santos  
Distância total percorrida: 5382 Km

**Economia = 1378 Km**

# Programação de jogos de competições esportivas (*Sports timetabling*)

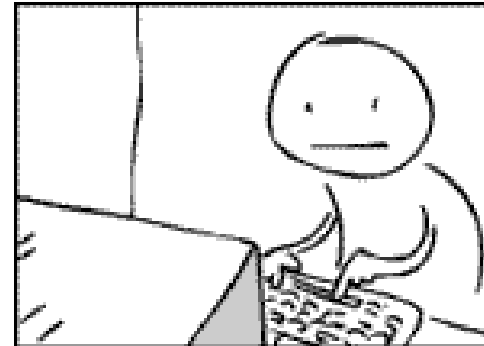


## JUSTIFICATIVA DO TRABALHO

- Gastos com deslocamento
- Influência no desempenho dos times
- Enquadra-se na classe de problemas NP-difíceis
- Número de tabelas possíveis para uma competição envolvendo  $n$  times confrontando-se entre si em turnos completos (Concílio & Zuben (2002)):

$$(n-1)!(n-3)!(n-5)!...(n-(n-1)) \times 2^{(n-1) \times \frac{n}{2}}$$

- Competição com 20 participantes:  **$2,9062 \times 10^{130}$**  tabelas possíveis (aprox.  $10^{114}$  anos para analisar todas as tabelas em um computador que analisa uma tabela em  $10^{-8}$  segundos)



# Programação de jogos de competições esportivas (*Sports timetabling*)



## PROBLEMA ABORDADO

- **1ª Divisão do Campeonato Brasileiro de Futebol 2004, 2005 e 2006**
- **2ª Divisão do Campeonato Brasileiro de Futebol 2006**
- **Competições realizadas em dois turnos completos e espelhados**
- **Restrições do problema**
  1. Dois times jogam entre si duas vezes, uma no turno e a outra no retorno, alternando-se o mando de campo entre os mesmos
  2. Nas duas primeiras rodadas de cada turno, cada time alternará seus jogos, sendo um em casa e o outro na casa do adversário. Por ex.: 1ª fora, 2ª em casa
  3. As duas últimas rodadas de cada turno devem ter a configuração inversa das duas primeiras rodadas de cada turno com relação ao mando de campo. Ex.: Penúltima em casa, Última fora
  4. Não pode haver jogos entre times do mesmo estado na última rodada
  5. A diferença entre os jogos feitos em cada turno em casa e fora de casa de um time não pode ser maior que uma unidade
  6. Um time não pode jogar mais que duas vezes consecutivas dentro ou fora de casa

# Programação de jogos de competições esportivas (*Sports timetabling*)



## RESULTADOS COMPUTACIONAIS

➤ *Melhores soluções obtidas pelos métodos*

| Instâncias | CBF         |            | Biajoli et al. (2004) |            | ILS-MRD     |            |        |       |
|------------|-------------|------------|-----------------------|------------|-------------|------------|--------|-------|
|            | <i>DIST</i> | <i>DIF</i> | <i>DIST</i>           | <i>DIF</i> | <i>DIST</i> | <i>DIF</i> | %MDIST | %MDIF |
| bssp2004   | 905316      | 86610      | 789480                | 53309      | 754935      | 51199      | 16,61  | 40,89 |
| bssp2005   | 838464      | 70655      | -                     | -          | 696800      | 46821      | 16,90  | 33,73 |
| bssp2006-A | 658195      | 50769      | -                     | -          | 562886      | 37628      | 14,48  | 25,88 |
| bssp2006-B | 998675      | 61454      | -                     | -          | 967374      | 23848      | 3,13   | 61,19 |

### Economia possível:

- ✓ Considerando o custo do quilômetro aéreo a R\$0,70
- ✓ Delegação de 20 pessoas
- ✓ Campeonatos 2004 e 2005, Série A: Aprox. R\$ 2 milhões
- ✓ Campeonato 2006, Série A: Aprox. R\$ 1 milhão
- ✓ Campeonato 2006, Série B: Aprox. R\$ 500 mil



# Controle de Pátio de Minérios



- Aplicação na mina Cauê, Itabira (MG), da CVRD
- 3 pátios de estocagem de minérios
- Minérios empilhados em balizas
- Pilhas formadas por subprodutos com composição química e granulométrica diferentes
- Objetivo é compor um lote de vagões ( $\pm 80$ ), atendendo às metas de qualidade e produção de um dado produto
- Exemplos de algumas restrições operacionais:
  - Retomar uma pilha toda sempre que possível
  - Concentrar retomada
  - Retomar minério da esquerda para a direita e de cima para baixo

# Controle de Pátio de Minérios

***Pátio de Estocagem Cauê***



# Controle de Pátio de Minérios

## *Equipamentos de empilhamento e recuperação*



**Recuperadora (Bucket Wheel)**



**Recuperadora Tambor (Drum)**



**Empilhadeira (Stacker)**



# Controle de Pátio de Minérios

*Silos de embarque*



**C**

**D**

**E**

**F**

**G**

**H**

**I**

**J**

**K**

**L**

**M**

**N**

**O**

**P**

**Q**

**R**

**S**

**T**

**U**

**V**

**W**

**X**

**Y**

**Z**

**AA**

**AB**

**AC**

**AD**

**AE**

**AF**

**AG**

**AH**

**AI**

**AJ**

**AK**

**AL**

**AM**

**AN**

**AO**

**AP**

**AQ**

**AR**

**AS**

**AT**

**AU**

**AV**

**AW**

**AX**

**AY**

**AZ**

**BA**

**BB**

**BC**

**BD**

**BE**

**BF**

**BG**

**BH**

# Controle de Pátio de Minérios

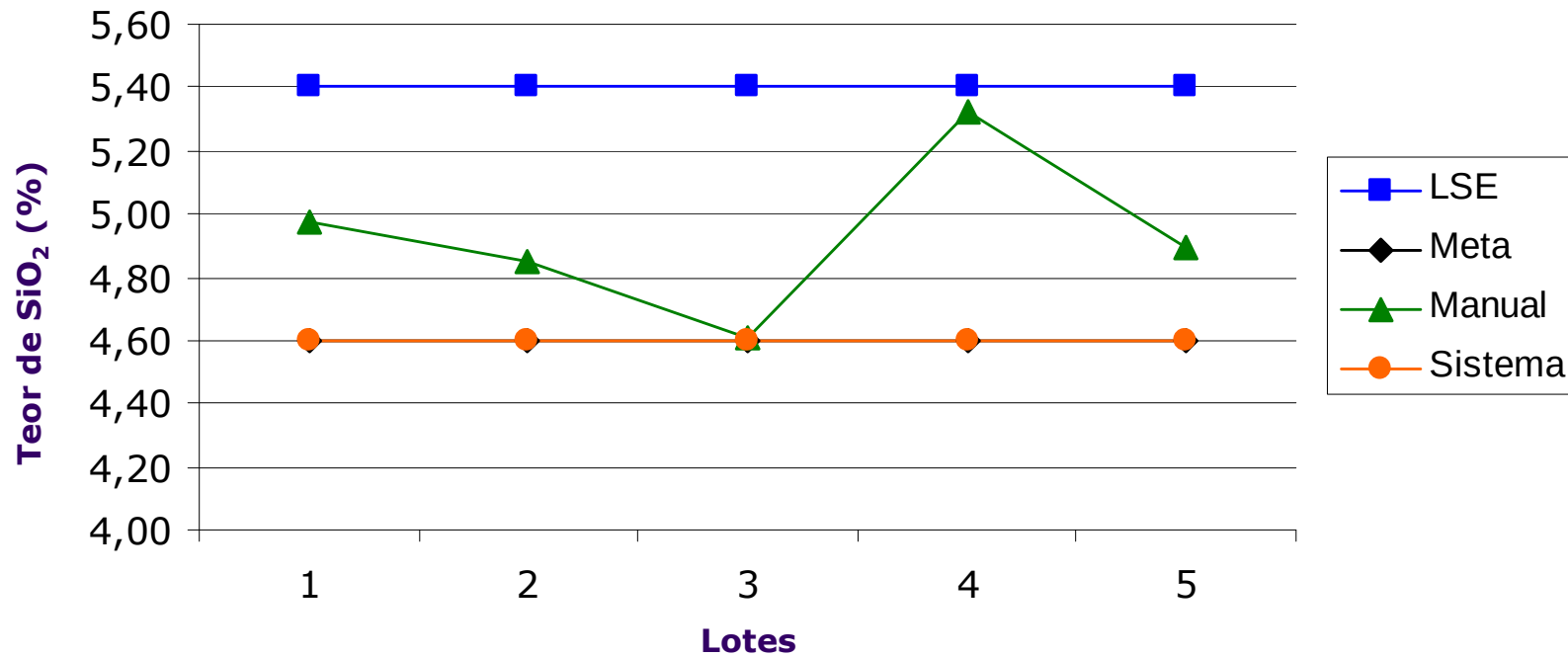


| SECA         | Fe | SiO <sub>2</sub> | P     | Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> | Mn    | MgO | H <sub>2</sub> O | +6,3  | +1,0  | -0,15 |
|--------------|----|------------------|-------|--------------------------------|-------|-----|------------------|-------|-------|-------|
| <b>LSG</b>   | -  | 4,35             | 0,040 | 1,00                           | 0,600 | -   | -                | 11,00 | -     | 37,00 |
| <b>LSE</b>   | -  | 3,85             | 0,028 | 0,80                           | 0,300 | -   | 6,50             | 8,00  | -     | 27,00 |
| <b>META</b>  | -  | 3,60             | 0,022 | 0,70                           | 0,150 | -   | -                | 6,50  | 61,00 | 22,00 |
| <b>LIE</b>   | -  | -                | -     | -                              | -     | -   | -                | -     | 58,00 | -     |
| <b>LIG</b>   | -  | -                | -     | -                              | -     | -   | -                | -     | 52,00 | -     |
| <b>CRIT.</b> | -  | CR               | CR    | CR                             | -     | -   | -                | -     | -     | CR    |

| SFCA         | Fe    | SiO <sub>2</sub> | P     | Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> | Mn    | MgO | H <sub>2</sub> O | +6,3 | +1,0  | -0,15 |
|--------------|-------|------------------|-------|--------------------------------|-------|-----|------------------|------|-------|-------|
| <b>LSG</b>   | -     | 5,10             | 0,059 | 1,80                           | -     | -   | 7,50             | -    | -     | 44,00 |
| <b>LSE</b>   | -     | 4,50             | 0,043 | 1,40                           | -     | -   | 6,50             | -    | -     | 36,00 |
| <b>META</b>  | -     | 4,20             | 0,035 | 1,20                           | 0,170 | -   | 6,00             | -    | 53,00 | 32,00 |
| <b>LIE</b>   | 65,00 | 3,70             | -     | -                              | -     | -   | -                | -    | -     | -     |
| <b>LIG</b>   | -     | 2,70             | -     | -                              | -     | -   | -                | -    | -     | -     |
| <b>CRIT.</b> | -     | CR               | MI    | CR                             | -     | -   | MI               | -    | -     | CR    |

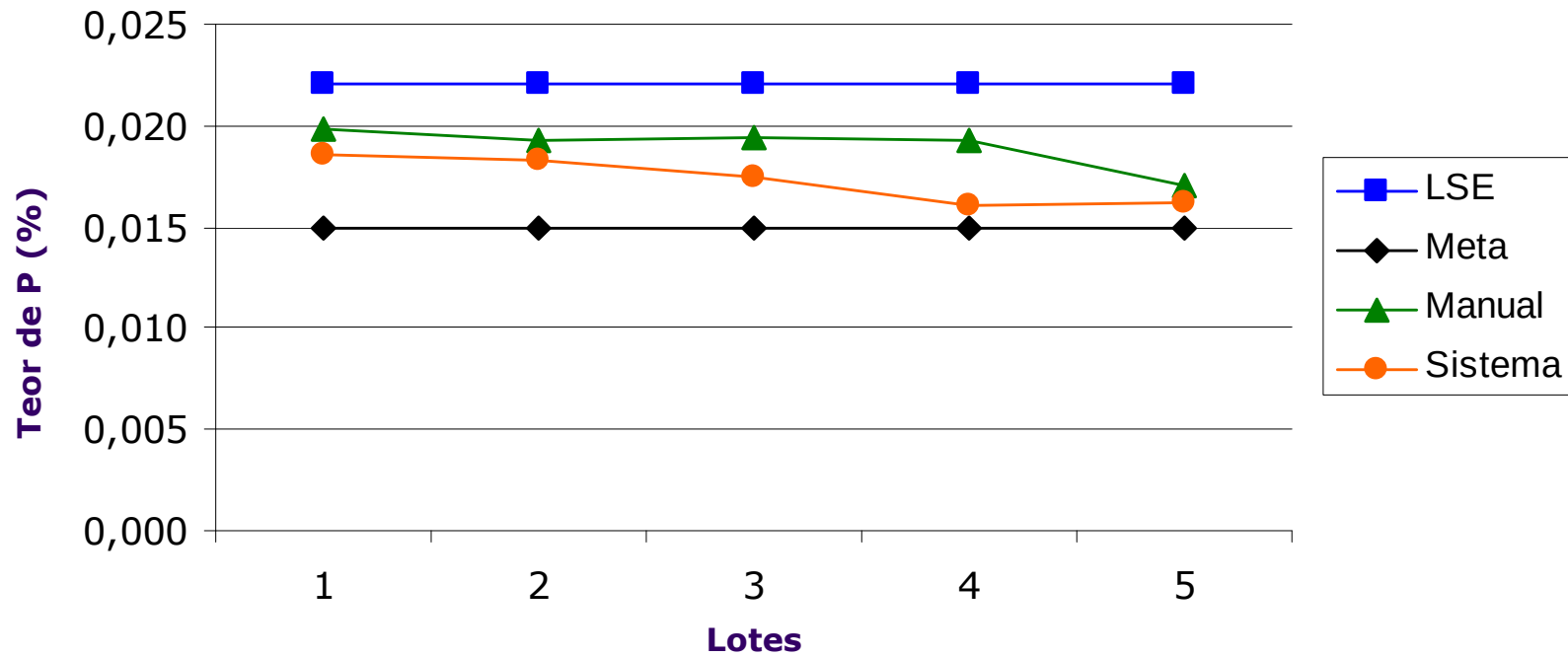
# Controle de Pátio de Minérios

**PCCA**



# Controle de Pátio de Minérios

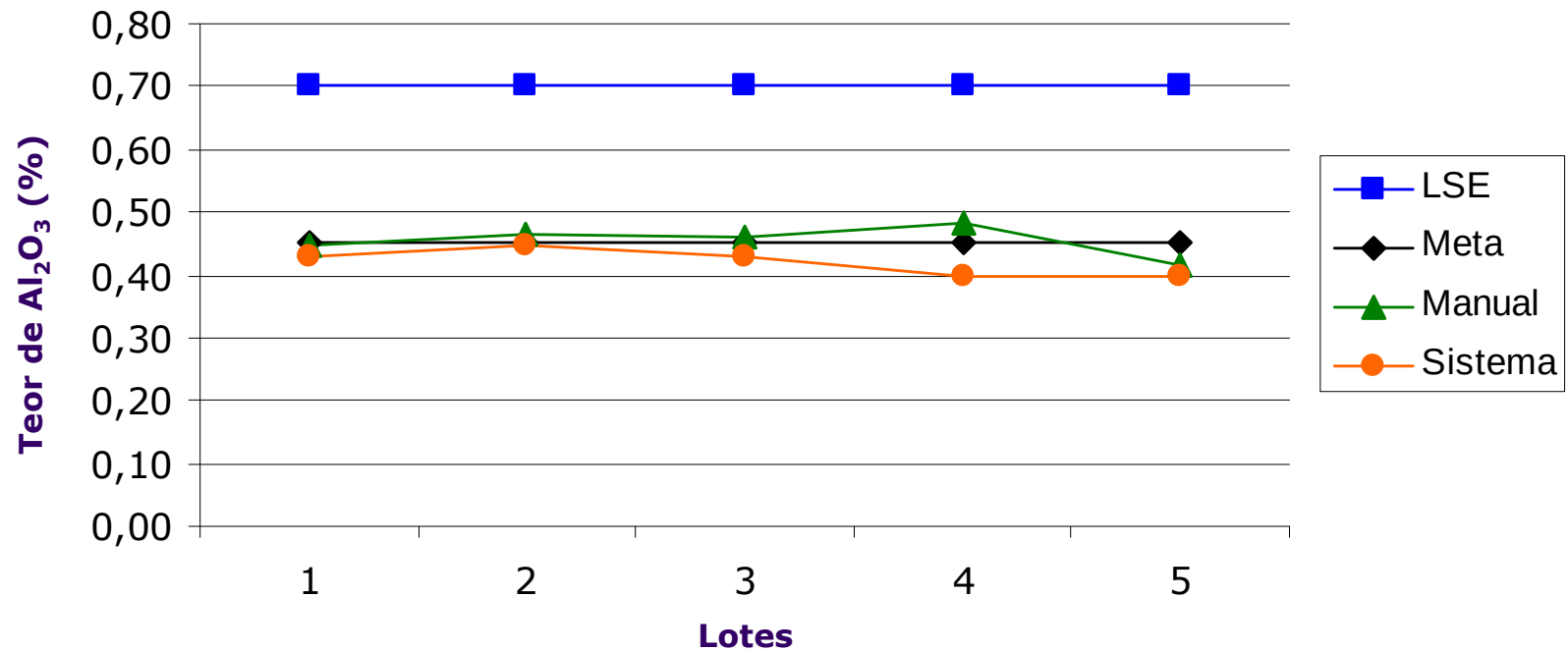
**PCCA**





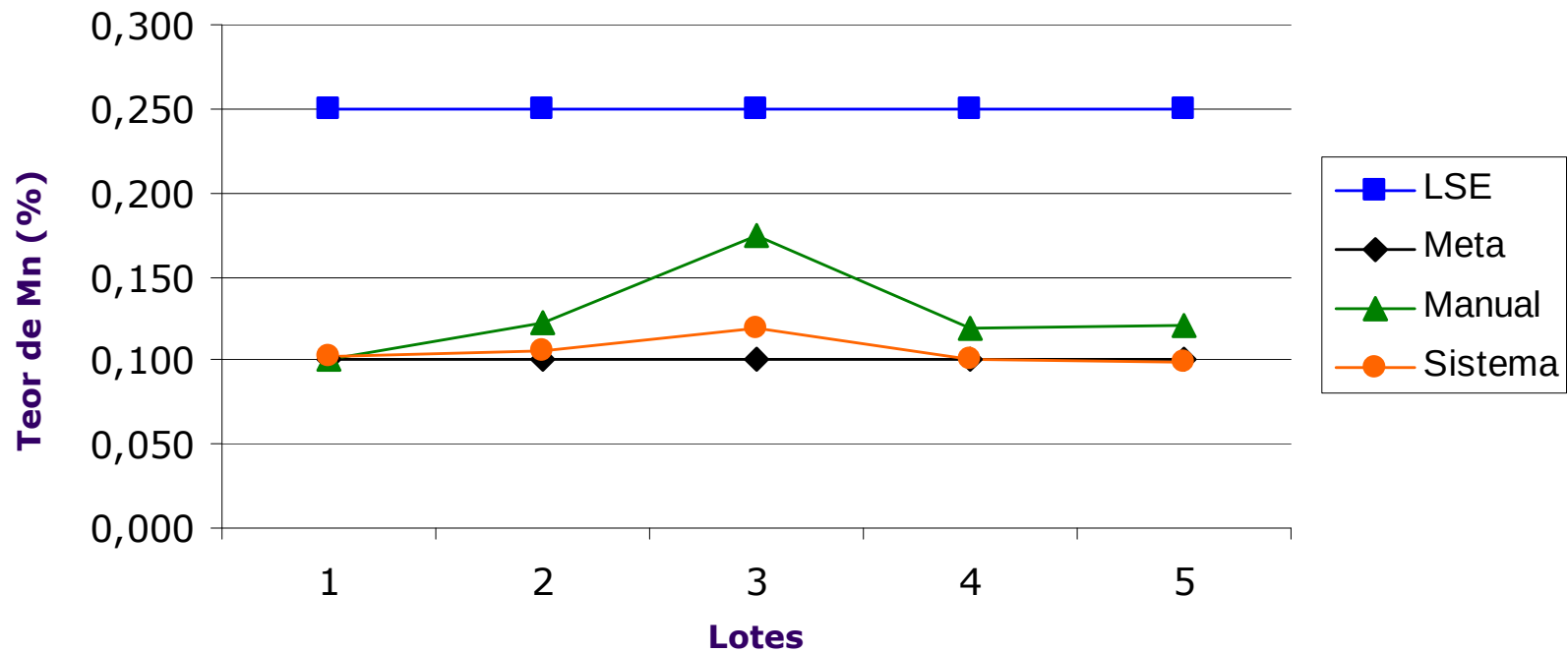
# Controle de Pátio de Minérios

**PCCA**



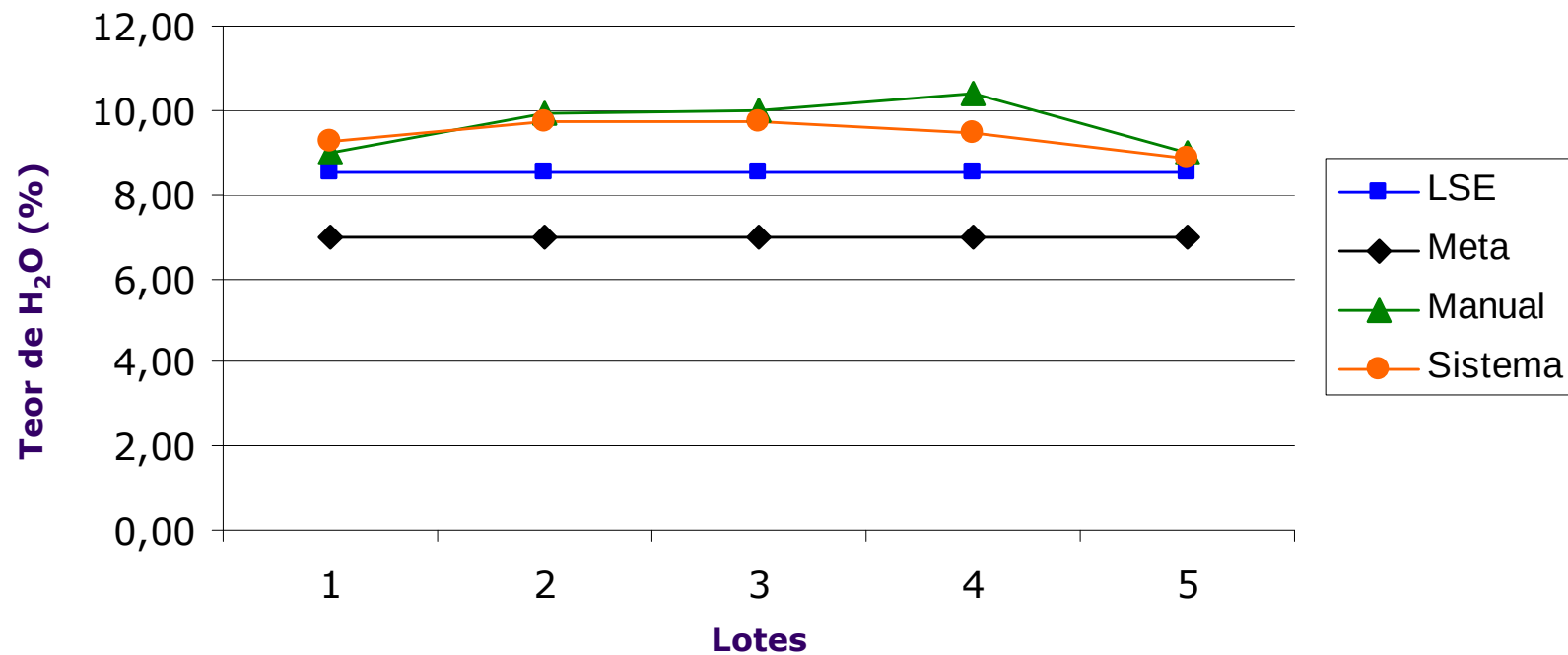
# Controle de Pátio de Minérios

**PCCA**

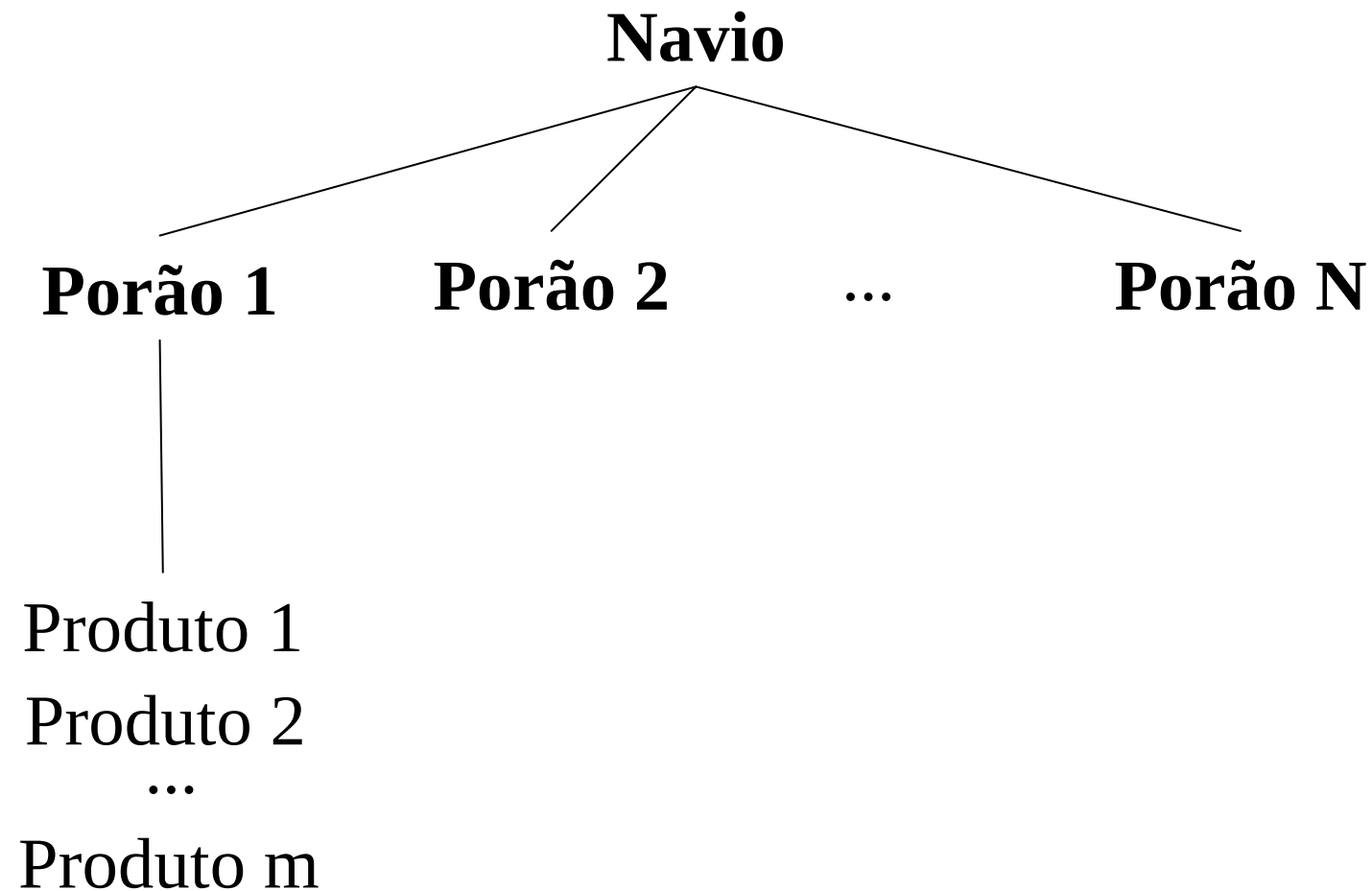


# Controle de Pátio de Minérios

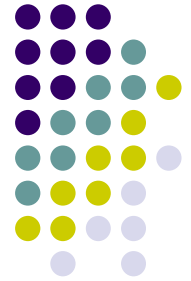
**PCCA**



# Carregamento de produtos em Navios

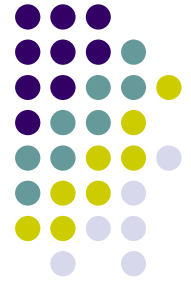


# Carregamento de produtos em Navios: Características do problema



- **Turnos de 6 horas de trabalho:**
  - 7h-13h
  - 13h-19h
  - 19h-1h
  - 1h-7h
- **8 tipos de turnos:**
  - Dia útil (horários normal e noturno)
  - Sábado (horários normal e noturno)
  - Domingo (horários normal e noturno)
  - Feriado (horários normal e noturno)
- **Terno: equipe de trabalho atuando em um porão durante um turno**

# Carregamento de produtos em Navios: Características do problema



- **Existe um certo número de máquinas disponíveis para fazer o carregamento do navio: CN, CG e GB.**
- **Cada máquina possui uma produtividade diferente para cada tipo de produto.**

# Carregamento de produtos em Navios: Características do problema



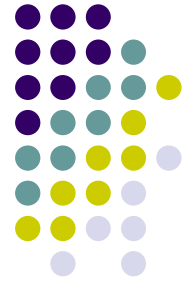
- **Produtos carregados em uma ordem preestabelecida.**
- **As equipes são remuneradas de acordo com a produção (ton.).**
- **Os custos variam de acordo com o produto carregado e o tipo do turno em que ocorre o turno.**
- **O custo total é dado pelo somatório dos custos com docas, encarregados, guincheiros, conferentes, estivadores e equipamento utilizado.**

# Carregamento de produtos em Navios: Características do problema



- **Custo do carregamento dado pelo somatório dos custos dos ternos**
- **Carregamento concluído depois da data prevista em contrato:**
  - *Demurrage* (multa por dia de atraso)
- **Carregamento concluído antes da data prevista em contrato:**
  - Prêmio (metade da multa)
- **Objetivo é reduzir os custos com a mão-de-obra**





# Modelos de Otimização

- Programação matemática:
  - Fundamentados na matemática
  - Métodos exatos: garantem a geração da solução ótima
  - Método mais difundido: Programação Linear (PL)
  - Desvantagens:
    - Modelagem mais complexa
    - Em problemas combinatórios, podem exigir um tempo proibitivo para encontrar a solução ótima
- Heurísticos:
  - Fundamentados na Inteligência Artificial
  - Métodos aproximados: Não garantem a otimalidade da solução final
  - Vantagens:
    - De fácil modelagem
    - Boas soluções podem ser obtidas rapidamente

# Modelos de Programação Linear



- Formulação algébrica:

otimizar  $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$  } função objetivo

sujeito a  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} b_i \quad \forall i = 1, \dots, m$  } restrições

$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$  } condições de não-negatividade

# Modelos de Programação Linear

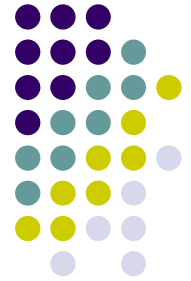


1. As restrições representam limitações de recursos disponíveis (mão-de-obra, capital, recursos minerais ou fatores de produção) ou então, exigências e condições que devem ser cumpridas
2.  $x_j$  é uma variável de decisão, que quantifica o nível de operação da atividade  $j$
3.  $b_i$  representa a quantidade do  $i$ -ésimo recurso disponível ou a exigência que deve ser cumprida

# Modelos de Programação Linear



4.  $c_j$  representa o custo associado à  $j$ -ésima atividade
5.  $a_{ij}$  é a quantidade do recurso  $i$  (exigido ou disponível) em uma unidade da atividade  $j$
6. otimizar = maximizar **ou** minimizar



# Terminologia

- Solução
  - Qualquer especificação de valores para as variáveis de decisão
- Solução viável
  - Solução que satisfaz a todas as restrições
- Solução ótima
  - Solução viável que tem o valor mais favorável da função objetivo

# Hipóteses assumidas em um modelo de programação linear



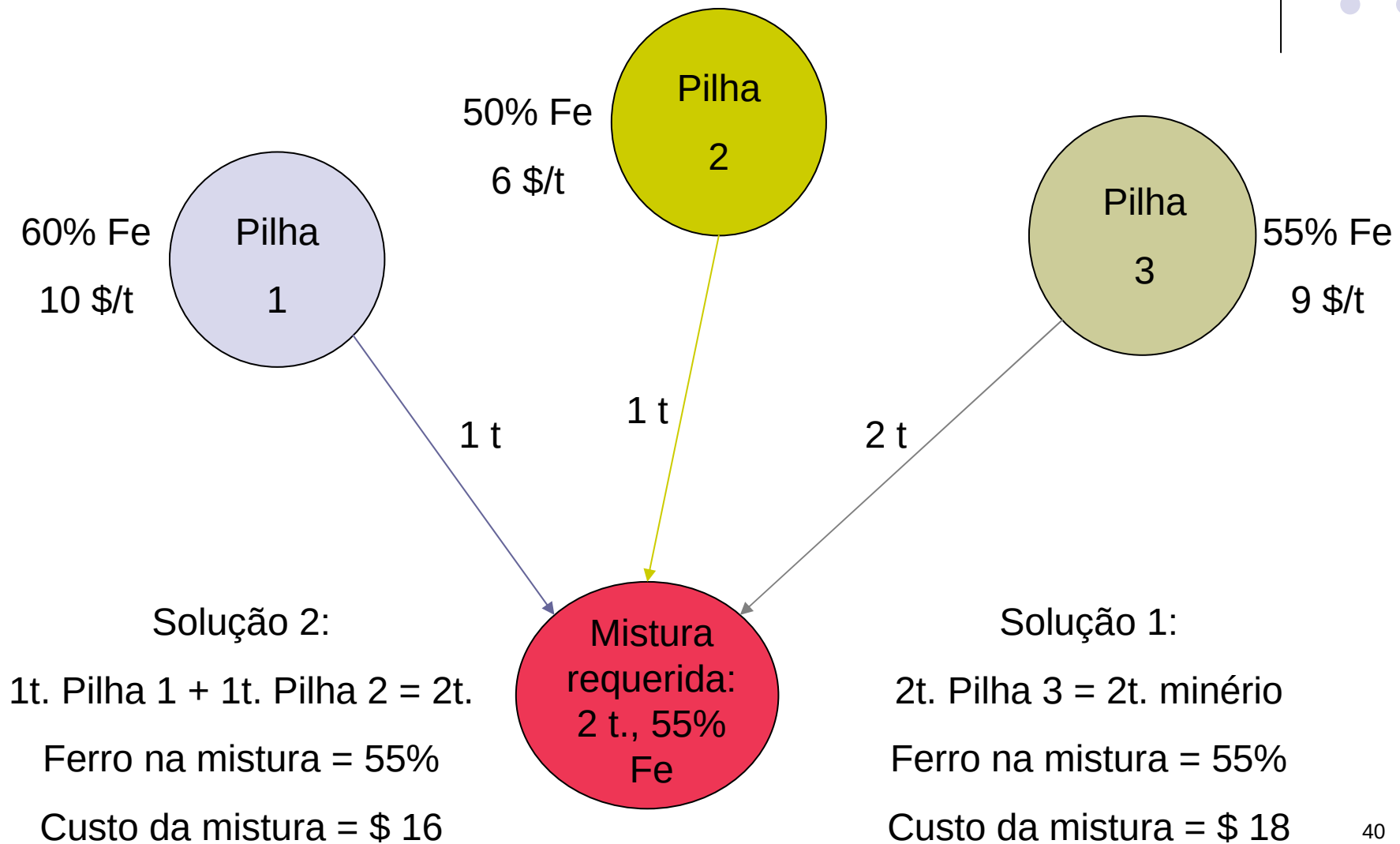
- Proporcionalidade
  - O custo de cada atividade é proporcional ao nível de operação da atividade
  - A quantidade de recursos consumidos por uma atividade é proporcional ao nível dessa atividade
- Divisibilidade
  - As atividades podem ser divididas em qualquer nível fracionário
- Aditividade
  - O custo total é a soma das parcelas associadas a cada atividade
- Certeza
  - Assume-se que todos os parâmetros do modelo são constantes conhecidas

# Problema da Mistura de Minérios



- Há um conjunto de pilhas de minério
- Em cada pilha há uma composição química e granulométrica diferente (% de Fe, SiO<sub>2</sub>, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> etc.)
- A cada pilha está associado um custo
- É necessário formar uma mistura com uma certa especificação
- Dentre as possíveis misturas que atendem a especificação requerida, o objetivo é encontrar aquela que seja de custo mínimo

# Problema da Mistura de Minérios





# Modelo de PL para o Problema da Mistura de Minérios



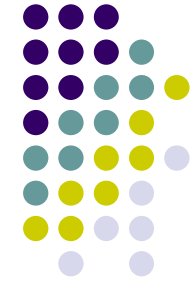
Dados de entrada:

- Pilhas = Conjunto de pilhas
- Parametros = Conjunto dos parâmetros de controle (Teores, Granulometria)
- $t_{ij}$  = % do parâmetro de controle  $j$  em uma tonelada da pilha  $i$
- $tl_j$  = % mínimo admissível para o parâmetro  $j$
- $tu_j$  = % máximo admissível para o parâmetro  $j$
- $Qu_i$  = Quantidade máxima de minério, em toneladas, existente na pilha  $i$
- $c_i$  = Custo, em \$, de uma tonelada de minério da pilha  $i$
- $p$  = quantidade, em toneladas, da mistura a ser formada

Variáveis de decisão:

- $x_i$  = Quantidade de minério a ser retirado da pilha  $i$

# Modelo de PL para o Problema da Mistura de Minérios



$$\min \sum_{i \in \text{Pilhas}} c_i x_i$$

$$\frac{\sum_{i \in \text{Pilhas}} t_{ij} x_i}{\sum_{i \in \text{Pilhas}} x_i} \leq tu_j \quad \forall j \in \text{Parametros}$$

% do parâmetro  $j$  na mistura  
não pode superar o valor  
máximo permitido

$$\frac{\sum_{i \in \text{Pilhas}} t_{ij} x_i}{\sum_{i \in \text{Pilhas}} x_i} \geq tl_j \quad \forall j \in \text{Parametros}$$

% do parâmetro  $j$  na mistura  
não pode ser inferior ao  
valor mínimo permitido

$$x_i \leq Qu_i \quad \forall i \in \text{Pilhas}$$

A quantidade a ser  
retomada em cada pilha  $i$   
está limitada à  $Qu_i$

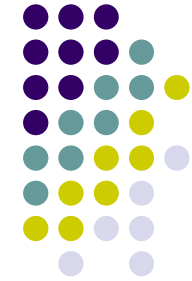
$$\sum_{i \in \text{Pilhas}} x_i = p$$

A mistura deve ter peso  
total  $p$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in \text{Pilhas}$$

Não-negatividade

# Modelo de PL para o Problema da Mistura de Minérios – Linearização das restrições



$$\min \sum_{i \in Pilhas} c_i x_i$$

$$\sum_{i \in Pilhas} (t_{ij} - tu_j) x_i \leq 0 \quad \forall j \in Parametros$$

Valor do parâmetro  $j$  na mistura não pode superar o valor máximo permitido

$$\sum_{i \in Pilhas} (t_{ij} - tl_j) x_i \geq 0 \quad \forall j \in Parametros$$

Valor do parâmetro  $j$  na mistura não pode ser inferior ao valor mínimo permitido

$$x_i \leq Qu_i \quad \forall i \in Pilhas$$

A quantidade a ser retomada em cada pilha  $i$  está limitada à  $Qu_i$

$$\sum_{i \in Pilhas} x_i = p$$

A mistura deve ter peso total  $p$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in Pilhas$$

Não-negatividade

# Modelo de PL para o Problema da Mistura de Minérios



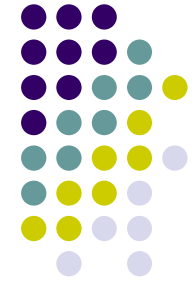
- Problemas dessa modelagem de programação linear:
  - Restrições são rígidas
  - Na prática, pode não haver solução
  - Nesse caso, otimizador aplicado ao modelo retorna que não há solução viável
  - Qual a “melhor” solução inviável?

# Programação linear por metas (*goal programming*)



- Permite trabalhar com restrições relaxadas
- É mais flexível
- Cria variável de desvio para cada restrição que pode ser relaxada
- Variável de desvio mensura a “distância de viabilidade” e é colocada na função objetivo, para ser minimizada
- O valor mínimo da variável de desvio representa a “meta” a ser atingida

# Programação linear por metas (*goal programming*)



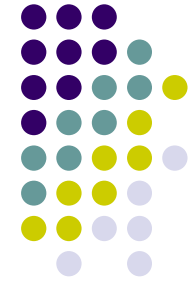
- Restrições do tipo  $\leq$

$$x_1 + x_2 \leq 10 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \min dp \\ x_1 + x_2 - dp \leq 10 \end{cases}$$

Desvio positivo = desvio para cima

Desvio positivo ( $dp$ ):  
Mede o quanto se  
ultrapassou de 10

# Programação linear por metas (*goal programming*)



- Restrições do tipo  $\geq$

$$x_1 + x_2 \geq 10 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \min dn \\ x_1 + x_2 + dn \geq 10 \end{cases}$$

Desvio negativo = desvio para baixo

Desvio negativo ( $dn$ ):  
Mede o quanto faltou  
para chegar a 10

# Programação linear por metas (*goal programming*)



- Restrições do tipo =

$$x_1 + x_2 = 10 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \min dp + dn \\ x_1 + x_2 - dp + dn = 10 \end{cases}$$

Mede o que supera 10

Mede o que falta para chegar a 10

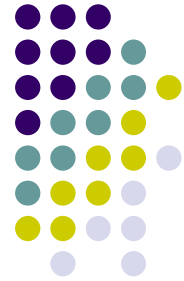


# Programação linear por metas (*goal programming*)



- Dois métodos de solução são normalmente utilizados:
  - Método dos pesos
  - Método hierárquico
- Método dos pesos:
  - Forma-se uma única função objetivo com o somatório ponderado das variáveis de desvio
  - A cada variável de desvio é associado um peso, que reflete a importância relativa da restrição relaxada
- Método hierárquico:
  - É estabelecida, inicialmente, a hierarquia (prioridade) das metas
  - Resolve-se o problema com a meta de maior prioridade (isto é, apenas a variável de desvio mais prioritária)
  - Resolve-se, a seguir, o problema tendo como função objetivo uma meta de prioridade mais baixa que a anterior, mas atribuindo o valor ótimo da meta anterior à variável de desvio correspondente, isto é, tratando a meta anterior como restrição do modelo
  - O procedimento é executado de modo que a solução obtida de uma meta de prioridade mais baixa nunca degrade qualquer solução de prioridade mais alta

# Modelo de PL para a Mistura de Minérios com relaxação dos limites de especificação



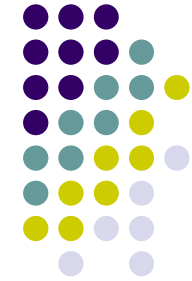
Dados de entrada:

- Pilhas = Conjunto de pilhas
- Parametros = Conjunto dos parâmetros de controle
- $t_{ij}$  = % do parâmetro de controle  $j$  em uma tonelada da pilha  $i$
- $tl_j$  = % mínimo admissível para o parâmetro  $j$
- $tu_j$  = % máximo admissível para o parâmetro  $j$
- $Qu_i$  = Quantidade máxima de minério, em toneladas, existente na pilha  $i$
- $p$  = quantidade, em toneladas, da mistura a ser formada
- $wne_j$  = Peso para o desvio negativo de especificação do parâmetro  $j$  na mistura
- $wpe_j$  = Peso para o desvio positivo de especificação do parâmetro  $j$  na mistura

Variáveis de decisão:

- $x_i$  = Quantidade de minério a ser retirado da pilha  $i$
- $dne_j$  = Desvio negativo de especificação, em toneladas, do parâmetro  $j$  na mistura
- $dpe_j$  = Desvio positivo de especificação, em toneladas, do parâmetro  $j$  na mistura

# Modelo de PL para a Mistura de Minérios com relaxação dos limites de especificação



$$\min \sum_{j \in \text{Parametros}} wpe_j dpe_j + \sum_{j \in \text{Parametros}} wne_j dne_j$$

Peso associado ao desvio negativo

$$\sum_{i \in \text{Pilhas}} (t_{ij} - tu_j) x_i - dpe_j \leq 0 \quad \forall j \in \text{Parametros}$$

Desvio positivo, em toneladas

Admite-se que a quantidade do parâmetro  $j$  na mistura supere em  $dpe_j$  toneladas a quantidade máxima admitida

$$\sum_{i \in \text{Pilhas}} (t_{ij} - tl_j) x_i + dne_j \geq 0 \quad \forall j \in \text{Parametros}$$

Desvio negativo, em toneladas

Admite-se que a quantidade do parâmetro  $j$  na mistura esteja  $dne_j$  toneladas abaixo da quantidade mínima permitida

$$x_i \leq Qu_i \quad \forall i \in \text{Pilhas}$$

A quantidade a ser retomada em cada pilha  $i$  está limitada à  $Qu_i$

$$\sum_{i \in \text{Pilhas}} x_i = p$$

A mistura deve ter peso total  $p$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in \text{Pilhas}$$

Não-negatividade

$$dne_j, dpe_j \geq 0 \quad \forall j \in \text{Parametros}$$

## Problema da Mistura de Minérios com metas de qualidade e relaxação dos limites de especificação



- Há um conjunto de 15 pilhas de minério
- Em cada pilha há uma composição química diferente (% de Fe,  $\text{Al}_2\text{O}_3$  etc.)
- É necessário formar 6000 toneladas de um produto com uma certa especificação
- Para cada parâmetro de controle são dados os limites inferior e superior de especificação, bem como as metas de qualidade para o produto formado
- Cada parâmetro de controle é classificado em 5 critérios: irrelevante, importante, muito importante, crítico e muito crítico
- O peso de desvio de meta é igual ao produto do peso critério pelo peso de comparação
- O peso de comparação serve para colocar cada parâmetro de controle em uma mesma ordem de grandeza
- Dentre as possíveis misturas que atendem a especificação requerida, o objetivo é encontrar aquela que esteja o mais próximo possível das metas de qualidade



## Mistura de Minérios com metas de qualidade e relaxação dos limites de especificação: dados de entrada

|                     | Fe     | Al2O3 | P      | PPC   | He  |
|---------------------|--------|-------|--------|-------|-----|
| Limite Superior     | 49,50% | 0,17% | 0,043% | 2,65% | 50% |
| Meta                | 47,00% | 0,15% | 0,040% | 2,35% | 40% |
| Limite Inferior     | 44,50% | 0,12% | 0,035% | 2,05% | 38% |
| Peso Critério       | 5      | 1     | 100    | 10    | 1   |
| Peso Comparação     | 1      | 100   | 1000   | 10    | 1   |
| Peso Desvio da Meta | 5      | 100   | 100000 | 100   | 1   |

| Critérios        | Pesos |
|------------------|-------|
| Irrelevante      | 0     |
| Importante       | 1     |
| Muito Importante | 5     |
| Crítico          | 10    |
| Muito Crítico    | 100   |

|          | Massa (t) | Fe (%) | Al2O3 (%) | P (%)  | PPC (%) | He (%) |
|----------|-----------|--------|-----------|--------|---------|--------|
| Pilha 1  | 1500      | 52,64% | 0,52%     | 0,084% | 4,48%   | 45%    |
| Pilha 2  | 2000      | 39,92% | 0,18%     | 0,029% | 0,65%   | 97%    |
| Pilha 3  | 1700      | 47,19% | 0,50%     | 0,050% | 2,52%   | 52%    |
| Pilha 4  | 1450      | 49,36% | 0,22%     | 0,039% | 1,74%   | 78%    |
| Pilha 5  | 1250      | 43,94% | 0,46%     | 0,032% | 2,36%   | 41%    |
| Pilha 6  | 1890      | 48,97% | 0,54%     | 0,057% | 4,34%   | 90%    |
| Pilha 7  | 1640      | 47,46% | 0,20%     | 0,047% | 5,07%   | 90%    |
| Pilha 8  | 1124      | 46,52% | 0,32%     | 0,039% | 3,51%   | 40%    |
| Pilha 9  | 1990      | 56,09% | 0,95%     | 0,059% | 4,10%   | 80%    |
| Pilha 10 | 900       | 46,00% | 0,26%     | 0,031% | 2,51%   | 21%    |
| Pilha 11 | 1540      | 49,09% | 0,22%     | 0,040% | 4,20%   | 12%    |
| Pilha 12 | 1630      | 49,77% | 0,20%     | 0,047% | 4,81%   | 12%    |
| Pilha 13 | 1320      | 53,03% | 0,24%     | 0,047% | 4,17%   | 1%     |
| Pilha 14 | 1245      | 52,96% | 0,29%     | 0,052% | 4,81%   | 1%     |
| Pilha 15 | 1859      | 42,09% | 0,17%     | 0,031% | 1,38%   | 47%    |

## Mistura de Minérios com metas de qualidade e relaxação dos limites de especificação: modelo de PL



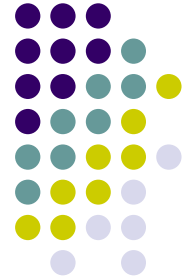
Dados de entrada:

- Pilhas = Conjunto de pilhas
- Parametros = Conjunto dos parâmetros de controle
- $t_{ij}$  = % do parâmetro de controle  $j$  em uma tonelada da pilha  $i$
- $tl_j$  = % mínimo admissível para o parâmetro  $j$
- $tu_j$  = % máximo admissível para o parâmetro  $j$
- $tr_j$  = % recomendada para o parâmetro  $j$
- $Qu_i$  = Quantidade máxima de minério, em toneladas, existente na pilha  $i$
- $p$  = quantidade, em toneladas, da mistura a ser formada
- $wnm_j$  = Peso para o desvio negativo (de meta) do parâmetro  $j$  na mistura
- $wpm_j$  = Peso para o desvio positivo (de meta) do parâmetro  $j$  na mistura
- $wne_j$  = Peso para o desvio negativo (de especificação) do parâmetro  $j$  na mistura
- $wpe_j$  = Peso para o desvio positivo (de especificação) do parâmetro  $j$  na mistura

Variáveis de decisão:

- $x_i$  = Quantidade de minério a ser retirado da pilha  $i$
- $dnm_j$  = Desvio negativo (de meta), em toneladas, do parâmetro  $j$  na mistura
- $dpm_j$  = Desvio positivo (de meta), em toneladas, do parâmetro  $j$  na mistura
- $dne_j$  = Desvio negativo (de especificação), em toneladas, do parâmetro  $j$  na mistura
- $dpe_j$  = Desvio positivo (de especificação), em toneladas, do parâmetro  $j$  na mistura

## Mistura de Minérios com metas de qualidade e relaxação dos limites de especificação: modelo de PL



$$\min \sum_{j \in \text{Parametros}} (wpe_j dpe_j + wne_j dne_j + wpm_j dpm_j + wnm_j dnm_j)$$

$$\sum_{i \in \text{Pilhas}} (t_{ij} - tu_j) x_i - dpe_j \leq 0 \quad \forall j \in \text{Parametros}$$

Admite-se que a quantidade do parâmetro  $j$  na mistura supere a quantidade máxima permitida em  $dp_j$  ton.

$$\sum_{i \in \text{Pilhas}} (t_{ij} - tl_j) x_i + dne_j \geq 0 \quad \forall j \in \text{Parametros}$$

Admite-se que a quantidade do parâmetro  $j$  na mistura seja inferior à quantidade mínima permitida em  $dn_j$  ton.

$$\sum_{i \in \text{Pilhas}} (t_{ij} - tr_j) x_i + dnm_j - dpm_j = 0 \quad \forall j \in \text{Parametros}$$

Admite-se que haja excesso ( $dpm_j$ ) ou falta ( $dnm_j$ ) no parâmetro  $j$  na mistura em relação à quantidade recomendada

$$x_i \leq Qu_i \quad \forall i \in \text{Pilhas}$$

A quantidade a ser retomada em cada pilha  $i$  está limitada à  $Qu_i$

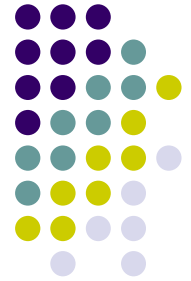
$$\sum_{i \in \text{Pilhas}} x_i = p$$

A mistura total deve ter peso total  $p$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in \text{Pilhas}$$

Não-negatividade

$$dne_j, dpe_j, dnm_j, dpm_j \geq 0 \quad \forall j \in \text{Parametros}$$

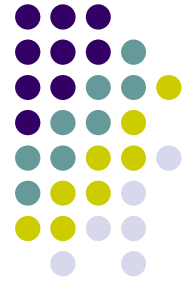


# Resolução gráfica de PPL's

- Passos para resolver graficamente um PPL:
  - a) Determinar o gradiente da função objetivo  
(Gradiente é perpendicular à reta definida pela função objetivo)
  - b) Caminhar no sentido e direção do gradiente da função objetivo até tangenciar a região viável
  - c) O ponto de tangência representa a solução ótima  $x^*$



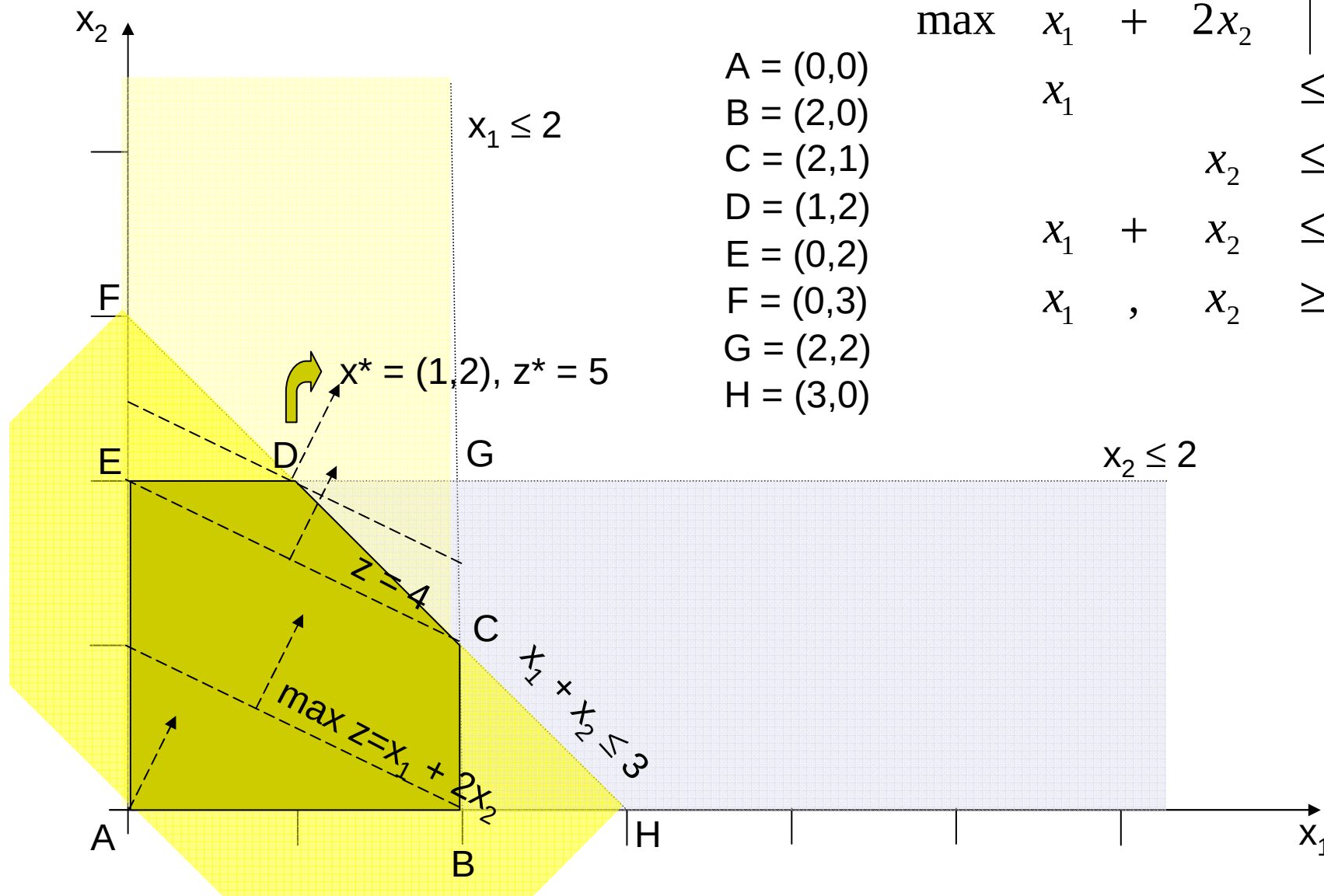
# Fundamentação do Método SIMPLEX



Seja resolver o seguinte PPL:

$$\begin{array}{rcll} \max & x_1 & + & 2x_2 \\ & x_1 & & \leq 2 \\ & & x_2 & \leq 2 \\ & x_1 & + & x_2 \leq 3 \\ & x_1 & , & x_2 \geq 0 \end{array}$$

# Fundamentação do Método SIMPLEX



$$\begin{array}{llll} \max & x_1 & + & 2x_2 \\ & x_1 & & \leq 2 \\ & & x_2 & \leq 2 \\ & x_1 & + & x_2 \leq 3 \\ & x_1 & , & x_2 \geq 0 \end{array}$$

# Teorema Fundamental da Programação Linear



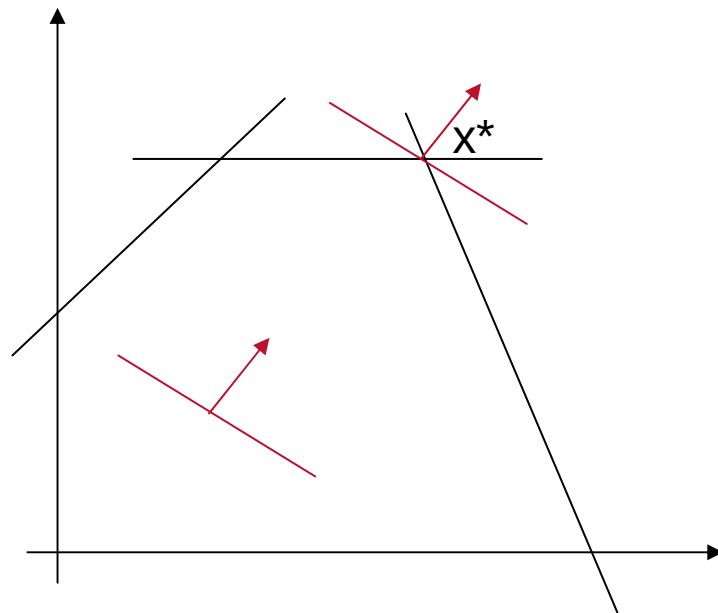
- O ótimo de um PPL, se existir, ocorre em pelo menos um vértice do conjunto de soluções viáveis.
- Situações que podem ocorrer com relação ao conjunto  $M$  de soluções viáveis:
  - 1)  $M = \{\}$   
Neste caso não há solução viável  $\Rightarrow$  Não há solução ótima

# Teorema Fundamental da Programação Linear

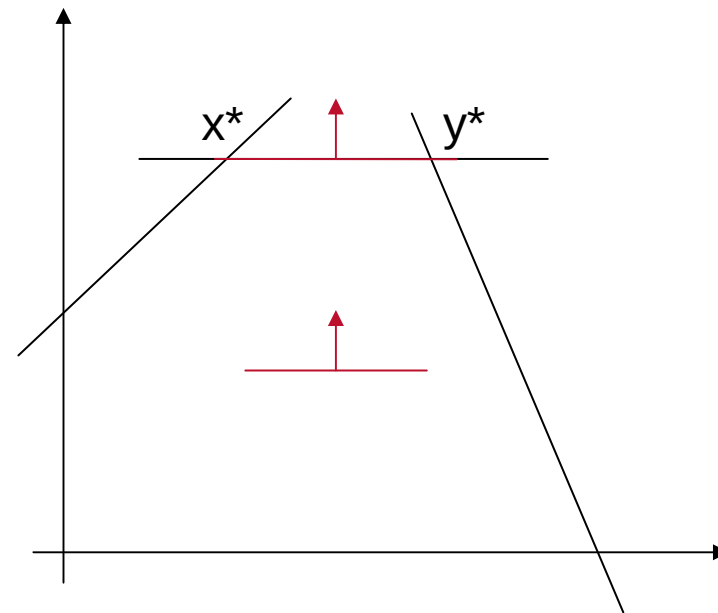


2)  $M$  é não vazio

a)  $M$  é limitado



Única solução ótima, a qual é vértice



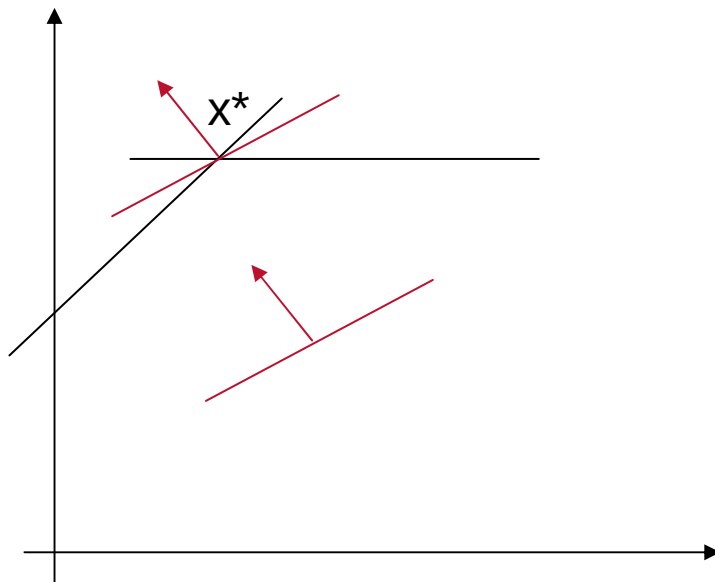
Infinidade de soluções ótimas, sendo duas vértices

# Teorema Fundamental da Programação Linear

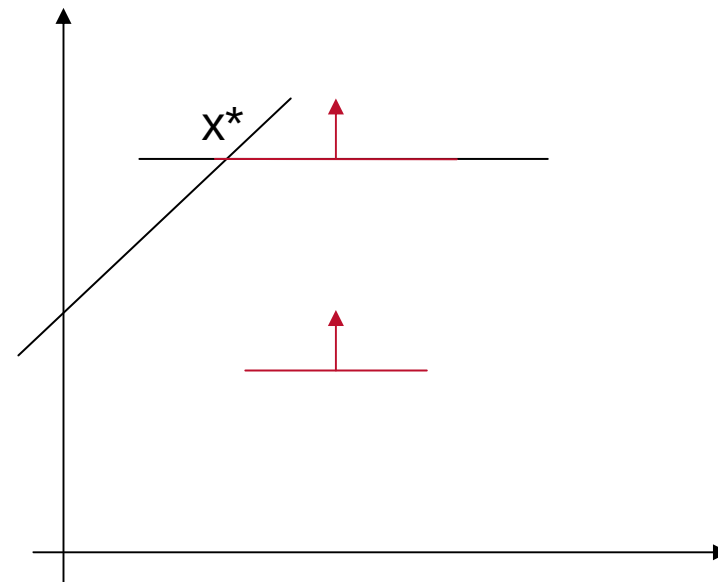


2)  $M$  é não vazio

b)  $M$  é ilimitado



Única solução ótima, a qual é vértice



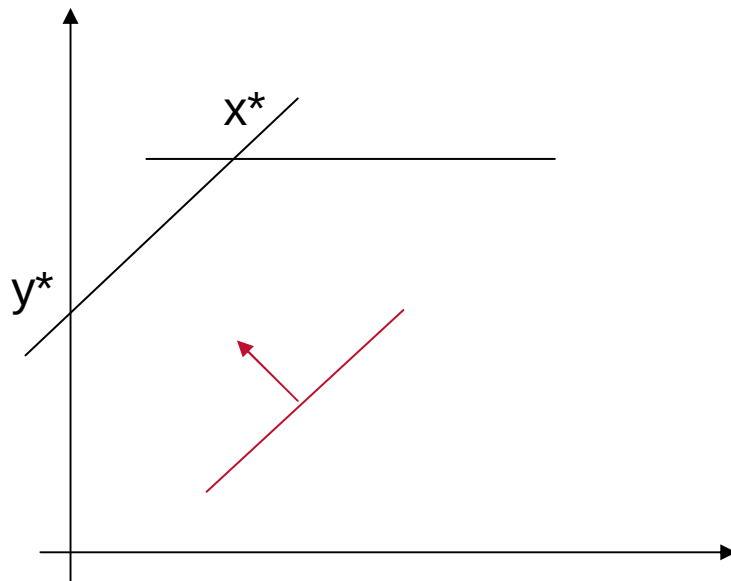
Infinidade de soluções ótimas, sendo uma vértice

# Teorema Fundamental da Programação Linear

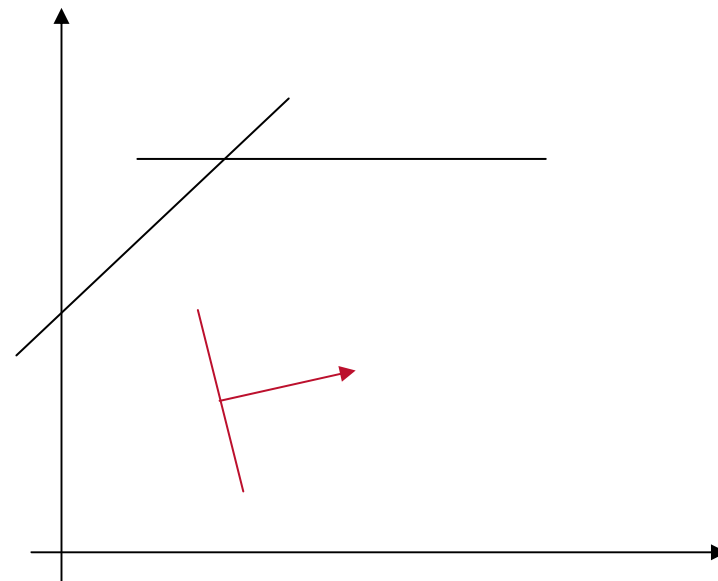


2) M é não vazio

b) M é ilimitado



Infinidade de soluções ótimas,  
sendo duas vértices



Não há soluções ótimas



# Forma-padrão de um PPL

- PPL está na forma-padrão quando é posto na forma:

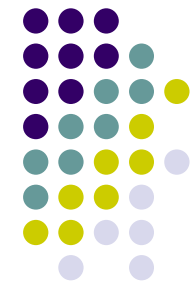
$$(\min) \text{ ou } (\max) z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$\text{sendo } b_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

# Redução de um PPL qualquer à forma-padrão



- Restrições do tipo  $\leq$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5 \quad \longrightarrow \quad 2x_1 + 3x_2 + \underbrace{x_3}_{x_3 \geq 0} = 5$$

- Restrições do tipo  $\geq$

$$x_1 + 6x_2 \geq 7 \quad \longrightarrow \quad x_1 + 6x_2 - \underbrace{x_4}_{x_4 \geq 0} = 7$$



# Redução de um PPL qualquer à forma-padrão



- Existe  $b_i < 0$

Solução: Basta multiplicar restrição  $i$  por  $-1$

- Existem variáveis não-positivas:

Seja  $x_k \leq 0$ :

Solução: Criar variável  $x_k'$  tal que  $x_k' = -x_k$

Assim, modelo terá variável  $x_k' \geq 0$

# Redução de um PPL qualquer à forma-padrão



- Existem variáveis livres, isto é, variáveis  $x_k$  que podem assumir qualquer valor real (negativo, nulo ou positivo):

Solução: Substituir  $x_k$  por  $x_k' - x_k''$ , com  $x_k' \geq 0$  e  $x_k'' \geq 0$

$$x_k' > x_k'' \Leftrightarrow x_k > 0$$

$$x_k' = x_k'' \Leftrightarrow x_k = 0$$

$$x_k' < x_k'' \Leftrightarrow x_k < 0$$

- PPL é de maximização:

$$\max f(x) = - \min \{-f(x)\}$$

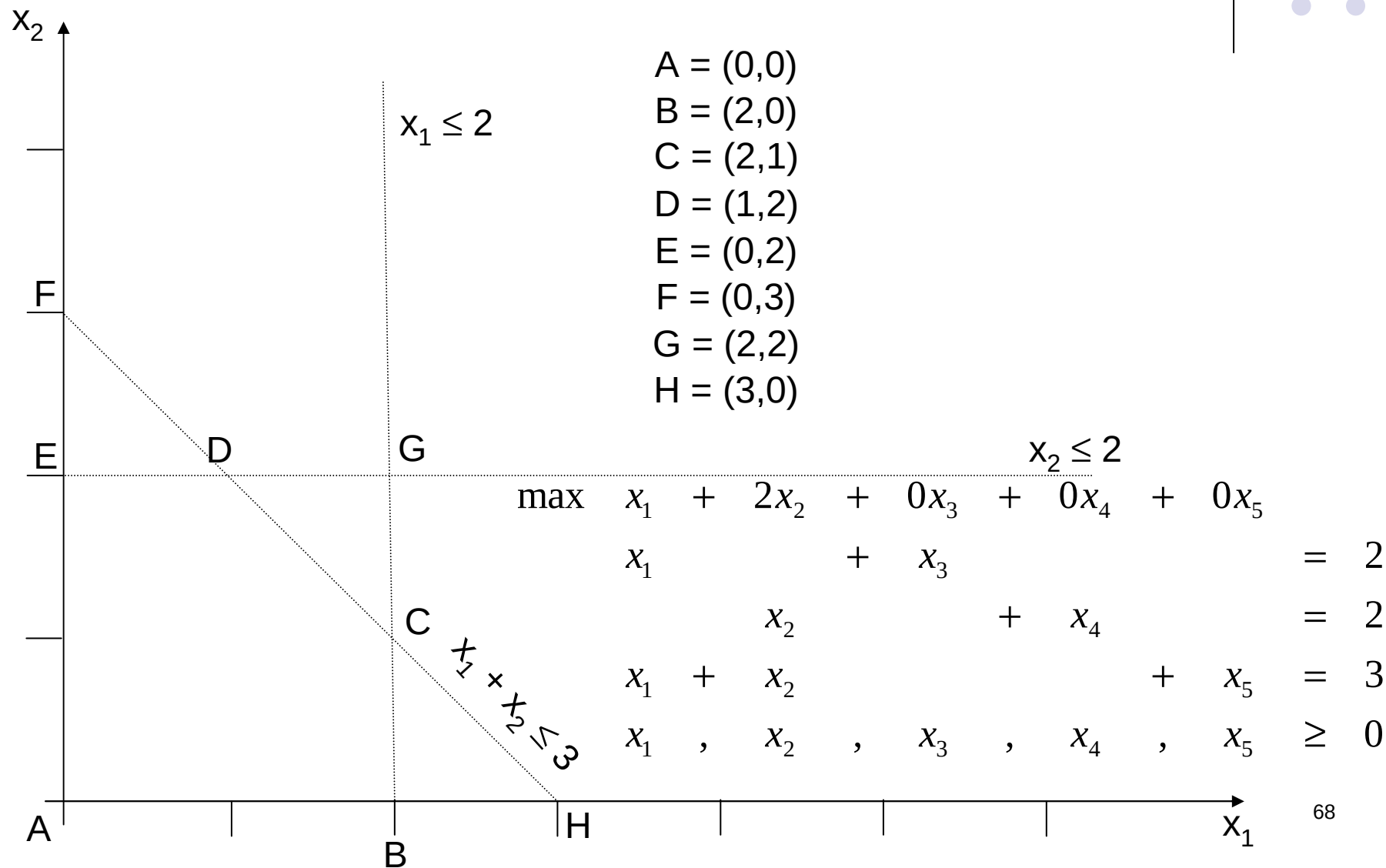
# Caracterização de vértice

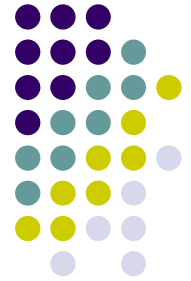


$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ & x_1 + x_3 = 2 \\ & x_2 + x_4 = 2 \\ & x_1 + x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_b$$

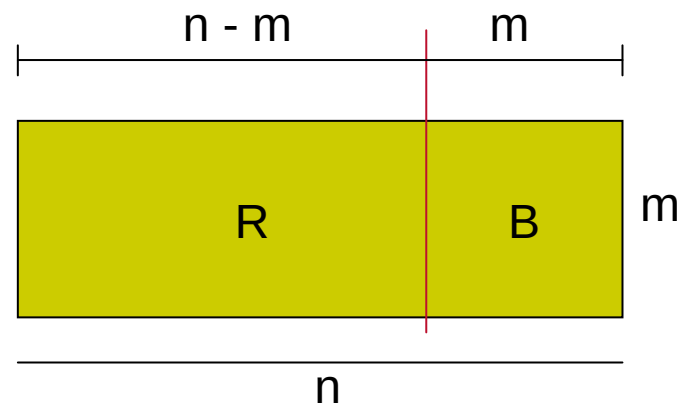
# Caracterização de vértice

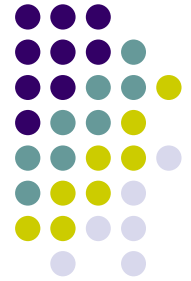




# Caracterização de vértice

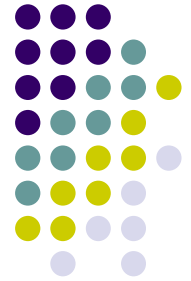
- Em um ponto no interior do conjunto (não pertencente a nenhuma aresta) não há variáveis nulas
- Em uma aresta há, pelo menos, uma variável nula
- Em um vértice há, pelo menos,  $n-m$  variáveis nulas





# Caracterização de vértice

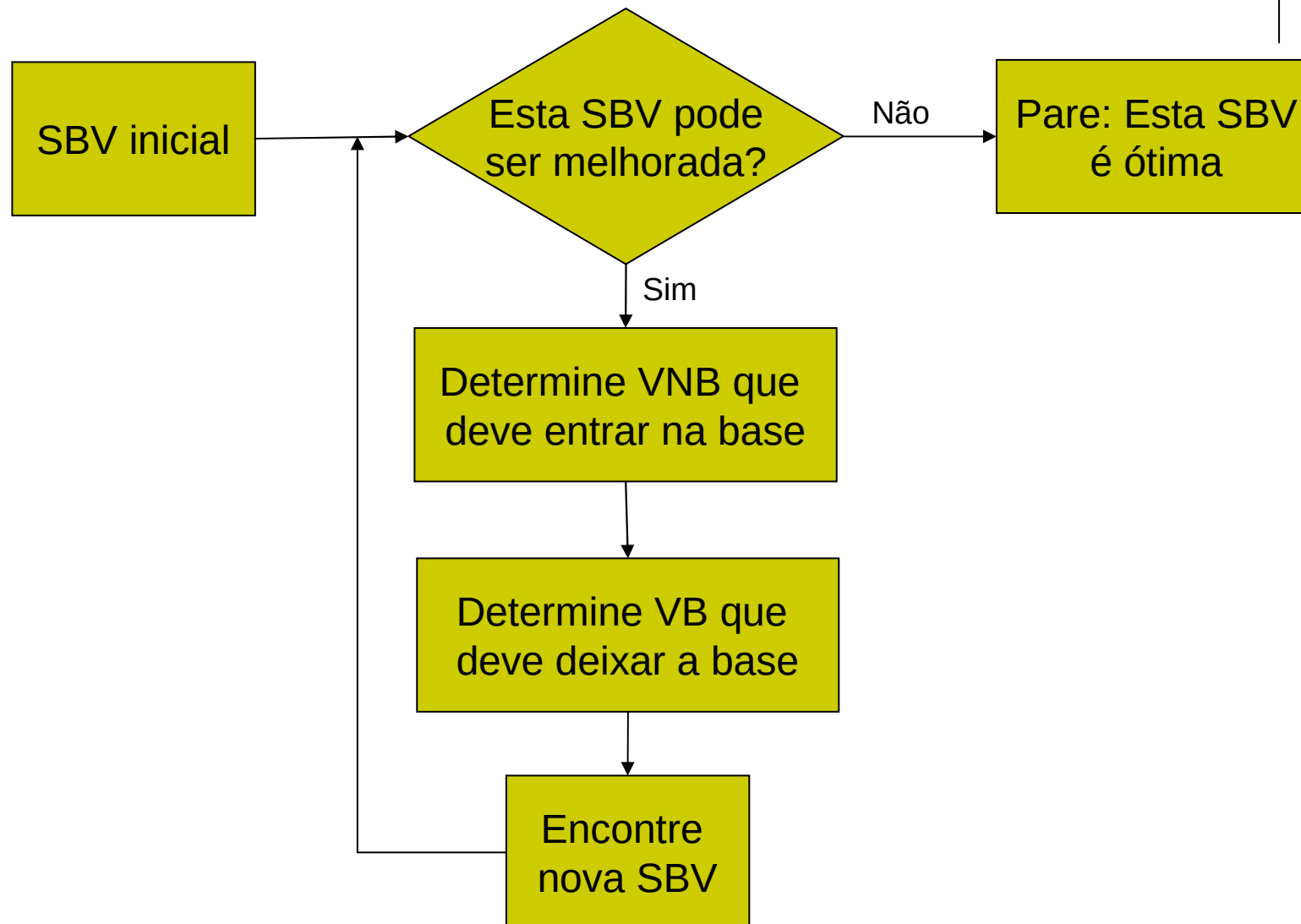
- Para gerar um vértice:
  - Escolher uma matriz não-singular  $B$  tal que:
$$Bx^B + Rx^R = b$$
  - Fazer  $x^R = 0$
  - Se ao resolver o sistema  $Bx^B = b$ , for obtido  $x^B \geq 0$ , então  $x = (x^B \ x^R)^t = (x^B \ 0)^t$  é vértice
- Deste procedimento resulta uma **Solução Básica Viável (SBV)**, com o significado geométrico de **vértice**.



# Definições

- $B =$  base
- $x = (x^B \ x^R)^t$ 
  - $x^B =$  vetor das variáveis básicas
  - $x^R =$  vetor das variáveis não-básicas
- Solução Básica (SB): vetor  $x$  tal que
$$Bx^B = b \text{ e } x^R = 0$$
- Solução Básica Viável (SBV): vetor  $x$  tal que
$$Bx^B = b; \ x^B \geq 0 \text{ e } x^R = 0$$
- Solução Básica Viável Degenerada (SBVD): É uma SBV em que existe variável básica nula

# Princípio de funcionamento do Algoritmo SIMPLEX





# Princípio de funcionamento do Algoritmo SIMPLEX



$$\begin{array}{rcl}
 \max & x_1 + 2x_2 & = z \\
 & x_1 & \leq 2 \\
 & & x_2 \leq 2 \\
 & x_1 + x_2 & \leq 3 \\
 & x_1, x_2 & \geq 0
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad
 \begin{array}{rcl}
 \max & x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 & = z \\
 & x_1 + x_3 & = 2 \\
 & & x_2 + x_4 = 2 \\
 & x_1 + x_2 + x_5 & = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0
 \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_b$$

# Princípio de funcionamento do Algoritmo SIMPLEX



| VB    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |   |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|
| $x_3$ | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 2 |
| $x_4$ | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 2 |
| $x_5$ | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 3 |
|       | 1     | 2     | 0     | 0     | 0     | z |

PPL na forma canônica: Base é a identidade e coeficientes das VB's na função objetivo são todos nulos.

# Princípio de funcionamento do Algoritmo SIMPLEX



| VB    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |     |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $x_3$ | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 2   |
| $x_4$ | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 2   |
| $x_5$ | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 3   |
|       | 1     | 2     | 0     | 0     | 0     | $z$ |

$$VB = \{x_3 = 2, x_4 = 2, x_5 = 3\}$$

Solução inicial:

$$VNB = \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$$

$$x^{(0)} = (0 \ 0 \ 2 \ 2 \ 3)^t ; z = 0^{75}$$

# Princípio de funcionamento do Algoritmo SIMPLEX




|   | VB              | $x_1$ | $x_2$                                                                              | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |   |
|---|-----------------|-------|------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|---|
|   | ( $L_1$ ) $x_3$ | 1     | 0                                                                                  | 1     | 0     | 0     | 2 |
| ← | ( $L_2$ ) $x_4$ | 0     |  | 0     | 1     | 0     | 2 |
|   | ( $L_3$ ) $x_5$ | 1     | 1                                                                                  | 0     | 0     | 1     | 3 |
|   | ( $L_4$ )       | 1     | 2                                                                                  | 0     | 0     | 0     | z |

Transformações  
elementares:

$$L_3 \leftarrow -L_2 + L_3$$

$$L_4 \leftarrow -2L_2 + L_4$$

# Princípio de funcionamento do Algoritmo SIMPLEX



|                   | VB    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |       |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| (L <sub>1</sub> ) | $x_3$ | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 2     |
| (L <sub>2</sub> ) | $x_2$ | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 2     |
| (L <sub>3</sub> ) | $x_5$ | 1     | 0     | 0     | -1    | 1     | 1     |
| (L <sub>4</sub> ) |       | 1     | 0     | 0     | -2    | 0     | $z-4$ |

$$VB = \{x_3 = 2, x_2 = 2, x_5 = 1\}$$

$$VNB = \{x_1 = 0, x_4 = 0\}$$

Final da Iteração 1:

$$x^{(1)} = (0 \ 2 \ 2 \ 0 \ 1)^t ; z = 4^{77}$$

# Princípio de funcionamento do Algoritmo SIMPLEX



|   | VB              | $x_1$                                                                              | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |       |
|---|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|   | ( $L_1$ ) $x_3$ | 1                                                                                  | 0     | 1     | 0     | 0     | 2     |
|   | ( $L_2$ ) $x_2$ | 0                                                                                  | 1     | 0     | 1     | 0     | 2     |
| ← | ( $L_3$ ) $x_5$ |  | 0     | 0     | -1    | 1     | 1     |
|   | ( $L_4$ )       | 1                                                                                  | 0     | 0     | -2    | 0     | $z-4$ |

$$L_1 \leftarrow -L_3 + L_1$$

$$L_4 \leftarrow -L_3 + L_4$$

# Princípio de funcionamento do Algoritmo SIMPLEX



|                   | VB    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |       |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| (L <sub>1</sub> ) | $x_3$ | 0     | 0     | 1     | 1     | -1    | 1     |
| (L <sub>2</sub> ) | $x_2$ | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 2     |
| (L <sub>3</sub> ) | $x_1$ | 1     | 0     | 0     | -1    | 1     | 1     |
| (L <sub>4</sub> ) |       | 0     | 0     | 0     | -1    | -1    | $z-5$ |

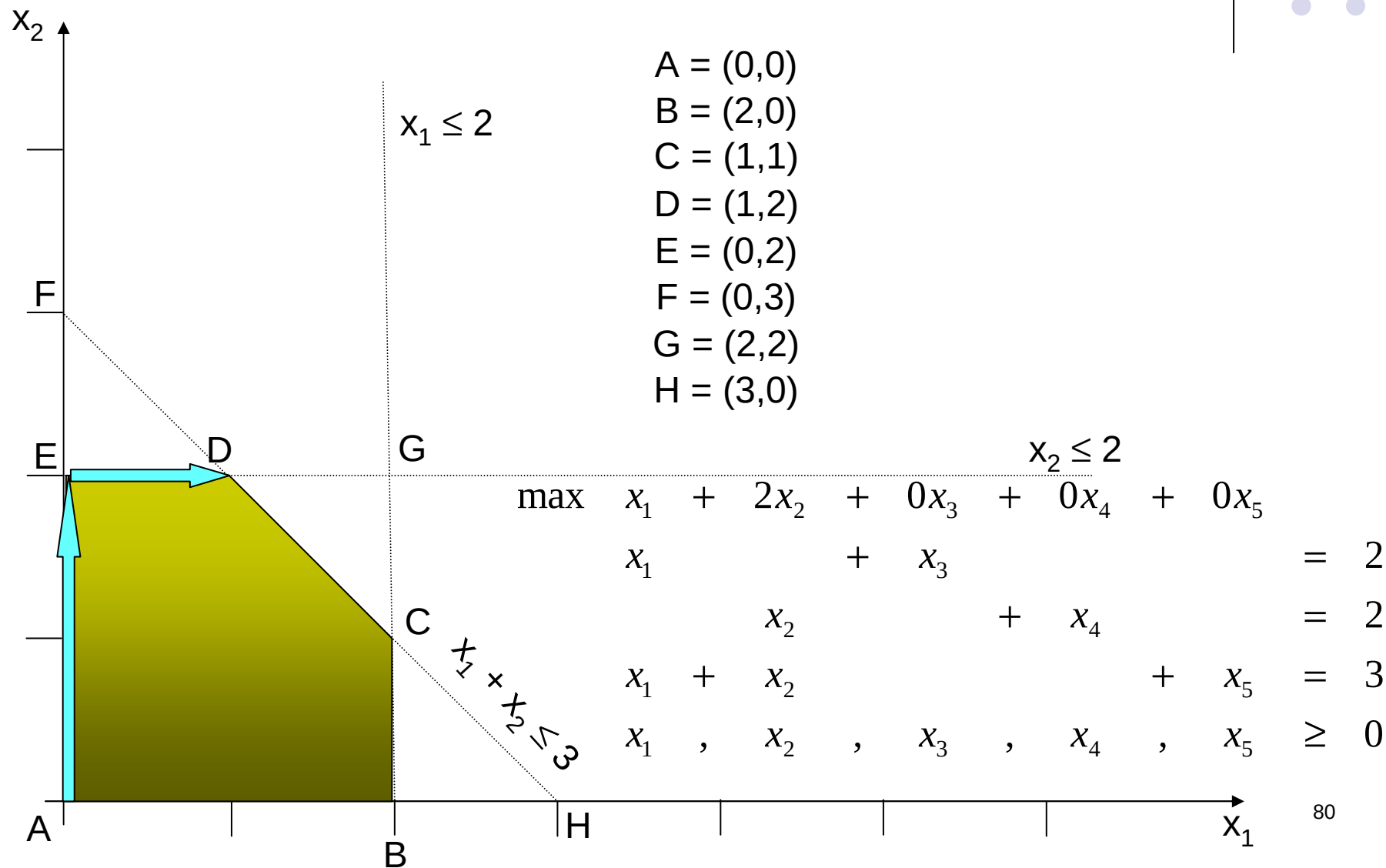
$$VB = \{x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1\}$$

$$VNB = \{x_4 = 0, x_5 = 0\}$$

Final da Iteração 2:

$$x^{(2)} = (1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0)^t ; z = 5^{79}$$

# Interpretação geométrica





# Situação em que a origem não pode ser solução inicial:

## Exemplo 2



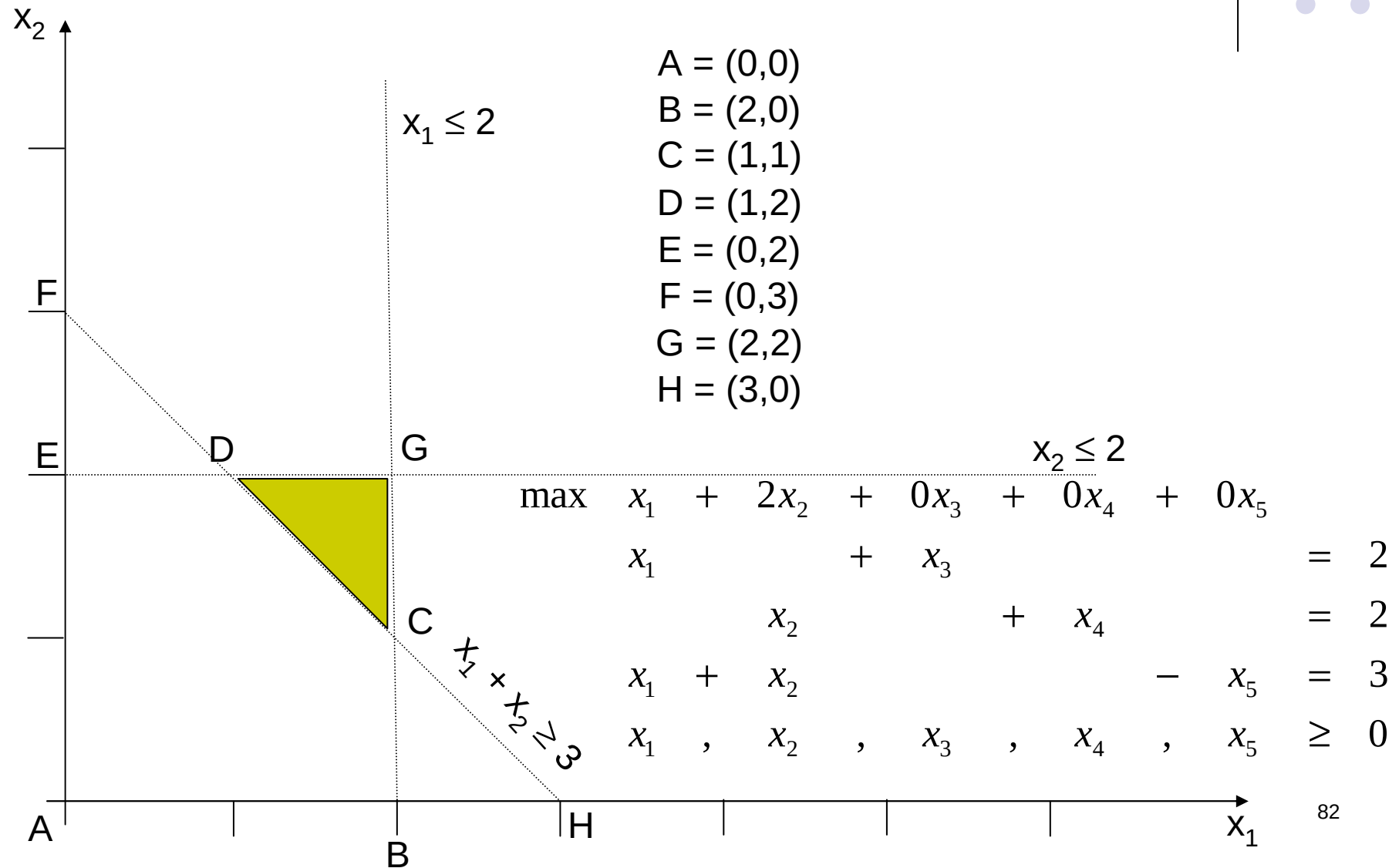
$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 = z \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = z \\ & x_1 + x_3 = 2 \\ & x_2 + x_4 = 2 \\ & x_1 + x_2 - x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_b$$

# Método das Duas Fases





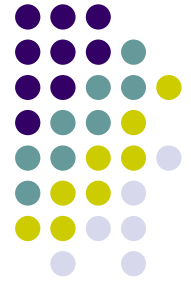
# Método das Duas Fases

- Primeira fase (Criar problema auxiliar P'):
  - Introduzir variáveis de folga e variáveis artificiais
  - Variáveis de folga: introduzidas quando há variáveis do tipo  $\geq$  ou  $\leq$
  - Variáveis artificiais: introduzidas quando há restrições do tipo  $\geq$  ou  $=$
  - Criar função objetivo artificial:

$$z^a = \sum_i x_i^a \quad \forall i$$

- Variáveis básicas iniciais: variáveis de folga associadas às restrições  $\leq$  e variáveis artificiais
- Objetivo da primeira fase: minimizar a função objetivo artificial
- Caminhar de SBV em SBV de P' até alcançar SBV do problema original P (situação que ocorre quando todas as variáveis artificiais são nulas).

# Método das Duas Fases



- Segunda fase:
  - A partir de uma SBV do problema original P, gerar SBV cada vez melhores até se atingir a solução ótima.
- Aplicando o método das duas fases ao PPL dado, tem-se:

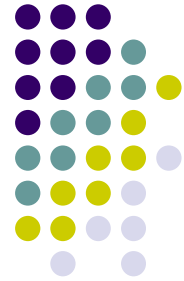
$$\begin{array}{llllllllll} \min & 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 1x_1^a & = & z^a \\ \max & x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 0x_1^a & = & z \\ & x_1 & & & & + & x_3 & & & & & & = & 2 \\ & & & x_2 & & & & + & x_4 & & & & = & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & & & & - & x_5 & + & x_1^a & = & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_1^a & \geq & 0 \end{array}$$



# Método das Duas Fases

| VB              | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_1^a$ |       |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|-------|
| $(L_1)$ $x_3$   | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0       | 2     |
| $(L_2)$ $x_4$   | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0       | 2     |
| $(L_3)$ $x_1^a$ | 1     | 1     | 0     | 0     | -1    | 1       | 3     |
| $(L_4)$         | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1       | $z^a$ |
| $(L_5)$         | 1     | 2     | 0     | 0     | 0     | 0       | $z$   |

Redução à forma canônica:  $L_4 \leftarrow -L_3 + L_4$



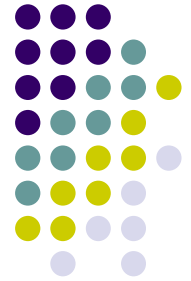
# Método das Duas Fases

|                    | VB      | $x_1$                                                                             | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_1^a$ |           |
|--------------------|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|---------|-----------|
| $\leftarrow (L_1)$ | $x_3$   |  | 0     | 1     | 0     | 0     | 0       | 2         |
| $(L_2)$            | $x_4$   | 0                                                                                 | 1     | 0     | 1     | 0     | 0       | 2         |
| $(L_3)$            | $x_1^a$ | 1                                                                                 | 1     | 0     | 0     | -1    | 1       | 3         |
| $(L_4)$            |         | -1                                                                                | -1    | 0     | 0     | 1     | 0       | $z^a - 3$ |
| $(L_5)$            |         | 1                                                                                 | 2     | 0     | 0     | 0     | 0       | $z$       |

$$L_3 \leftarrow -L_1 + L_3$$

$$L_4 \leftarrow L_1 + L_4$$

$$L_5 \leftarrow -L_1 + L_5$$



# Método das Duas Fases



|         | VB      | $x_1$ | $x_2$                                                                              | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_1^a$ |           |
|---------|---------|-------|------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|---------|-----------|
| $(L_1)$ | $x_1$   | 1     | 0                                                                                  | 1     | 0     | 0     | 0       | 2         |
| $(L_2)$ | $x_4$   | 0     | 1                                                                                  | 0     | 1     | 0     | 0       | 2         |
| $(L_3)$ | $x_1^a$ | 0     |  | -1    | 0     | -1    | 1       | 1         |
| $(L_4)$ |         | 0     | -1                                                                                 | 2     | 0     | 1     | 0       | $z^a - 1$ |
| $(L_5)$ |         | 0     | 2                                                                                  | -1    | 0     | 0     | 0       | $z - 2$   |



$$L_2 \leftarrow -L_3 + L_2$$

$$L_4 \leftarrow L_3 + L_4$$

$$L_5 \leftarrow -2L_3 + L_5^{87}$$



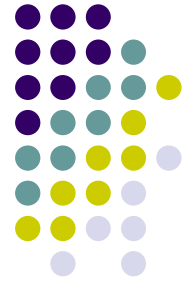
# Método das Duas Fases

| VB            | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_1^a$ |       |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|-------|
| $(L_1)$ $x_1$ | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0       | 2     |
| $(L_2)$ $x_4$ | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | -1      | 1     |
| $(L_3)$ $x_2$ | 0     | 1     | -1    | 0     | -1    | 1       | 1     |
| $(L_4)$       | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 1       | $z^a$ |
| $(L_5)$       | 0     | 0     | 1     | 0     | 2     | -2      | $z-4$ |

Fim da primeira fase:  $z^a = 0$

$x = (2, 1); z = 4$





# Método das Duas Fases



|         | VB    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$                                                                               |       |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| $(L_1)$ | $x_1$ | 1     | 0     | 1     | 0     | 0                                                                                   | 2     |
| $(L_2)$ | $x_4$ | 0     | 0     | 1     | 1     |  | 1     |
| $(L_3)$ | $x_2$ | 0     | 1     | -1    | 0     | -1                                                                                  | 1     |
| $(L_4)$ |       | 0     | 0     | 1     | 0     | 2                                                                                   | $z-4$ |



$$L_3 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$L_4 \leftarrow -2L_2 + L_4$$

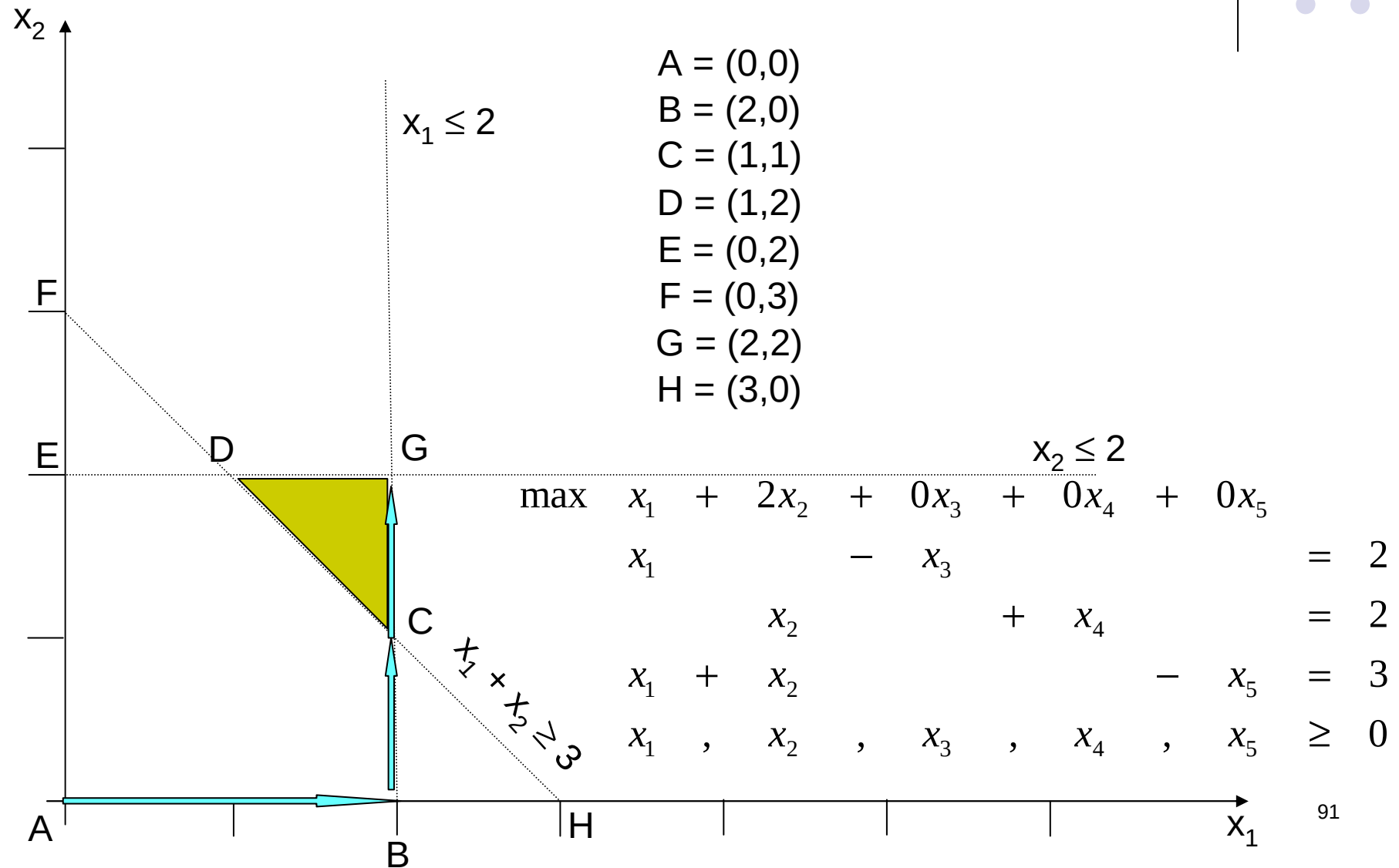


# Método das Duas Fases

| VB      |       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |       |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $(L_1)$ | $x_1$ | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 2     |
| $(L_2)$ | $x_5$ | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     |
| $(L_3)$ | $x_2$ | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 2     |
| $(L_4)$ |       | 0     | 0     | -1    | -2    | 0     | $z-6$ |

Solução ótima:  $x^* = (2,2)$ ;  $z^* = 6$

# Método das Duas Fases: Interpretação Geométrica



# Outro exemplo de aplicação do Método das Duas Fases:

## Exemplo 3



$$\begin{array}{llll} \max & x_1 & + & 2x_2 & = & z \\ & x_1 & & & & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$



$$\begin{array}{llllllll} \max & x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & = & z \\ & x_1 & & & & - & x_3 & & & & = & 2 \\ & & & x_2 & & & & + & x_4 & & = & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & & & & & & - & x_5 & = & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_b$$

# Método das Duas Fases:

## Exemplo 3



- Introduzindo variáveis artificiais no PPL dado, tem-se:

$$\begin{array}{lcl}
 \min & 0x_1 & + \quad 0x_2 & + \quad 0x_3 & + \quad 0x_4 & + \quad 0x_5 & + \quad 1x_1^a & + \quad 1x_2^a & = & z^a \\
 \max & x_1 & + \quad 2x_2 & + \quad 0x_3 & + \quad 0x_4 & + \quad 0x_5 & + \quad 0x_1^a & + \quad 0x_2^a & = & z \\
 & x_1 & & - \quad x_3 & & & + \quad x_1^a & & = & 2 \\
 & & x_2 & & + \quad x_4 & & & & = & 2 \\
 & x_1 & + \quad x_2 & & & - \quad x_5 & & + \quad x_2^a & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_1^a & , & x_2^a & \geq & 0
 \end{array}$$



# Método das Duas Fases

| VB              | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_1^a$ | $x_2^a$ |       |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|---------|-------|
| $(L_1)$ $x_1^a$ | 1     | 0     | -1    | 0     | 0     | 1       | 0       | 2     |
| $(L_2)$ $x_4$   | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0       | 0       | 2     |
| $(L_3)$ $x_2^a$ | 1     | 1     | 0     | 0     | -1    | 0       | 1       | 3     |
| $(L_4)$         | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1       | 1       | $z^a$ |
| $(L_5)$         | 1     | 2     | 0     | 0     | 0     | 0       | 0       | $z$   |

Transf. para forma canônica:

$$L_4 \leftarrow -L_1 - L_3 + L_4$$



# Método das Duas Fases



|           | VB      | $x_1$                                                                             | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_1^a$ | $x_2^a$ |           |
|-----------|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|---------|---------|-----------|
| ← $(L_1)$ | $x_1^a$ |  | 0     | -1    | 0     | 0     | 1       | 0       | 2         |
| $(L_2)$   | $x_4$   | 0                                                                                 | 1     | 0     | 1     | 0     | 0       | 0       | 2         |
| $(L_3)$   | $x_2^a$ | 1                                                                                 | 1     | 0     | 0     | -1    | 0       | 1       | 3         |
| $(L_4)$   |         | -2                                                                                | -1    | 1     | 0     | 1     | 0       | 0       | $z^a - 5$ |
| $(L_5)$   |         | 1                                                                                 | 2     | 0     | 0     | 0     | 0       | 0       | $z$       |

$$L_3 \leftarrow -L_1 + L_3$$

$$L_4 \leftarrow 2L_1 + L_4$$

$$L_5 \leftarrow -L_1 + L_5^{95}$$



# Método das Duas Fases



|                                                                                           | VB      | $x_1$ | $x_2$                                                                             | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_1^a$ | $x_2^a$ |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|---------|-------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|---------|---------|-----------|
| $(L_1)$                                                                                   | $x_1$   | 1     | 0                                                                                 | -1    | 0     | 0     | 1       | 0       | 2         |
| $(L_2)$                                                                                   | $x_4$   | 0     | 1                                                                                 | 0     | 1     | 0     | 0       | 0       | 2         |
|  $(L_3)$ | $x_2^a$ | 0     |  | 1     | 0     | -1    | -1      | 1       | 1         |
| $(L_4)$                                                                                   |         | 0     | -1                                                                                | -1    | 0     | 1     | 2       | 0       | $z^a - 1$ |
| $(L_5)$                                                                                   |         | 0     | 2                                                                                 | 1     | 0     | 0     | -1      | 0       | $z - 2$   |

$$L_2 \leftarrow -L_3 + L_2$$

$$L_4 \leftarrow L_3 + L_4$$

$$L_5 \leftarrow -2L_3 + L_5^{96}$$



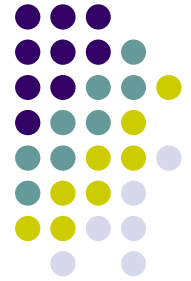


# Método das Duas Fases

| VB            | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_1^a$ | $x_2^a$ |       |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|---------|-------|
| $(L_1)$ $x_1$ | 1     | 0     | -1    | 0     | 0     | 1       | 0       | 2     |
| $(L_2)$ $x_4$ | 0     | 0     | -1    | 1     | 1     | 1       | -1      | 1     |
| $(L_3)$ $x_2$ | 0     | 1     | 1     | 0     | -1    | -1      | 1       | 1     |
| $(L_4)$       | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1       | 1       | $z^a$ |
| $(L_5)$       | 0     | 0     | -1    | 0     | 2     | 1       | -2      | $z-4$ |

Fim da primeira fase:  $z^a = 0$

$x = (2, 1); z = 4$



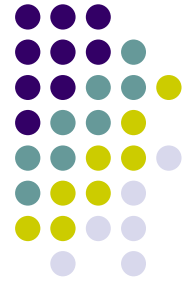
# Método das Duas Fases



|                                                                                           | VB    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$                                                                               |       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| $(L_1)$                                                                                   | $x_1$ | 1     | 0     | -1    | 0     | 0                                                                                   | 2     |
|  $(L_2)$ | $x_4$ | 0     | 0     | -1    | 1     |  | 1     |
| $(L_3)$                                                                                   | $x_2$ | 0     | 1     | 1     | 0     | -1                                                                                  | 1     |
| $(L_4)$                                                                                   |       | 0     | 0     | -1    | 0     | 2                                                                                   | $z-4$ |

$$L_3 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$L_4 \leftarrow -2L_2 + L_4$$



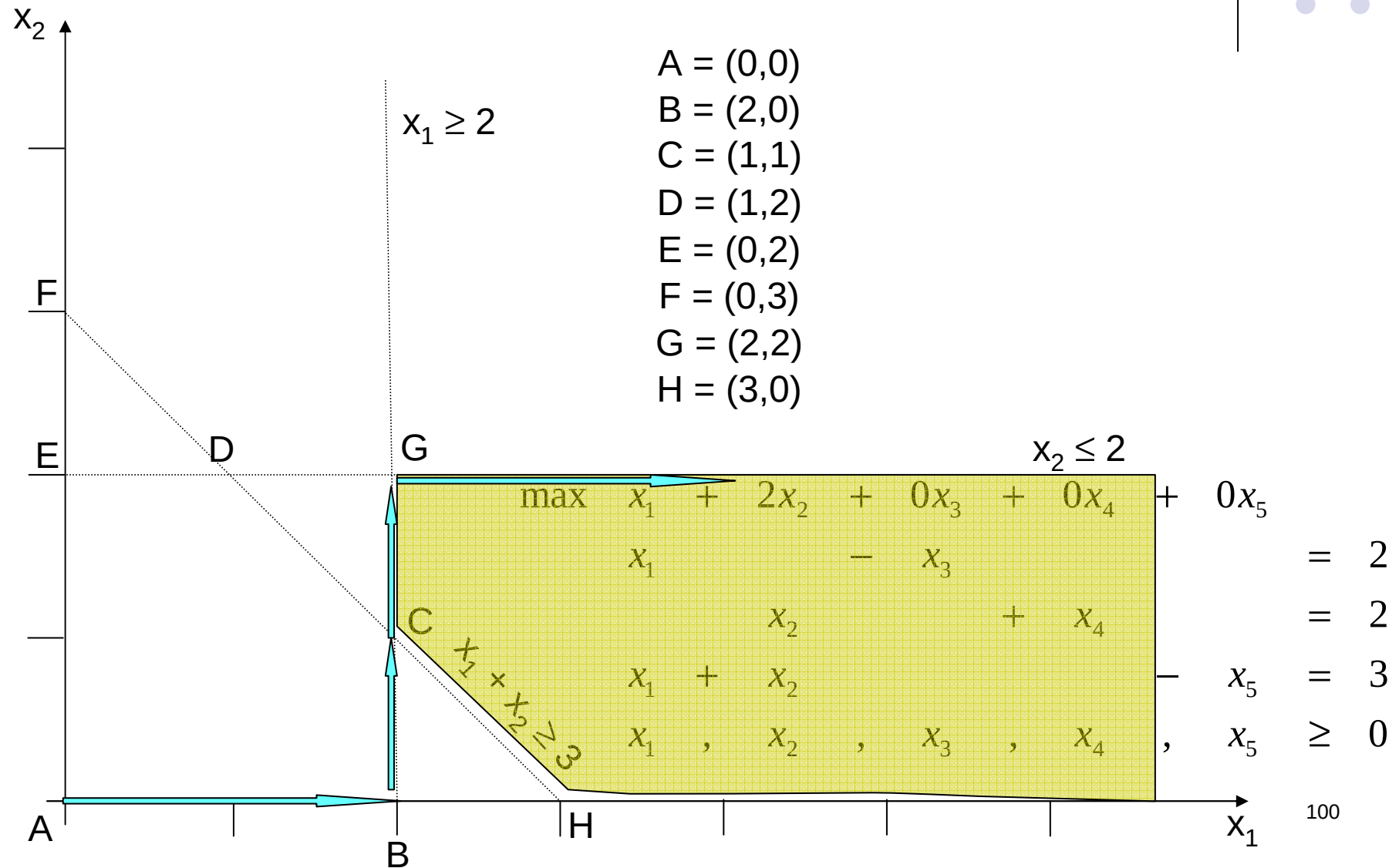
# Método das Duas Fases

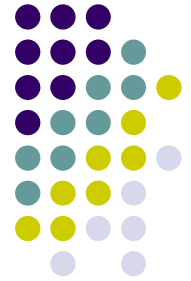


| VB                |       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |       |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| (L <sub>1</sub> ) | $x_1$ | 1     | 0     | -1    | 0     | 0     | 2     |
| (L <sub>2</sub> ) | $x_5$ | 0     | 0     | -1    | 1     | 1     | 1     |
| (L <sub>3</sub> ) | $x_2$ | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 2     |
| (L <sub>4</sub> ) |       | 0     | 0     | 1     | -2    | 0     | $z-6$ |

$x_3$  pode entrar na base melhorando o valor de  $z$  indefinidamente. Assim, não há solução ótima.

# Método das Duas Fases: Interpretação Geométrica





# Dualidade

- Seja o PPL, doravante chamado de PPL **primal**:

$$\min c^t x = f(x)$$

$$s.a.: Ax \geq b$$

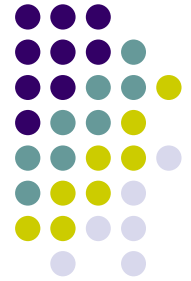
$$x \geq 0$$

- ou, na forma expandida:

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$s.a.: \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$



# Dualidade

- Associado a este PPL, existe um PPL, chamado PPL **dual**:

$$\max ub = f_D(x)$$

$$s.a.: A^t u^t \leq c$$

$$u \geq 0$$

- ou, na forma expandida:

$$\max \sum_{i=1}^m b_i u_i$$

$$s.a.: \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \leq c_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$u_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

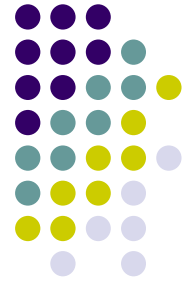
# Dualidade:

## Regras de transformação

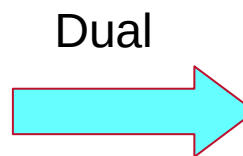
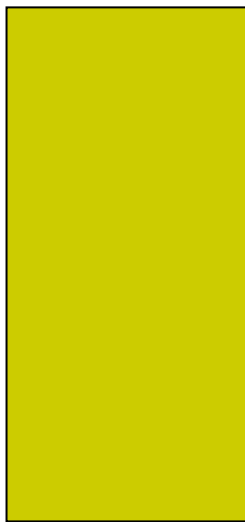


|     | Primal    |        | Dual   |           |     |
|-----|-----------|--------|--------|-----------|-----|
| MIN | Restrição | $\leq$ | $\leq$ | Variável  | MAX |
|     |           | $=$    | qq.    |           |     |
|     |           | $\geq$ | $\geq$ |           |     |
|     | Variável  | $\leq$ | $\geq$ | Restrição |     |
|     |           | qq.    | $=$    |           |     |
|     |           | $\geq$ | $\leq$ |           |     |
|     | Dual      |        | Primal |           |     |

# Dualidade: Vantagens



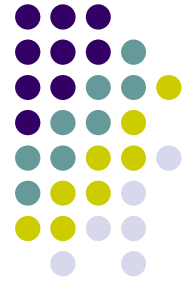
- Em situações na qual a matriz de coeficientes do primal tem maior número de linhas do que de colunas:



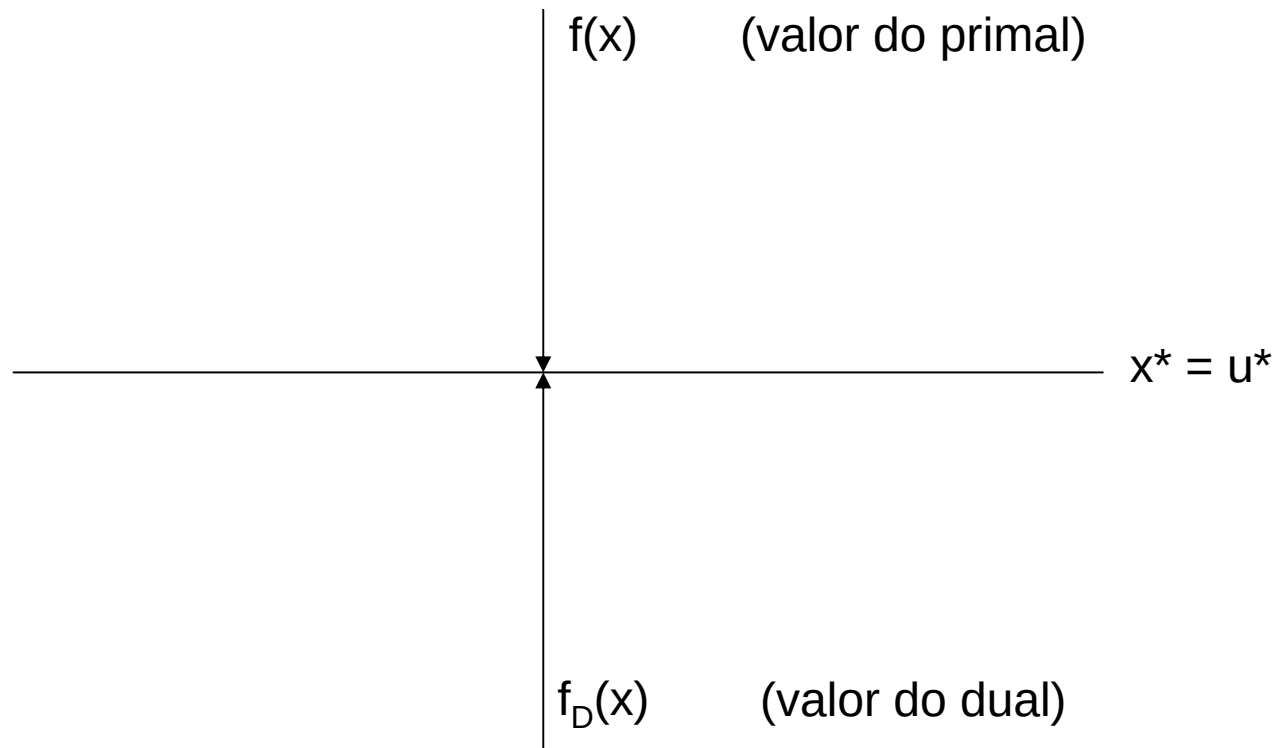
A base no DUAL é  
menor!!!



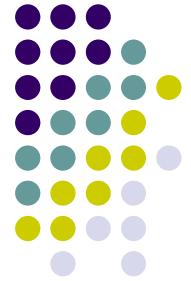
# Dualidade: Vantagens



- É possível “cercar” a solução ótima.  
(Considere um PPL primal de minimização)



# Dualidade: Interpretação Econômica



- Seja o par de PPL's:

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j = f(x)$$

$$s.a : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$



PRIMAL

$$\min \sum_{i=1}^m b_i u_i = f_D(u)$$

$$s.a : \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \geq c_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$u_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$



DUAL

# Dualidade:

## Interpretação Econômica



- Sejam  $x^*$  e  $u^*$  soluções ótimas desses PPL's e seja  $B^*$  a base relativa a essas soluções. Então:

$$f(x^*) = f_D(u^*) = u^* b = \sum_{i=1}^m b_i u_i^*$$

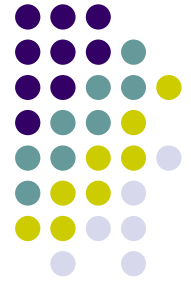
- Supondo  $b$  variável e derivando em relação a  $b$ , temos:

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial b} = u^*$$

- Então  $u^*$  é a taxa de variação do valor ótimo da função objetivo  $f(x^*)$  com  $b$ . Como  $u^* \geq 0$ , então  $f(x^*)$  cresce à medida que  $b_i$  cresce

# Dualidade:

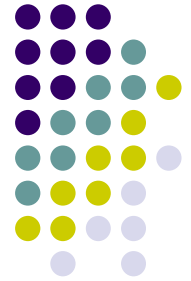
## Interpretação Econômica



- Considere o primal um problema de alocação de recursos, com  $m$  recursos disponíveis nas quantidades  $b_1, b_2, \dots, b_m$  com os quais desejamos fabricar  $n$  produtos nas quantidades  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a serem determinadas.
- Cada unidade do produto  $j$  consome  $a_{ij}$  unidades do recurso  $i$  trazendo um retorno de  $c_j$  unidades monetárias.
- Queremos determinar a quantidade a ser fabricada de cada produto de modo a maximizar o retorno.

# Dualidade:

## Interpretação Econômica



- Suponha, agora, aumentada em uma unidade a quantidade disponível do recurso  $k$ , isto é, temos  $(b_k + 1)$  unidades.
- Suponha que a base associada permaneça a mesma.
- Neste caso, a nova solução ótima  $u^{**}$  do dual permanece a mesma, uma vez que:
$$u^{**} = u^* = (c^{B^*})^t B^{*-1}.$$
- A nova solução ótima  $x^{**}$  será:

# Dualidade: Interpretação Econômica



$$\begin{aligned} f(x^{**}) &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m b_i u_i^* + (b_k + 1) u_k^* \\ &= \sum_{i=1}^m b_i u_i^* + u_k^* = f(x^*) + u_k^* \end{aligned}$$

- Isto é,  $f(x^{**}) - f(x^*) = u_k^*$ , ou seja,  $u_k^*$  é o incremento no lucro trazido pelo aumento de uma unidade da matéria disponível  $k$ .
- $u_k^*$  é chamado *shadow price*, dual, valor incremental, *efficiency price*, valor implícito, etc.

# Análise de Sensibilidade (Pós-otimização)



- Seja o sistema  $Ax=b$ , com uma base  $B$ , e uma função objetivo  $f(x)$
- Seja o quadro genérico do Simplex em uma dada iteração colocado na forma matricial não canônica

|         |       | $(x^R)^t$ | $(x^B)^t$ |        |
|---------|-------|-----------|-----------|--------|
| $(L_1)$ | $x^B$ | $R$       | $B$       | $b$    |
| $(L_2)$ |       | $(c^R)^t$ | $(c^B)^t$ | $f(x)$ |

# Análise de Sensibilidade (Pós-otimização)



- Para colocar esse quadro na forma canônica devemos efetuar as seguintes transformações elementares:  $L_1 \leftarrow B^{-1}L_1$

|         |       | $(x^R)^t$ | $(x^B)^t$ |           |
|---------|-------|-----------|-----------|-----------|
| $(L_1)$ | $x^B$ | $B^{-1}R$ | $I$       | $B^{-1}b$ |
| $(L_2)$ |       | $(c^R)^t$ | $(c^B)^t$ | $f(x)$    |

$$L_2 \leftarrow -(c^B)^t L_1 + L_2$$



# Análise de Sensibilidade (Pós-otimização)



|         |       | $(x^R)^t$                   | $(x^B)^t$ |                          |
|---------|-------|-----------------------------|-----------|--------------------------|
| $(L_1)$ | $x^B$ | $B^{-1}R$                   | $I$       | $B^{-1}b$                |
| $(L_2)$ |       | $(c^R)^t - (c^B)^t B^{-1}R$ | $(0)^t$   | $f(x) - (c^B)^t B^{-1}b$ |

Seja:  $Y = B^{-1}R$

$$y_j = B^{-1}a_j$$

$$\hat{x}^B = B^{-1}b$$

$$z = (c^B)^t B^{-1}R$$

$$z_j = (c^B)^t B^{-1}a_j$$

# Análise de Sensibilidade (Pós-otimização)



|         |       | $(x^R)^t$     | $(x^B)^t$ |                     |
|---------|-------|---------------|-----------|---------------------|
| $(L_1)$ | $x^B$ | $Y$           | $I$       | $\hat{x}^B$         |
| $(L_2)$ |       | $(c^R)^t - z$ | $(0)^t$   | $f(x) - f(\hat{x})$ |

Sendo:  $f(\hat{x}) = c^t \hat{x} = (c^B)^t \hat{x}^B + \cancel{(c^R)^t \hat{x}^R} =$   
 $= (c^B)^t \hat{x}^B = (c^B)^t B^{-1} b$

# Análise de Sensibilidade:

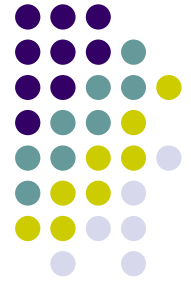
## Ex. 1 – Carteira de Investimentos



- Uma empresa gerencia recursos de terceiros através da escolha de carteiras de investimentos para diversos clientes, baseados em bonds de diversas empresas. Um de seus clientes exige que:
  - Não mais de 25% do total aplicado deve ser investido em um único investimento;
  - Um valor superior ou igual a 50% do total aplicado deve ser investido em títulos de maturidade maiores que 10 anos;
  - O total aplicado em títulos de alto risco deve ser, no máximo, de 45% do total investido.
- Considerando a tabela abaixo de retorno, risco e maturidade dos diversos títulos, determine a estratégia ótima para o investidor de forma que a rentabilidade de sua aplicação seja máxima.

| Título | Retorno anual<br>(%) | Maturidade<br>(anos) | Risco           |
|--------|----------------------|----------------------|-----------------|
| 1      | 8,7                  | 15                   | 1 – Muito baixo |
| 2      | 9,5                  | 12                   | 3 – Regular     |
| 3      | 12,0                 | 8                    | 4 – Alto        |
| 4      | 9,0                  | 7                    | 2 – Baixo       |
| 5      | 13,0                 | 11                   | 4 – Alto        |
| 6      | 20,0                 | 5                    | 5 – Muito alto  |

# Carteira de Investimentos: Modelo de Programação Matemática



$$\max \sum_{j \in \text{Titulos}} \text{rendimento}_j x_j$$

$$x_j \leq 0,25 \quad \forall j \in \text{Titulos}$$

$$\sum_{j \in \text{Titulos} \mid \text{maturidade}_j \geq 10} x_j \geq 0,50$$

$$\sum_{j \in \text{Titulos} \mid \text{risco}_j \geq 4} x_j \leq 0,45$$

$$\sum_{j \in \text{Titulos}} x_j = 1$$

# Análise de sensibilidade: Carteira de Investimentos - Questões



1. Qual o melhor retorno que se pode obter? Quanto se deve aplicar em cada título para que se tenha o retorno ótimo?
2. Em qual percentual aumentaria o retorno se fosse permitido aplicar 1% a mais no Título 2? De quanto seria o retorno? Essa regra vale até quanto?
3. A partir de qual percentual a aplicação no título 3 é vantajosa?
4. Se fosse imposto limitar a aplicação em cada título em 24% para um dentre os títulos 2, 4 e 6, em qual título deveria ser feita a diminuição de aplicação? Justifique.
5. Quanto está influenciando a restrição de limitação de aplicação em título de alto risco? Qual seria o retorno se esta limitação fosse de 49%?

# Análise de Sensibilidade:

## Ex. 2 – Produção de automóveis



- Uma empresa deve produzir **1000** automóveis. Ela tem quatro fábricas, as quais, devido a diferenças na mão-de-obra e avanços tecnológicos, as plantas diferem no custo de produção de cada carro. Elas também utilizam diferentes quantidades de matéria-prima e mão-de-obra. A tabela abaixo resume essas informações:

| Fábrica | Custo (R\$ mil) | Mão-de-Obra | Mat. Prima |
|---------|-----------------|-------------|------------|
| 1       | 15              | 2           | 3          |
| 2       | 10              | 3           | 4          |
| 3       | 9               | 4           | 5          |
| 4       | 7               | 5           | 6          |

# Análise de Sensibilidade

## Ex. 2 – Produção de automóveis



- Um acordo trabalhista requer que pelo menos 400 carros sejam produzidos na fábrica 3. Existem 3300 horas de mão-de-obra e 4000 unidades de material que podem ser alocadas às 4 fábricas. O modelo de programação matemática que otimiza a produção é:

$$\min \sum_{j \in \text{Fabricas}} c_j x_j$$

$$\sum_{j \in \text{Fabricas}} MObra_j x_j \leq TotMObra$$

$$\sum_{j \in \text{Fabricas}} MatPrima_j x_j \leq TotMatPrima$$

$$\sum_{j \in \text{Fabricas}} x_j = Producao$$

$$x_j \geq Acordo_j \quad \forall j \in \text{Fabricas} \mid Acordo_j \neq 0$$

# Análise de sensibilidade:

## Ex. 2 – Produção de automóveis



1. Quais são as quantias ótimas de produção? Qual o custo da produção?
2. Quanto custa produzir mais um veículo? Quanto economizamos produzindo um veículo a menos?
3. Como mudaria a solução se custasse somente R\$8.000,00 para produzir na fábrica 2? Como ficaria o custo?
4. Quanto estamos dispostos a pagar por uma hora de trabalho?
5. Quanto o acordo está custando? Qual seria a variação no custo se o acordo fosse de 250 carros?
6. Quanto vale a matéria-prima (conseguir mais uma unidade)? Quantas unidades estamos dispostos a pagar por esse preço?
7. Até que custo ainda é vantajoso produzir na fábrica 2?



# Resolução de PPL's Inteiros



Seja resolver:

$$\begin{array}{llll} \max & x_1 & + & 19x_2 \\ & x_1 & + & 20x_2 \leq 50 \\ & x_1 & + & x_2 \leq 20 \\ & x_1 & , & x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{array}$$

cuja solução ótima (contínua) é:

$$x_1 = 18,89 \quad x_2 = 1,58 \quad z = 48,42$$

# Resolução de PPL's Inteiros



Aplicando a estratégia de arredondamento, uma vez que os valores ótimos são fracionários, e providenciando uma busca racional no entorno do ponto ótimo, teríamos:

| $x_1$ | $x_2$ | $Z=x_1+19*x_2$ |
|-------|-------|----------------|
| 19    | 2     | Inviável       |
| 19    | 1     | 38             |
| 18    | 2     | Inviável       |
| 18    | 1     | 37             |

Melhor  
valor

No entanto, a solução ótima inteira é:

$$x_1 = 10 \quad x_2 = 2 \quad z = 48$$

isto é, o erro é de 21% no arredondamento.

Conclusão: Não é uma boa estratégia resolver o PPL (contínuo) e arredondar a solução resultante

# *Programação inteira: Branch-and-Bound*



Maximizar  $z = 5x_1 + 8x_2$

sujeito a :

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

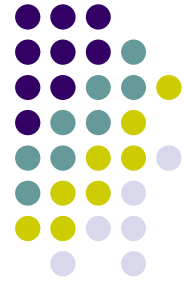
$$5x_1 + 9x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$

Exemplo extraído de:

GOLDBARG & LUNA (2005), Otimização  
Combinatória, Editora Campus.

# *Programação inteira: Branch-and-Bound*



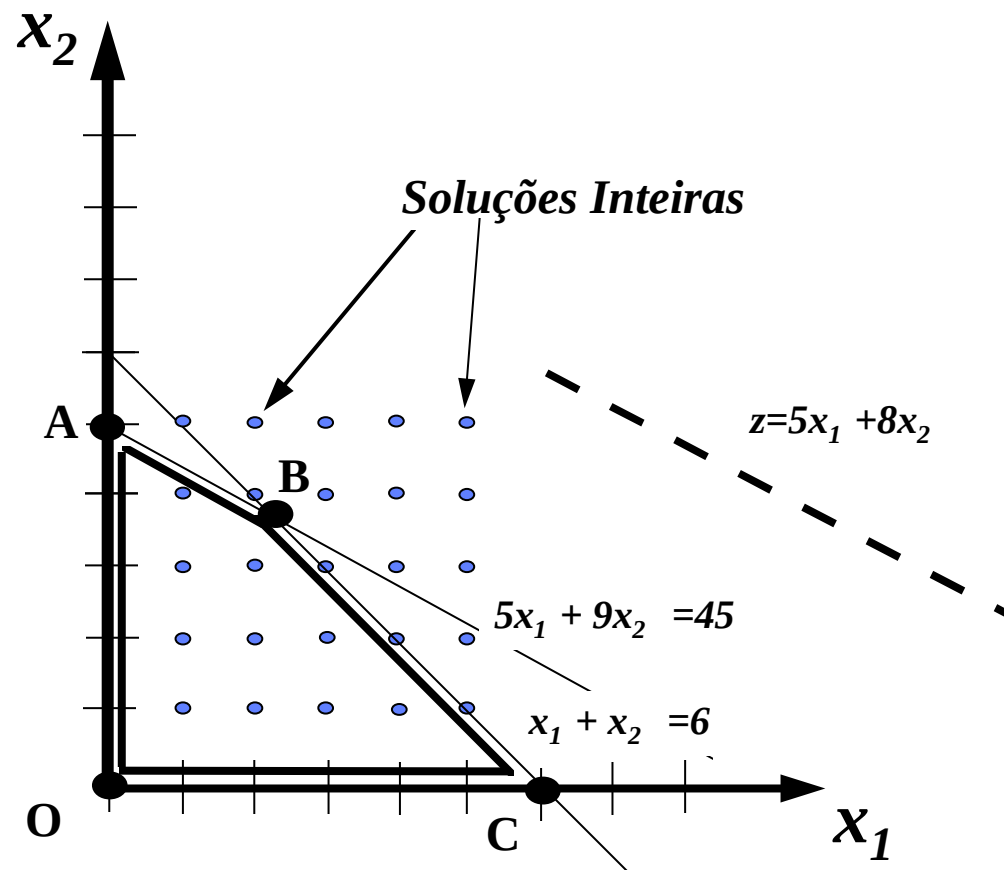
## **Solução Contínua**

$$x_1 = \frac{9}{4} \quad x_2 = \frac{15}{4} \quad Z = 41\frac{1}{4}$$

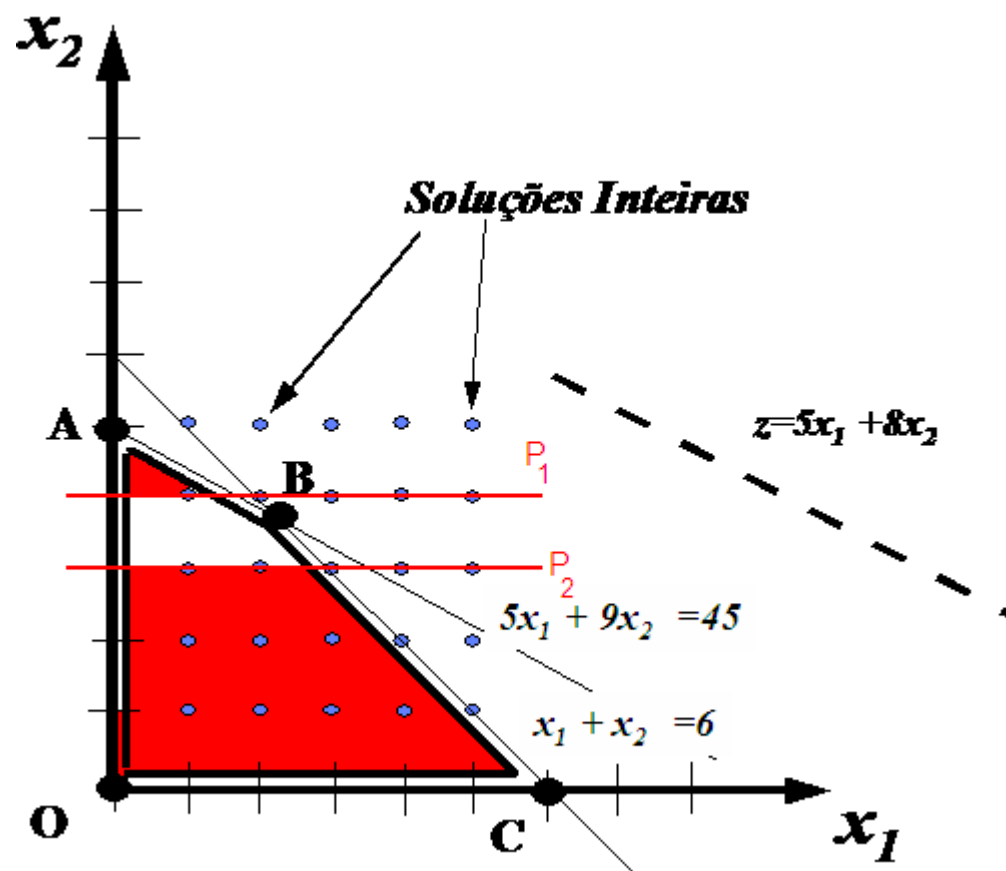
## **Disjuntiva**

$$x_2 \geq \left\lfloor \frac{15}{4} \right\rfloor + 1 \geq 4 \quad \text{ou} \quad x_2 \leq \left\lfloor \frac{15}{4} \right\rfloor \leq 3$$

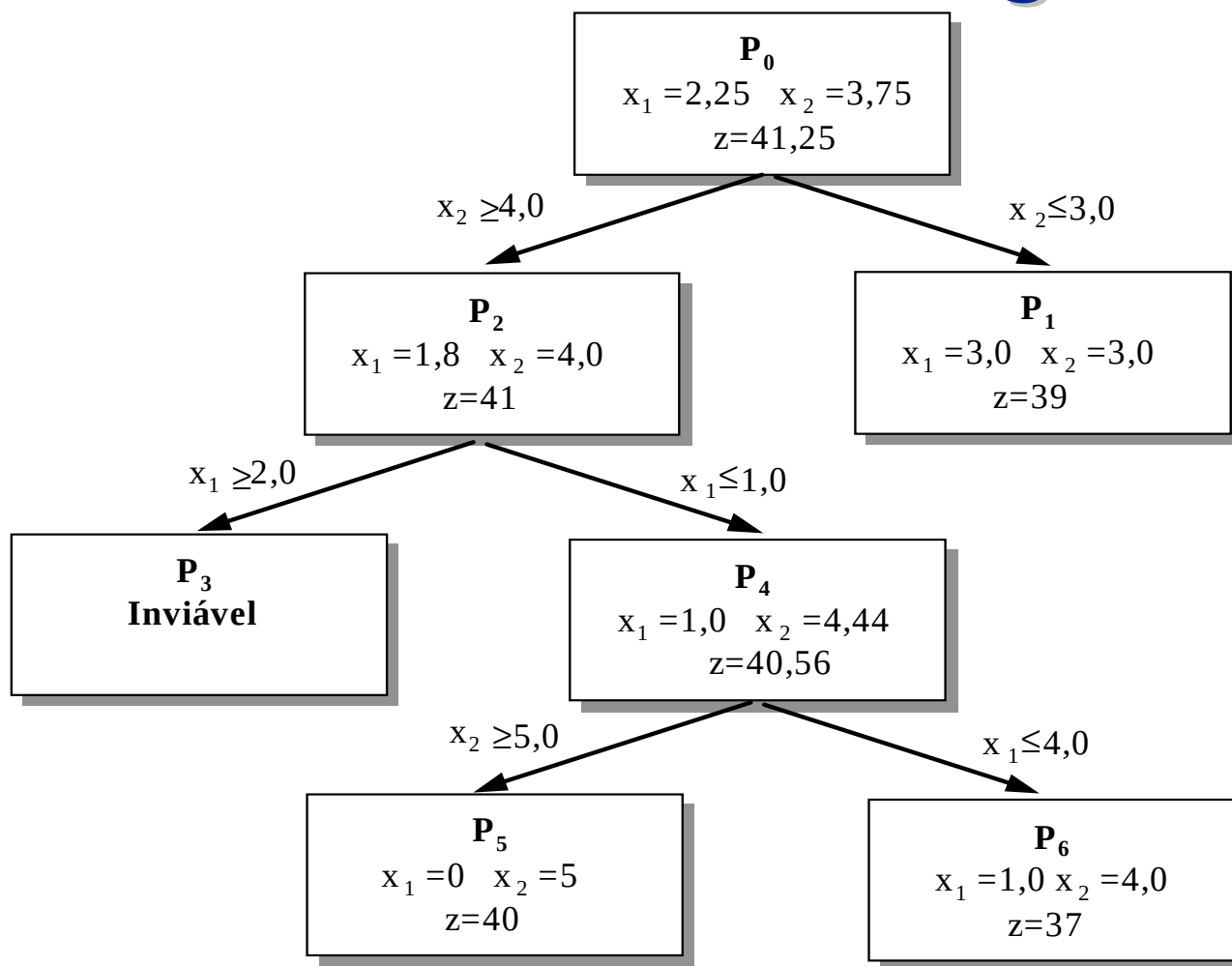
# Programação inteira: Branch-and-Bound



# Programação inteira: Branch-and-Bound



# Programação inteira: Árvore de Branching



# Programação inteira:

## *Branch-and-Bound*



- Resolva pelo método *Branch-and-Bound* o PLI abaixo
- Use a variante de *Dank* para decidir a variável a ramificar (Nessa variante, a variável a ramificar é aquela cujo valor está mais próximo de um valor inteiro)
- Em caso de empate, escolha a de menor índice
- Use busca em profundidade e analise primeiro o valor maior da variável ramificada, isto é, o valor  $x_j \geq \lfloor x_j \rfloor + 1$

$$\min z = 4x_1 + 3x_2$$

$$8x_1 + 3x_2 \geq 24$$

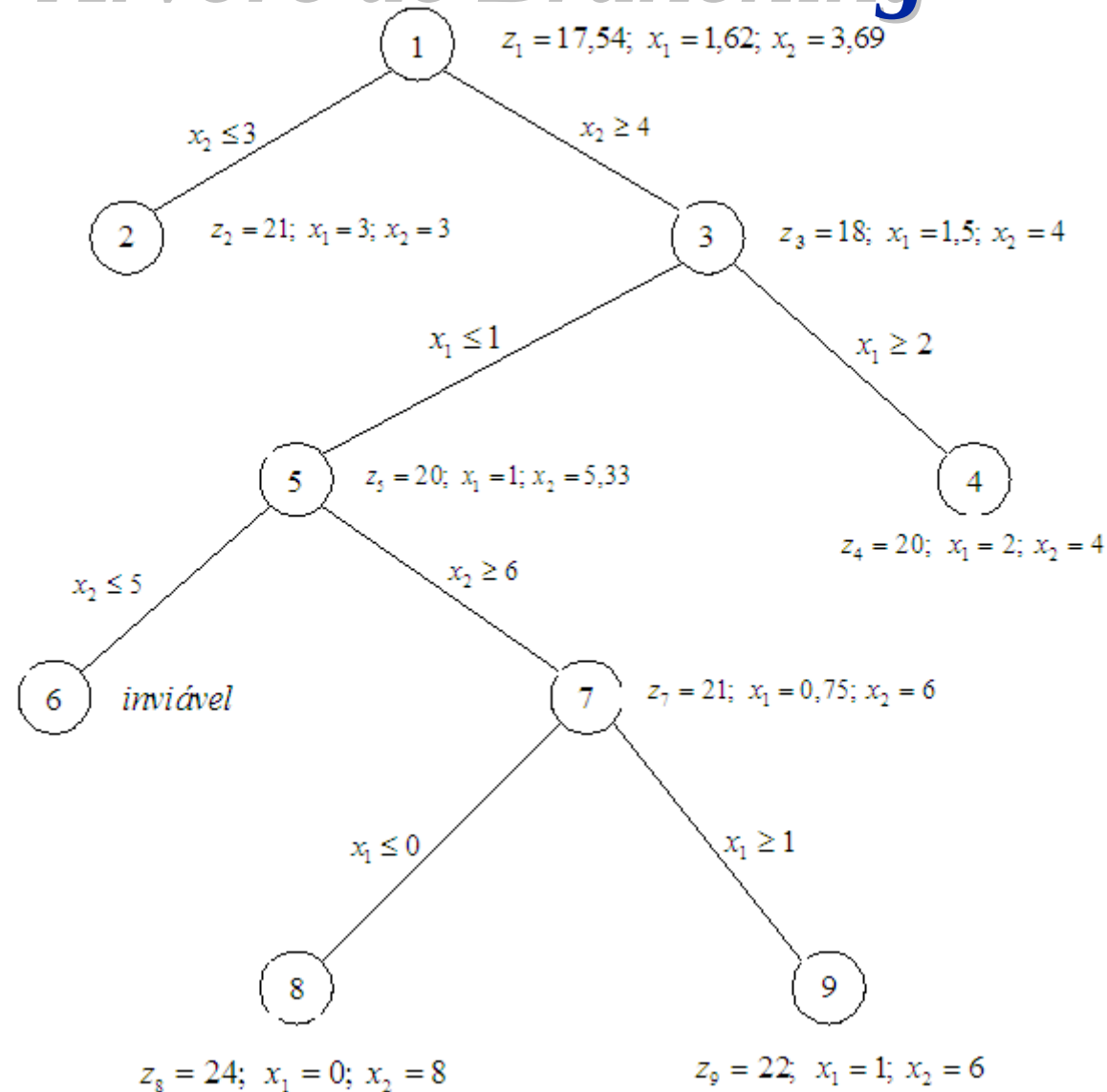
$$5x_1 + 6x_2 \geq 30$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 9$$

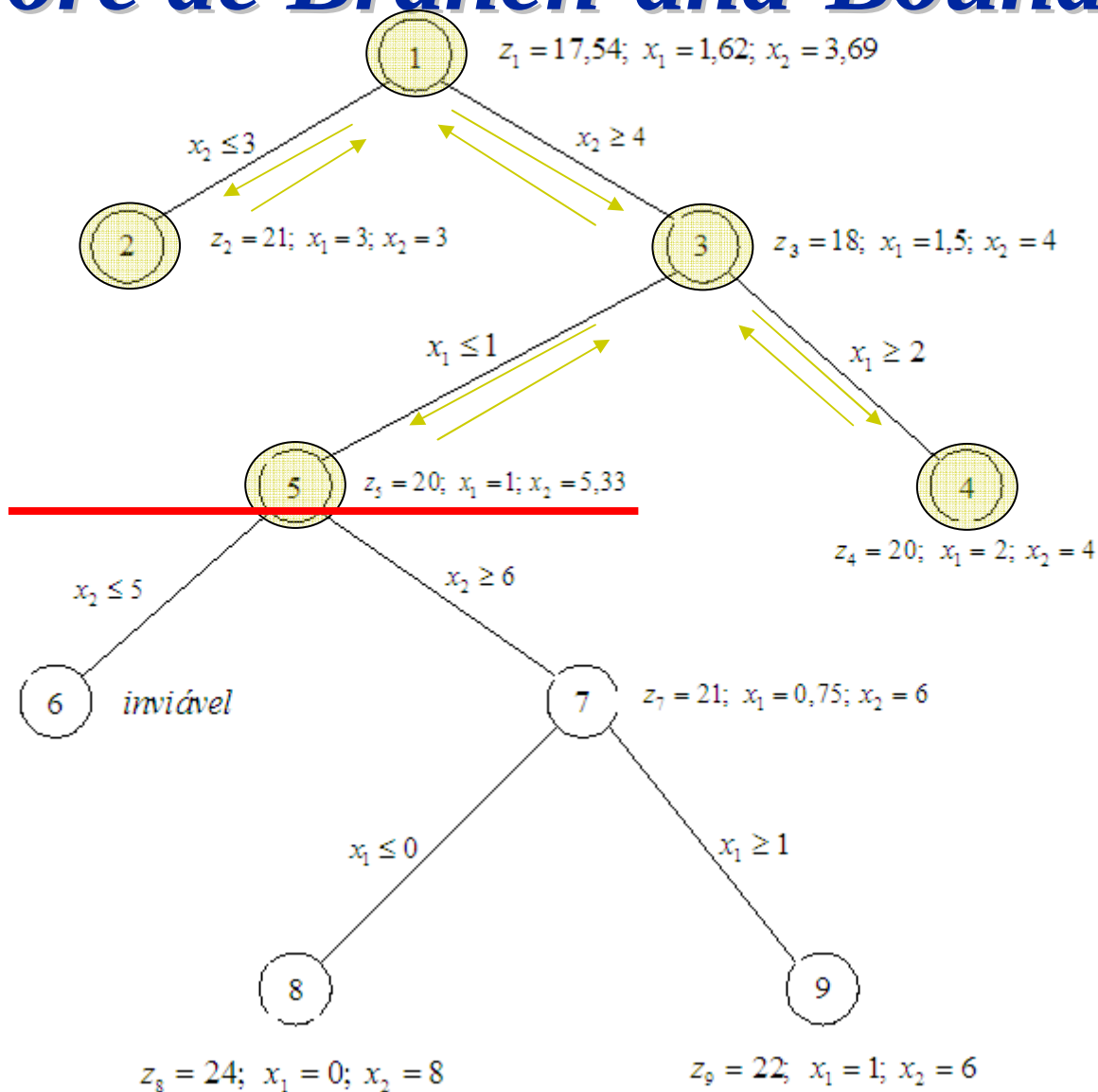
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$



# Programação inteira: Árvore de Branching



# Programação inteira: Árvore de Branch-and-Bound



# Exercícios de modelagem em programação matemática



- Problema proposto pelo Tales
- Problema de transporte
- Problema de alocação de pessoal (*Staff Scheduling*)
  - Sem hora-extra
  - Com hora-extra
- Problema de Corte de Estoque (*Cutting Stock Problem*)
  - Problema das bobinas
  - Problema da serralheria
- Problema da Mochila (*Knapsack Problema*)
  - Mochila 0-1
  - Mochila 0-1 Múltipla
  - Mochila Inteira
  - Mochila Inteira Múltipla
- Alocação Dinâmica de Caminhões
- Determinação do Ritmo de Lavra
- Controle de Pátio de Minérios
- Programação da produção: dimensionamento de lotes
- Seqüenciamento em uma máquina com penalidades por antecipação e atraso da produção e janelas de atendimento

# Problema proposto pelo Tales (1)

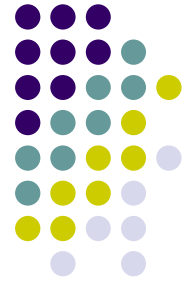


Dados de entrada:

- Pilhas = Conjunto de pilhas
- Parametros = Conjunto dos parâmetros de controle
- $t_{ij}$  = % do parâmetro de controle  $j$  em uma tonelada da pilha  $i$
- $tl_j$  = % mínimo admissível para o parâmetro  $j$
- $tu_j$  = % máximo admissível para o parâmetro  $j$
- $tr_j$  = % recomendada para o parâmetro  $j$
- $Qu_i$  = Quantidade máxima de minério, em toneladas, existente na pilha  $i$
- $p$  = quantidade, em toneladas, da mistura a ser formada
- $w_{nm_j}$  = Peso para o desvio negativo (relativo à meta) do parâmetro  $j$  na mistura
- $w_{pm_j}$  = Peso para o desvio positivo (relativo à meta) do parâmetro  $j$  na mistura
- $w_{pe_j}$  = Peso para o desvio positivo relativo à especificação do parâmetro  $j$  na mistura
- $w_{npilha_i}$  = Peso para a quantidade de minério que resta na pilha  $i$  (peso relativo ao desvio negativo de pilha)
- $w_{pp}$  = Peso para o desvio positivo de produção
- $w_{np}$  = Peso para o desvio negativo de produção

# Problema proposto pelo Tales

## (2)



Dados de entrada:

- Para determinados parâmetros de controle, o limite superior de especificação pode ser extrapolado, isto é,  $\text{extrapolar}_j = 1$  significa que o parâmetro de controle  $j$  pode ter seu limite superior relaxado)
- $wpe_j$  = Peso para o desvio positivo (de limite superior) do parâmetro  $j$  na mistura
- Algumas pilhas não podem ser utilizadas ( $\text{desconsiderar}_i = 1$  significa que a pilha  $i$  não pode ser usada)
- Se uma pilha for retomada, deve-se retomar no mínimo  $\text{retmin}$  toneladas
- Deve-se tirar o máximo possível de cada pilha  $i$ , isto é, a quantidade que restar na pilha ( $\text{dnpilha}_i$ ) deve ser minimizada
- Algumas pilhas devem ser necessariamente retomadas, isto é,  $\text{retomar}_i = 1$  significa que a pilha  $i$  deve ser totalmente usada

Variáveis de decisão:

- $x_i$  = Quantidade de minério a ser retirado da pilha  $i$
- $\text{dnm}_j$  = Desvio negativo (relativo à meta), em toneladas, do parâmetro  $j$  na mistura
- $\text{dpm}_j$  = Desvio positivo (relativo à meta), em toneladas, do parâmetro  $j$  na mistura
- $\text{dpe}_j$  = Desvio positivo (relativo ao lim. superior de especificação), em ton, do parâmetro  $j$  na mistura
- $\text{dnpilha}_i$  = Quantidade de minério que sobra, em toneladas, na pilha  $i$  (Desvio negativo relativo à quantidade  $Qu_i$  disponível na pilha  $i$ )
- $\text{dpp}$  = Desvio positivo de produção, em toneladas
- $\text{dnp}$  = Desvio negativo de produção, em toneladas
- $y_i = 1$  se a pilha  $i$  for retirada e zero, caso contrário.

# Problema da Mistura proposto pelo Tales (3)



$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in \text{Parametros}} wpm_j dpm_j + \sum_{j \in \text{Parametros}} wnm_j dnm_j + \sum_{j \in \text{Parametros}} wpe_j dpe_j \\ & + \sum_{i \in \text{Pilhas}} wnpilha_i \times dnpilha_i + (wnp \times dnp + wpp \times dpp) \end{aligned}$$

$$\left. \sum_{i \in \text{Pilhas}} (t_{ij} - tu_j) x_i - dpe_j \leq 0 \quad \forall j \in \text{Parametros} \mid \text{extrapolar}_j = 1 \right\} \quad \text{A quantidade do parâmetro } j \text{ na mistura só pode superar a máxima permitida quando } \text{extrapolar}_j = 1$$

$$\left. \sum_{i \in \text{Pilhas}} (t_{ij} - tu_j) x_i \leq 0 \quad \forall j \in \text{Parametros} \mid \text{extrapolar}_j = 0 \right\} \quad \text{A quantidade do parâmetro } j \text{ na mistura não pode superar a máxima permitida}$$

$$\left. \sum_{i \in \text{Pilhas}} (t_{ij} - tl_j) x_i \geq 0 \quad \forall j \in \text{Parametros} \right\} \quad \text{A quantidade do parâmetro } j \text{ na mistura não pode ser inferior à mínima permitida}$$

$$\left. \sum_{i \in \text{Pilhas}} (t_{ij} - tr_j) x_i + dnm_j - dpm_j = 0 \quad \forall j \in \text{Parametros} \right\} \quad \text{Admite-se que haja excesso (dpm}_j\text{) ou falta (dnm}_j\text{) do parâmetro } j \text{ na mistura em relação à quantidade recomendada}$$

$$x_i \leq Qu_i \quad \forall i \in \text{Pilhas} \quad \left. \right\} \quad \text{A quantidade a ser retomada em cada pilha } i \text{ está limitada à } Qu_i$$

$$\sum_{i \in \text{Pilhas}} x_i + dpp - dnp = p \quad \left. \right\} \quad \text{A mistura deve ter como meta um peso total } p$$

$$dnpilha_i, x_i \geq 0 \quad \forall i \in \text{Pilhas}$$

$$dpe_j, dpm_j, dnm_j \geq 0 \quad \forall j \in \text{Parametros}$$

## Problema da Mistura proposto pelo Tales (4)



Uma pilha  $i$  será retomada (total ou parcialmente) se  $y_i = 1$

$$y_i \geq \frac{x_i}{Qu_i} \quad \forall i \in Pilhas \mid Qu_i \neq 0$$

Deve-se tentar retomar totalmente a pilha  $i$  ( $dnpilha_i$  representa a sobra)

$$x_i + dnpilha_i \geq Qu_i y_i \quad \forall i \in Pilhas$$

Deve-se retomar no mínimo  $retmin$  toneladas de uma pilha, caso ela seja usada

$$x_i \geq retmin \times y_i \quad \forall i \in Pilhas$$

$$x_i = Qu_i \quad \forall i \in Pilhas \mid retomar_i = 1 \quad \left. \vphantom{x_i = Qu_i} \right\} \begin{array}{l} \text{Quando se deseja retomar totalmente uma pilha } i \\ \text{tem-se } x_i = Qu_i \end{array}$$

$$x_i = 0 \quad \forall i \in Pilhas \mid desconsiderar_i = 1 \quad \left. \vphantom{x_i = 0} \right\} \text{Para as pilhas } i \text{ que não se deseja retomar, } x_i = 0$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in Pilhas$$

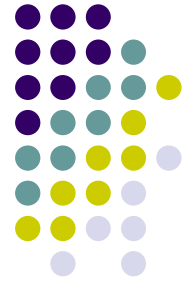


# Problema de Transporte

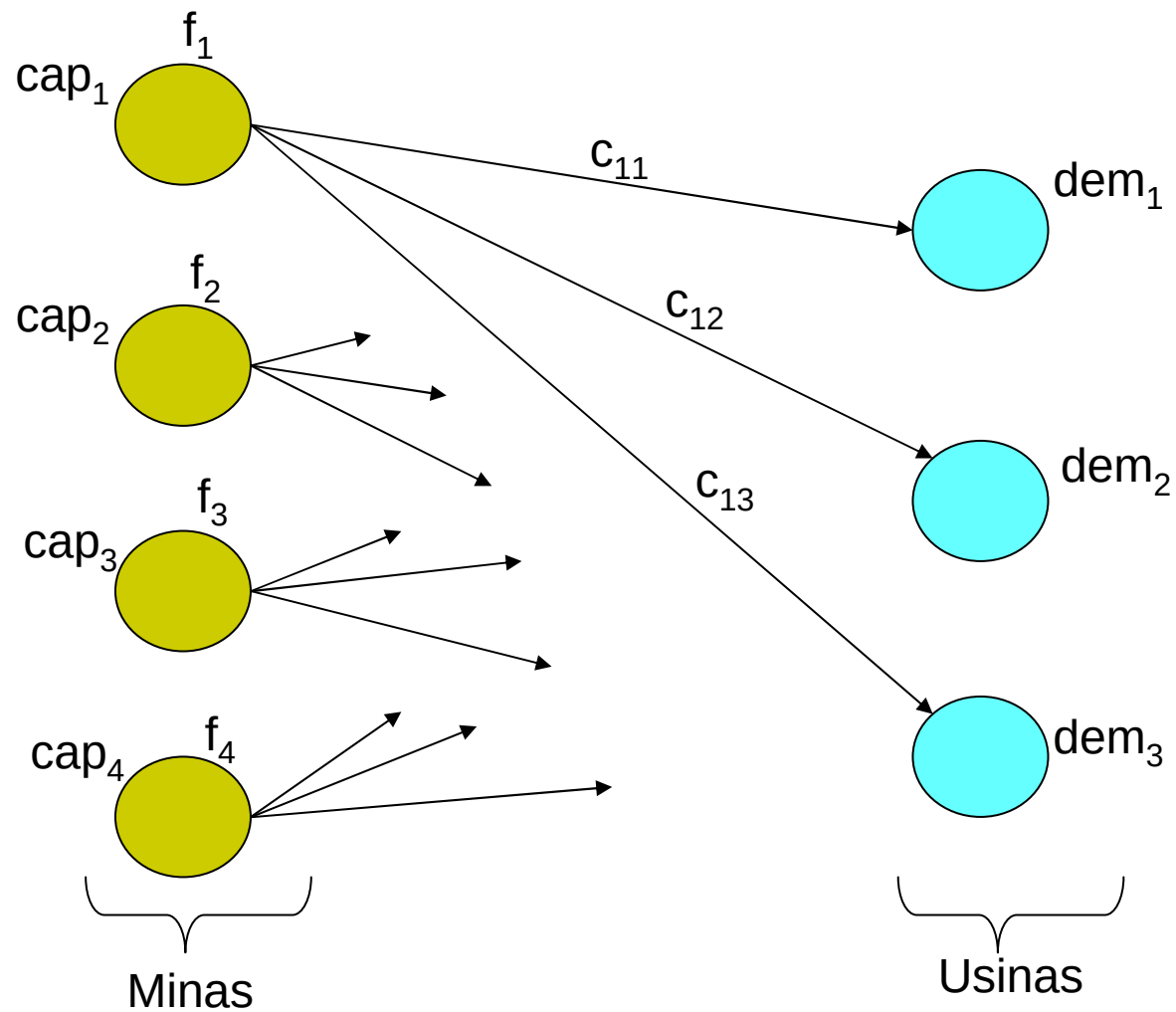
- Há um conjunto de minas produtoras de minério
- Há um conjunto de usinas que processam os minérios provenientes das minas
- Há um custo de transporte de minério de uma mina para uma usina
- Cada mina tem uma capacidade de produção mensal
- Cada usina tem uma demanda mensal
- Cada mina tem um custo fixo se for usada
- Determinar a estratégia ótima de transporte

| Mina               | Usinas |       |       | Cap<br>(t/mês) | Custo<br>(\$/t)  |
|--------------------|--------|-------|-------|----------------|------------------|
|                    | 1      | 2     | 3     |                |                  |
| 1                  | 10     | 8     | 13    | 11500          | 50000            |
| 2                  | 7      | 9     | 14    | 14500          | 40000            |
| 3                  | 6,5    | 10,8  | 12,4  | 13000          | 30000            |
| 4                  | 8,5    | 12,7  | 9,8   | 12300          | 25500            |
| Demanda<br>(t/mês) | 10000  | 15400 | 13300 | -              | 136 <sup>7</sup> |





# Problema de Transporte





# Problema de Transporte

Dados de entrada:

- Minas = Conjunto de minas
- Usinas = Conjunto de usinas
- $cap_i$  = capacidade de produção, em toneladas/mês, da mina  $i$
- $dem_j$  = quantidade de minério demandado pela usina  $j$ , em ton/mês
- $f_i$  = custo fixo de uso da mina  $i$ , em \$
- $c_{ij}$  = custo de transporte de minério proveniente da mina  $i$  para abastecer a usina  $j$ , em \$/tonelada/mês

Variáveis de decisão:

- $x_{ij}$  = Quantidade de minério, em toneladas/mês, a ser transportado da mina  $i$  para abastecer a usina  $j$
- $y_i = 1$  se a mina  $i$  será usada e 0, caso contrário

# Problema de Transporte

## (Caso em que: Oferta > Demanda)



- Como oferta (minas) > demanda (usinas):
  - Toda a demanda será atendida

### 1. Função objetivo

Minimizar o custo de transporte mais o custo fixo pelo uso das minas usadas

$$\min \sum_{i \in \text{Minas}} \sum_{j \in \text{Usinas}} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in \text{Minas}} f_i y_i$$

# Problema de Transporte: modelo de PL



## 2. Restrições:

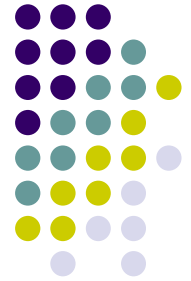
- a) A capacidade de produção das minas deve ser respeitada

$$\sum_{j \in Usinas} x_{ij} \leq cap_i \quad \forall i \in Minas$$

- b) Toda a demanda é atendida

$$\sum_{i \in Minas} x_{ij} = dem_j \quad \forall j \in Usinas$$

# Problema de Transporte: modelo de PL



- c) Uma mina só pode ser usada se houver produção

$$y_i \geq \frac{\sum_{j \in \text{Usinas}} x_{ij}}{\text{cap}_i} \quad \forall i \in \text{Minas}$$

- d) Não negatividade e integralidade

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in \text{Minas}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in \text{Minas}, \forall j \in \text{Usinas}$$

# Problema de Transporte: modelo (Caso em que Oferta < Demanda)



$$\min \sum_{i \in \text{Minas}} \sum_{j \in \text{Usinas}} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in \text{Minas}} f_i$$

$$\left. \sum_{j \in \text{Usinas}} x_{ij} = \text{cap}_i \quad \forall i \in \text{Minas} \right\} \text{ Toda a produção é ofertada}$$

$$\left. \sum_{i \in \text{Minas}} x_{ij} \leq \text{dem}_j \quad \forall j \in \text{Usinas} \right\} \text{ Nem toda a demanda é atendida}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in \text{Minas}, \forall j \in \text{Usinas}$$



# Alocação de Pessoal

- Um hospital trabalha com atendimento variável em demanda durante as 24 horas do dia. As necessidades distribuem-se segundo a tabela ao lado.
- O horário de trabalho de um enfermeiro é de 8 horas seguidas e só pode ser iniciado no começo de cada turno, isto é, às 8 ou 12 ou 16 ou 20 ou 24 ou 04 horas.
- Considere que cada enfermeiro recebe \$100 por hora de trabalho no período diurno (08 às 20 h) e \$125 no período noturno (20 às 08 h).
- Elabore um modelo de PLI que minimize o gasto com a mão-de-obra.

| Turno | Horário | # enf. |
|-------|---------|--------|
| 1     | 08-12   | 51     |
| 2     | 12-16   | 58     |
| 3     | 16-20   | 62     |
| 4     | 20-24   | 41     |
| 5     | 24-04   | 32     |
| 6     | 04-08   | 19     |

# Problema de Alocação de Pessoal



Dados de entrada:

- Turnos = Conjunto de turnos de trabalho
- $req_i$  = número de enfermeiros requeridos no turno  $i$
- $c_i$  = custo do enfermeiro que começa sua jornada no início do turno  $i$ , em \$

Variáveis de decisão:

- $x_i$  = Número de enfermeiros que começam sua jornada de trabalho no início do turno  $i$



# Problema de Alocação de Pessoal



## 1. Função objetivo

Minimizar o custo com as despesas com pessoal

$$\min \sum_{i \in \text{Turnos}} c_i x_i$$

## 2. Restrições

- a) A demanda por enfermeiros em cada turno  $i$  deve ser atendida

$$x_{i-1} + x_i \geq req_i \quad \forall i \in \text{Turnos}$$

- b) Não-negatividade e integralidade

$$x_i \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i \in \text{Turnos}$$



# Listas Circulares no LINGO

- Listas circulares são usadas para ligar o último elemento de um conjunto ao primeiro, bem como o primeiro ao último. No LINGO, pode-se usar listas circulares por meio do comando @wrap
- @wrap(index, Limit) = retorna o índice J, dado por:

$$J = \text{index} + k \times \text{Limit}$$

onde  $k$  é um número inteiro tal que  $J$  pertença ao intervalo  $[1, \text{Limit}]$

- Exemplos:
  - @wrap(4, 7) =  $4 + k \times 7 = 4 + 0 \times 7 = 4$
  - @wrap(8, 7) =  $8 + k \times 7 = 8 + (-1) \times 7 = 1$
  - @wrap(9, 7) =  $9 + k \times 7 = 9 + (-1) \times 7 = 2$
  - @wrap(0, 7) =  $0 + k \times 7 = 0 + (1) \times 7 = 7$
  - @wrap(-1, 7) =  $-1 + k \times 7 = -1 + (1) \times 7 = 6$
  - @wrap(-2, 7) =  $-2 + k \times 7 = -2 + (1) \times 7 = 5$
- Assim, se  $i$  pertence ao conjunto Turnos, isto é,  $i \in \text{Turnos}$ , então  $x_{i-2}$  seria representado no LINGO por:  
$$x(\text{@wrap}(i-2, \text{@size}(\text{Turnos})))$$

# Problema de Alocação de Pessoal com hora-extra



- Um hospital trabalha com atendimento variável em demanda durante as 24 horas do dia. As necessidades distribuem-se segundo a tabela ao lado.
- O horário de trabalho de um enfermeiro é de 8 horas seguidas e só pode ser iniciado no começo de cada turno, isto é, às 8 ou 12 ou 16 ou 20 ou 24 ou 04 horas.
- Considere que cada enfermeiro recebe \$100 por hora de trabalho no período diurno (08 às 20 h) e \$125 no período noturno (20 às 08 h)
- Suponha que cada enfermeiro possa trabalhar mais quatro horas consecutivas além de sua jornada normal de trabalho e que a hora-extra seja remunerada em 50% a mais que a hora normal.
- Considere, também, que em cada turno, não mais de 20% dos enfermeiros possa fazer hora-extra.
- Elabore um modelo de PLI que minimize o gasto com a mão-de-obra.

| Turno | Horário | # enf. |
|-------|---------|--------|
| 1     | 08-12   | 51     |
| 2     | 12-16   | 58     |
| 3     | 16-20   | 62     |
| 4     | 20-24   | 41     |
| 5     | 24-04   | 32     |
| 6     | 04-08   | 19     |

# Problema de Alocação de Pessoal com hora-extra



Dados de entrada:

- Turnos = Conjunto de turnos de trabalho
- $req_i$  = número de enfermeiros requeridos no turno  $i$
- $csemhextra_i$  = custo do enfermeiro que começa sua jornada no início do turno  $i$ , em \$, e não faz hora-extra
- $ccomhextra_i$  = custo do enfermeiro que começa sua jornada no início do turno  $i$ , em \$, e FAZ hora-extra
- $phe$  = percentual máximo de enfermeiros fazendo hora-extra em um turno de trabalho

Variáveis de decisão:

- $x_i$  = Número de enfermeiros que começam sua jornada de trabalho no início do turno  $i$  e NÃO FAZEM hora-extra
- $y_i$  = Número de enfermeiros que começam sua jornada de trabalho no início do turno  $i$  e FAZEM hora-extra

# Problema de Alocação de Pessoal



## 1. Função objetivo

Minimizar o custo com as despesas com pessoal

$$\min \sum_{i \in \text{Turnos}} c_{\text{semhextra}} x_i + \sum_{i \in \text{Turnos}} c_{\text{comhextra}} y_i$$

## 2. Restrições

- a) A demanda por enfermeiros em cada turno  $i$  deve ser atendida

$$x_i + x_{i-1} + y_i + y_{i-1} + y_{i-2} \geq req_i \quad \forall i \in \text{Turnos}$$

- b) Em cada turno, não mais de  $phe$  ( $= 20\%$ ) dos enfermeiros podem fazer hora-extra

$$y_{i-2} \leq phe \times (x_i + x_{i-1} + y_i + y_{i-1} + y_{i-2}) \quad \forall i \in \text{Turnos}$$

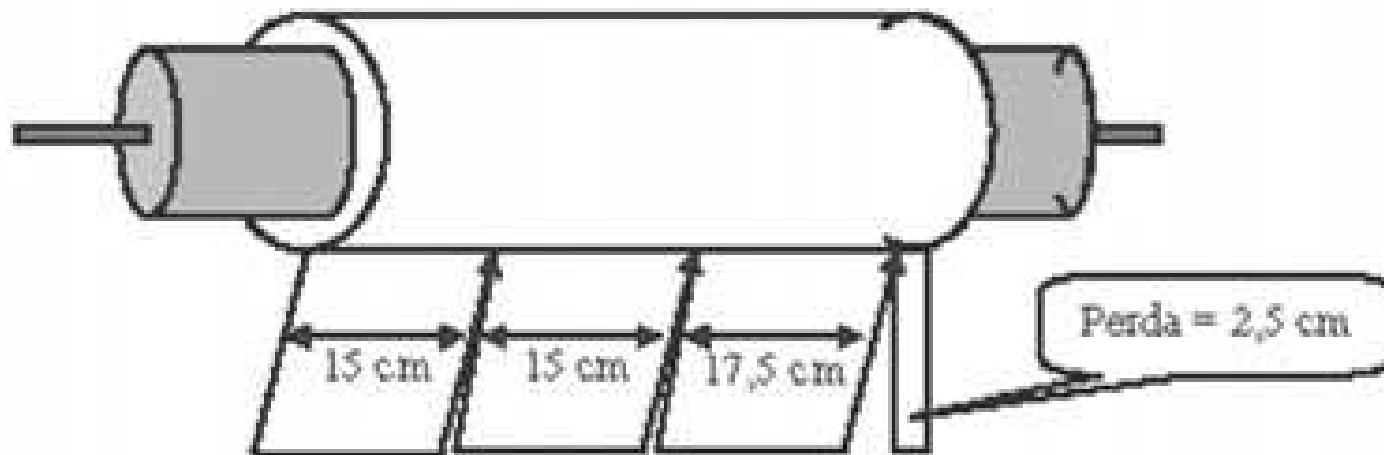
- c) Não-negatividade e integralidade

$$x_i, y_i \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i \in \text{Turnos}$$

## Problema de Corte de Estoque (1) (Cutting Stock Problem)



- Certa empresa trabalha com a produção de etiquetas autocolantes. O papel usado para sua confecção encontra-se em bobinas de mesmo comprimento, todas com largura de 50 cm.
- Há uma programação para a próxima semana de 32 bobinas de 15 cm, 17 bobinas de 17,5 cm e 21 bobinas de 20 cm.





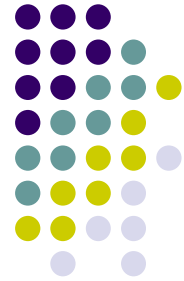
## Problema de Corte de Estoque (1) (Cutting Stock Problem)

- É política da empresa estocar um máximo de 10 bobinas de cada tipo (Esta ação evita a imobilização de capital, uma vez que são incertos os próximos pedidos).
- Os possíveis padrões de corte estabelecidos pelo setor técnico são especificados na tabela ao lado.
- Qual a programação de corte a ser adotada que minimiza o desperdício face à necessidade de produção?

| Padrão de corte | Largura da faixa |         |       | Perda (cm) |
|-----------------|------------------|---------|-------|------------|
|                 | 15 cm            | 17,5 cm | 20 cm |            |
| 1               | 3                | 0       | 0     | 5          |
| 2               | 2                | 1       | 0     | 2,5        |
| 3               | 1                | 2       | 0     | 0          |
| 4               | 2                | 0       | 1     | 0          |
| 5               | 0                | 1       | 1     | 12,5       |
| 6               | 0                | 0       | 2     | 10         |

# Problema de Corte de Estoque (1)

## *(Cutting Stock Problem)*



Dados de entrada:

- Padroes = Conjunto dos padrões de corte
- Bobinas = Conjunto dos tipos de bobinas
- $perda_i$  = perda, em cm, com o uso do padrão de corte  $i$
- $demandaj$  = quantidade de bobinas do tipo  $j$  requeridas
- $estmax$  = estoque máximo permitido de bobinas de cada tipo
- $a_{ij}$  = número de bobinas de largura  $j$  existentes no padrão  $i$

Variáveis de decisão:

- $x_i$  = Número de vezes em que se usa o padrão de corte  $i$



# Problema de Corte de Estoque (1) (Cutting Stock Problem)



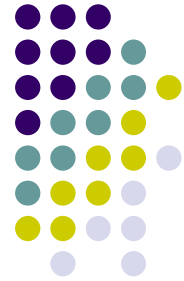
$$\min \sum_{i \in \text{Padroes}} \text{perda}_i x_i \quad \left. \vphantom{\sum_{i \in \text{Padroes}}} \right\} \text{Minimizar a perda com os cortes}$$

$$\sum_{i \in \text{Padroes}} a_{ij} x_i \geq \text{demanda}_j \quad \forall j \in \text{Bobinas} \quad \left. \vphantom{\sum_{i \in \text{Padroes}}} \right\} \text{A demanda por bobinas do tipo } j \text{ deve ser atendida}$$

$$\sum_{i \in \text{Padroes}} a_{ij} x_i \leq \text{demanda}_j + \text{estmax} \quad \forall j \in \text{Bobinas} \quad \left. \vphantom{\sum_{i \in \text{Padroes}}} \right\} \text{O excesso de bobinas do tipo } j \text{ não pode exceder a estmax}$$

$$x_i \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i \in \text{Padroes}$$

## Problema de Corte de Estoque (2) (Cutting Stock Problem)



- Relativamente ao problema anterior, suponha que se deseje minimizar, além da perda inerente ao processo de corte, também a perda com o excesso de bobinas cortadas
- Neste caso, o modelo anterior sofre a seguinte alteração:
  - A função objetivo tem agora uma segunda parcela, que mede a perda com o excesso de bobinas cortadas. Nessa parcela, para cada largura de bobina requerida, o número de bobinas em excesso é multiplicado pela largura da bobina, resultando na perda em cm devido ao excesso de bobinas cortadas.

$$\min \sum_{i \in \text{Padroes}} \text{perda}_i x_i + \sum_{j \in \text{Bobinas}} \text{largura}_j \times \left( \sum_{i \in \text{Padroes}} a_{ij} x_i - \text{demanda}_j \right)$$

## Problema de Corte de Estoque (3) (*Cutting Stock Problem*)



- Uma serralheria dispõe de barras de 7 metros de comprimento
- É necessário cortar essas barras de forma a atender a uma encomenda por barras menores nos seguintes comprimentos:
  - 92 barras de 2 metros
  - 59 barras de 3 metros
  - 89 barras de 4 metros
- Elaborar um modelo para atender ao pedido minimizando a perda com o corte das barras e também com o excesso de barras cortadas

## Problema de Corte de Estoque (3) (*Cutting Stock Problem*)



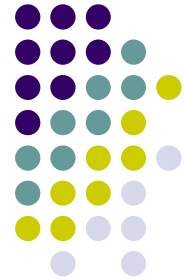
Dados de entrada:

- Padroes = Conjunto dos padrões de corte
- Barras = Conjunto dos tipos de barras a serem produzidas
- $perda_i$  = perda, em cm, com o uso do padrão de corte  $i$
- $demandaj$  = quantidade de barras do tipo  $j$  requeridas
- $a_{ij}$  = número de barras do tipo  $j$  existentes no padrão  $i$
- $compr_j$  = comprimento, em cm, da barra do tipo  $j$

Variáveis de decisão:

- $x_i$  = Número de vezes em que se usa o padrão de corte  $i$

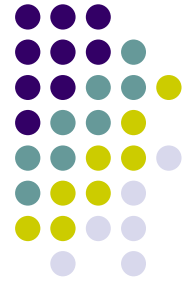
## Problema de Corte de Estoque (3) (*Cutting Stock Problem*)



Primeiro passo: Estabelecimento dos padrões de corte

|        | Barras |    |    |       |
|--------|--------|----|----|-------|
| Padrão | 2m     | 3m | 4m | Perda |
| 1      | 0      | 1  | 1  | 0     |
| 2      | 0      | 2  | 0  | 1     |
| 3      | 1      | 0  | 1  | 1     |
| 4      | 2      | 1  | 0  | 0     |
| 5      | 3      | 0  | 0  | 1     |

## Problema de Corte de Estoque (3) (Cutting Stock Problem)



Segundo passo: Modelagem do problema

$$\min \underbrace{\sum_{i \in \text{Padroes}} \text{perda}_i x_i}_{\text{Perda referente aos padrões de corte}} + \underbrace{\sum_{j \in \text{Barras}} \text{compr}_j \times \left( \sum_{i \in \text{Padroes}} a_{ij} x_i - \text{demanda}_j \right)}_{\text{Perda referente ao excesso de barras produzidas}}$$

Perda referente aos  
padrões de corte

Perda referente ao excesso de barras  
produzidas

$$\sum_{i \in \text{Padroes}} a_{ij} x_i \geq \text{demanda}_j \quad \forall j \in \text{Barras}$$

$$x_i \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i \in \text{Padroes}$$



# Problema da Mochila 0-1

- É dado um conjunto de objetos, uma unidade de cada
- Há uma mochila de capacidade  $cap$  para colocar os objetos
- Cada objeto tem associado um peso  $w_j$  e um valor de retorno  $p_j$  se for alocado à mochila
- Determinar quais objetos devem ser alocados à mochila de forma que o valor de retorno seja o maior possível

Dados de entrada:

- Objetos = Conjunto dos diferentes tipos de objeto
- $cap$  = Capacidade da mochila
- $w_j$  = peso (*weight*) do objeto  $j$
- $p_j$  = benefício (*profit*) proporcionado pelo uso do objeto  $j$

Variáveis de decisão:

- $x_j = 1$  se o objeto  $j$  for alocado à mochila e zero, caso contrário

# Problema da Mochila 0-1: modelo de programação linear



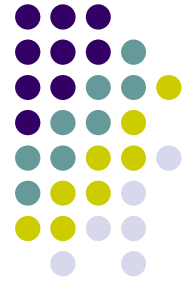
$$\max \sum_{j \in \text{Objetos}} p_j x_j \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximizar o benefício pelo uso dos} \\ \text{objetos (Levar os objetos mais valiosos)} \end{array} \right.$$

$$\sum_{j \in \text{Objetos}} w_j x_j \leq \text{cap} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{A capacidade da mochila não pode ser} \\ \text{superada} \end{array} \right.$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in \text{Objetos} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Apenas uma unidade de cada objeto} \\ \text{pode ser alocada à mochila} \end{array} \right.$$



# Problema da Mochila 0-1 Múltipla



Dados de entrada:

- Objetos = Conjunto dos diferentes tipos de objeto
- Mochilas = Conjunto dos diferentes tipos de mochila
- $cap_i$  = Capacidade da mochila  $i$
- $w_j$  = peso (*weight*) do objeto  $j$
- $p_j$  = benefício (*profit*) proporcionado pelo uso do objeto  $j$

Variáveis de decisão:

- $x_{ij} = 1$  se o objeto  $j$  for alocado à mochila  $i$  e zero, caso contrário

# Problema da Mochila 0-1 Múltipla: modelo de programação linear

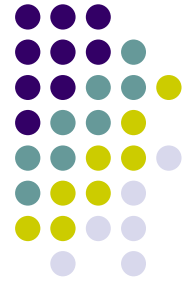


$$\max \sum_{i \in \text{Mochilas}} \sum_{j \in \text{Objetos}} p_j x_{ij} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximizar o benefício pelo uso dos} \\ \text{objetos (Levar os objetos mais valiosos)} \end{array} \right.$$

$$\sum_{j \in \text{Objetos}} w_j x_{ij} \leq \text{cap}_i \quad \forall i \in \text{Mochilas} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{A capacidade de cada mochila } i \text{ não} \\ \text{pode ser superada} \end{array} \right.$$

$$\sum_{i \in \text{Mochilas}} x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in \text{Objetos} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Cada objeto } j, \text{ se for usado, deve ser} \\ \text{alocado à uma única mochila } i \end{array} \right.$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in \text{Mochilas}, \forall j \in \text{Objetos} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Apenas uma unidade do objeto } j \text{ pode} \\ \text{ser alocada à mochila } i \end{array} \right.$$



# Problema da Mochila Inteira Múltipla

Dados de entrada:

- Objetos = Conjunto dos diferentes tipos de objeto
- Mochilas = Conjunto dos diferentes tipos de mochila
- $u_j$  = quantidade de objetos  $j$  disponíveis
- $cap_i$  = Capacidade da mochila  $i$
- $w_j$  = peso (*weight*) do objeto  $j$
- $p_j$  = benefício (*profit*) proporcionado pelo uso do objeto  $j$

Variáveis de decisão:

- $x_{ij}$  = quantidade de objetos do tipo  $j$  alocados à mochila  $i$

# Problema da Mochila Inteira Múltipla: modelo de programação linear



$$\max \sum_{i \in \text{Mochilas}} \sum_{j \in \text{Objetos}} p_j x_{ij}$$

Maximizar o benefício pelo uso dos objetos (Levar os objetos mais valiosos)

$$\sum_{j \in \text{Objetos}} w_j x_{ij} \leq \text{cap}_i \quad \forall i \in \text{Mochilas}$$

A capacidade de cada mochila  $i$  não pode ser superada

$$\sum_{i \in \text{Mochilas}} x_{ij} \leq u_j \quad \forall j \in \text{Objetos}$$

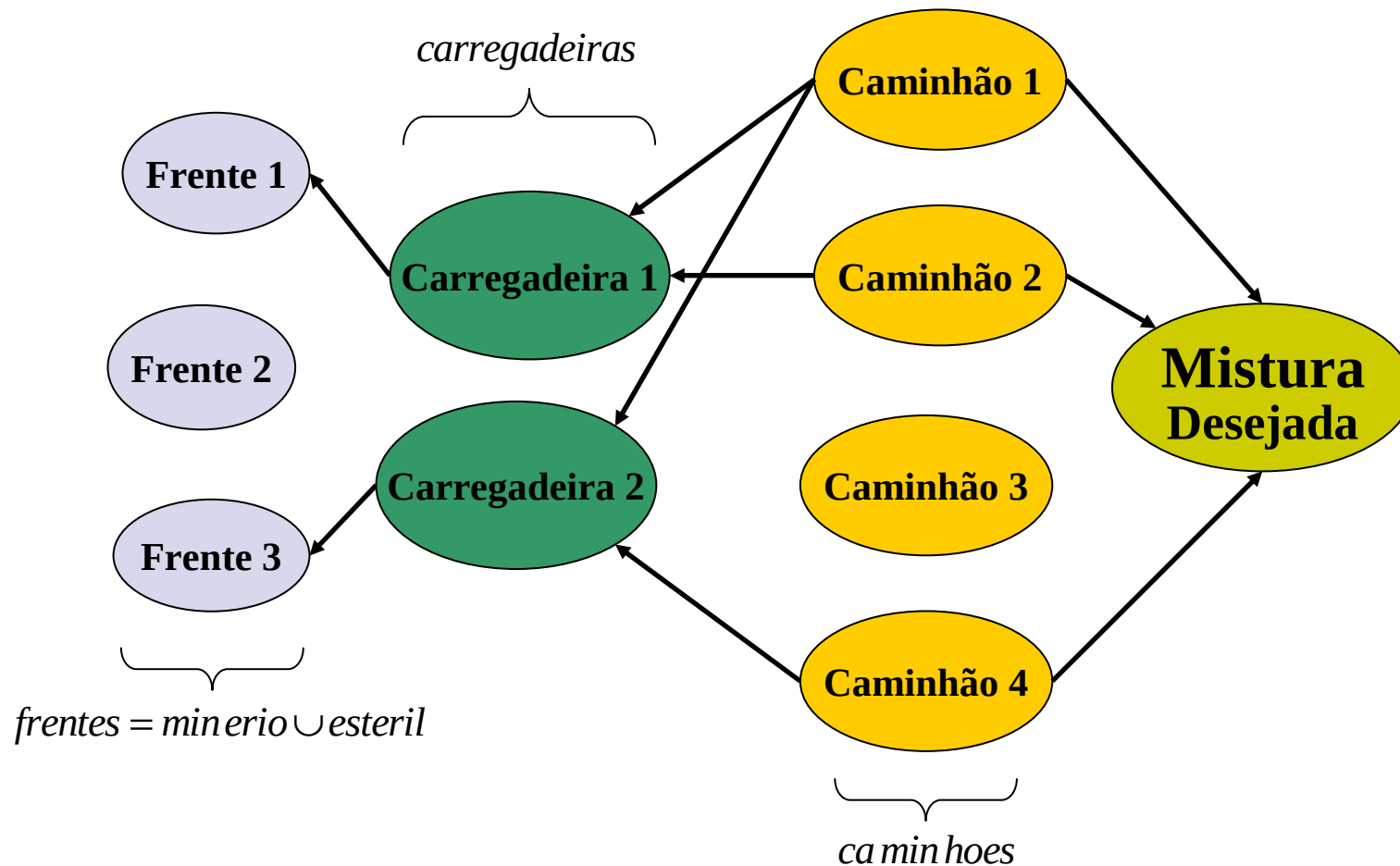
Para cada objeto  $j$  só podem ser usados, no máximo,  $u_j$  unidades

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i \in \text{Mochilas}, \forall j \in \text{Objetos}$$

A quantidade de objetos do tipo  $j$  a serem alocados à mochila do tipo  $i$  é inteira

# Alocação Dinâmica de Caminhões

## DESCRIÇÃO



# Alocação Dinâmica de Caminhões



## Função Objetivo

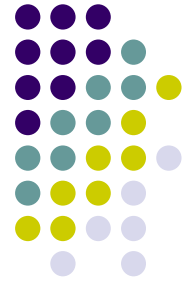
$$\min \sum_{j \in \text{parametros}} \alpha_j^- d_j^- + \sum_{j \in \text{parametros}} \alpha_j^+ d_j^+ + \beta^- P^- + \beta^+ P^+$$

Diagram illustrating the objective function components and their interpretations:

- $\alpha_j^- d_j^-$ :
  - Upward arrow: Peso por desvio negativo de meta para o parâmetro j
  - Downward arrow: Desvio negativo de meta do parâmetro j na mistura (t/h)
- $\alpha_j^+ d_j^+$ :
  - Upward arrow: Peso por desvio positivo de meta para o parâmetro j
  - Downward arrow: Desvio positivo de meta do parâmetro j na mistura (t/h)
- $\beta^- P^-$ :
  - Upward arrow: Peso por desvio negativo da produção
  - Downward arrow: Desvio negativo da meta de produção (t/h)
- $\beta^+ P^+$ :
  - Upward arrow: Peso por desvio positivo da produção
  - Downward arrow: Desvio positivo da meta de produção (t/h)

# Alocação Dinâmica de Caminhões

## Restrições da Mistura de Minérios



Teor máximo admissível

$$\sum_{i \in \text{minerio}} (t_{ij} - tu_j) x_i \leq 0 \quad \forall j \in \text{parametros}$$

Teor mínimo admissível

$$\sum_{i \in \text{minerio}} (t_{ij} - tl_j) x_i \geq 0 \quad \forall j \in \text{parametros}$$

Teor recomendado (meta de qualidade)

$$\sum_{i \in \text{minerio}} (t_{ij} - tr_j) x_i + d_j^- - d_j^+ = 0 \quad \forall j \in \text{parametros}$$

# Alocação Dinâmica de Caminhões

## Restrições relativas ao Ritmo de Lavra



Ritmo de lavra máximo:

$$\sum_{i \in \text{minerio}} x_i \geq Pl$$

Ritmo de lavra mínimo:

$$\sum_{i \in \text{minerio}} x_i \leq Pu$$

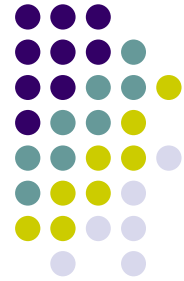
Ritmo de lavra recomendado (meta de produção):

$$\sum_{i \in \text{minerio}} x_i + P^- - P^+ = Pr$$



# Alocação Dinâmica de Caminhões

## Restrição relativa à Relação Estéril/Minério

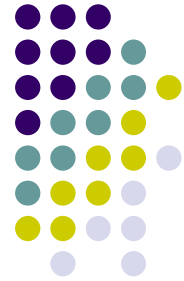


$$\sum_{i \in \text{esteril}} x_i \geq rem \sum_{i \in \text{minerio}} x_i$$

| $\sum_{i \in \text{esteril}} x_i$ | $\sum_{i \in \text{minerio}} x_i$ | $rem$ | $\sum_{i \in \text{esteril}} x_i \geq rem \sum_{i \in \text{minerio}} x_i$ |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-------|----------------------------------------------------------------------------|
| 90 (t/h)                          | 1000 (t/h)                        | 0,10  | 90 >= 100                                                                  |
| 100 (t/h)                         | 1000 (t/h)                        | 0,10  | 100 >= 100                                                                 |

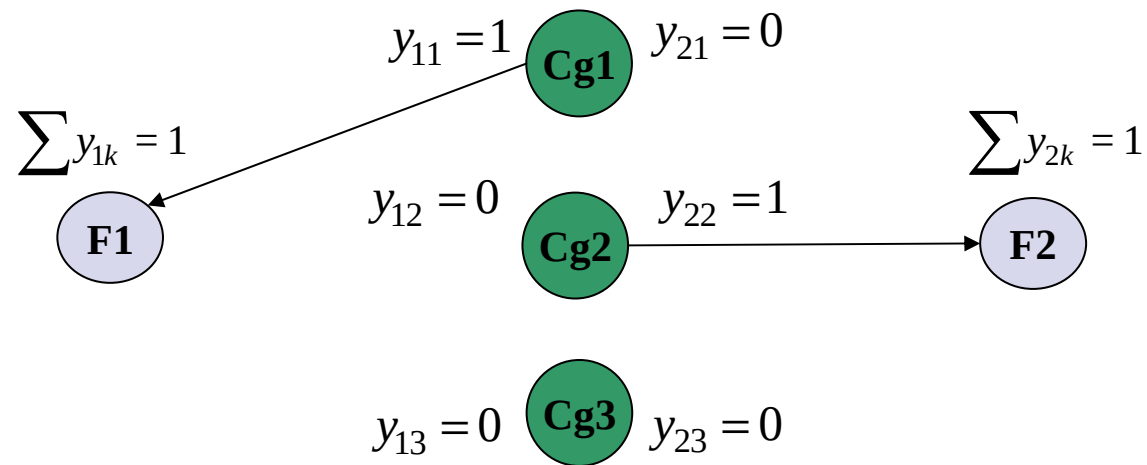
# Alocação Dinâmica de Caminhões

## Restrições ligadas à Alocação das Carregadeiras (1)



Em uma frente só pode estar operando uma carregadeira, no máximo

$$\sum_{k \in \text{carregadeiras}} y_{ik} \leq 1 \quad \forall i \in \text{frentes}$$



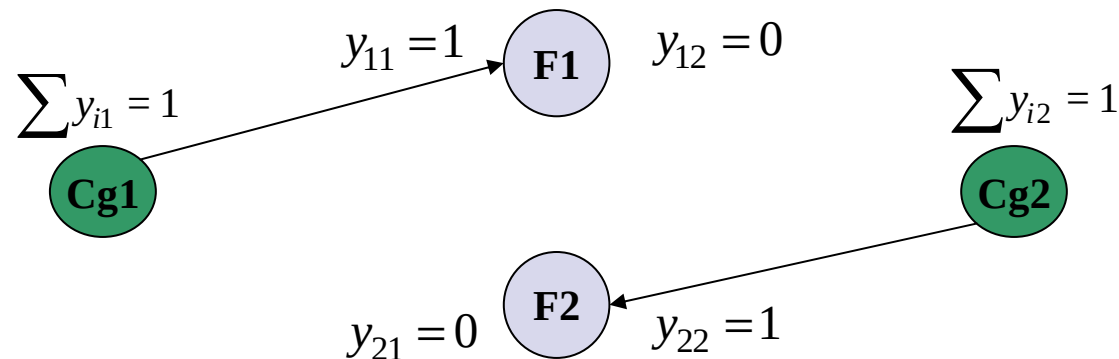
# Alocação Dinâmica de Caminhões

## Restrições ligadas à Alocação das Carregadeiras (2)



Uma carregadeira pode ser alocada a uma frente, no máximo:

$$\sum_{i \in \text{frentes}} y_{ik} \leq 1 \quad \forall k \in \text{carregadeiras}$$



# Alocação Dinâmica de Caminhões

## Restrições relativas à Produção das Carregadeiras:



Respeito à Capacidade máxima da carregadeira alocada à cada frente

$$x_i \leq \sum_{k \in \text{carregadeiras}} Cu_k y_{ik} \quad \forall i \in \text{frentes}$$

Respeito à Capacidade mínima da carregadeira alocada à cada frente

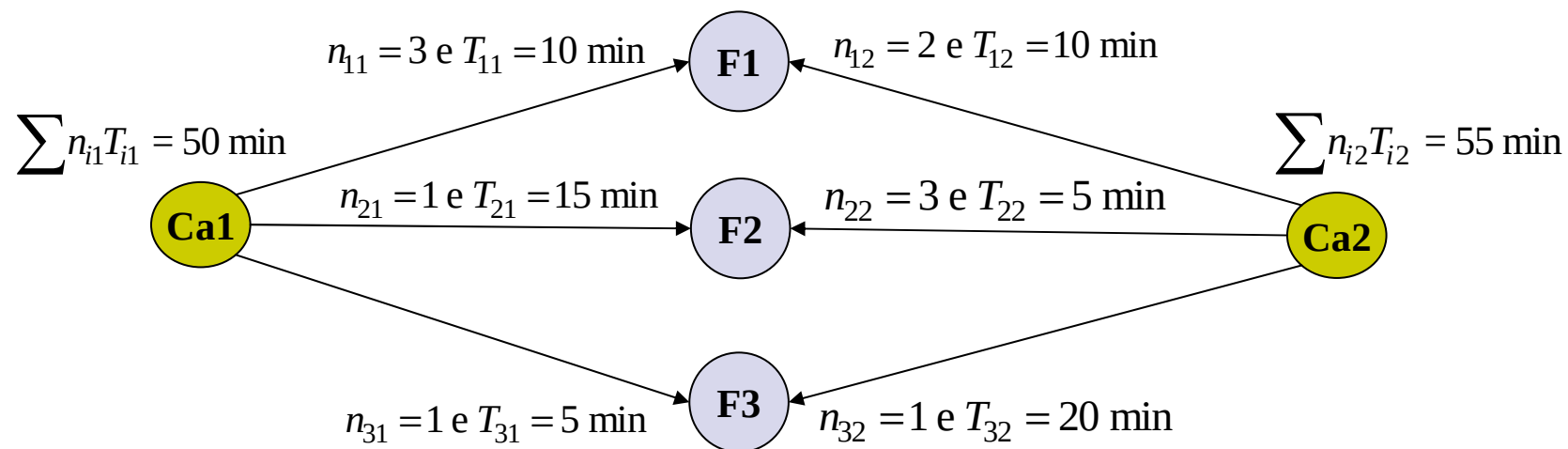
$$x_i \geq \sum_{k \in \text{carregadeiras}} Cl_k y_{ik} \quad \forall i \in \text{frentes}$$

# Alocação Dinâmica de Caminhões



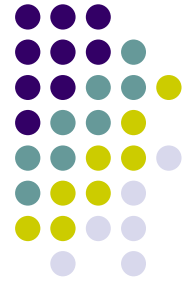
O número de viagens que cada caminhão  $l$  faz à cada frente  $i$  em uma hora depende de seu tempo de ciclo:

$$\sum_{i \in \text{frentes}} n_{il} T_{il} \leq 60 \quad \forall l \in \text{caminhões}$$

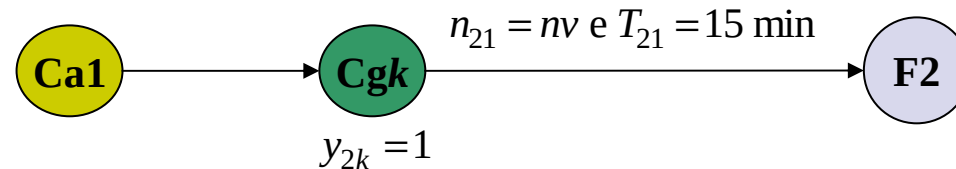


# Alocação Dinâmica de Caminhões

## Restrições relativas à Compatibilidade dos Caminhões



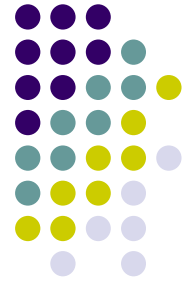
$$n_{il}T_{il} \leq 60 \times \sum_{\substack{k \in \text{Carregadeiras} \\ \text{compatibilidade}_{lk}=1}} y_{ik} \quad \forall i \in \text{frentes}, l \in \text{caminhoes}$$



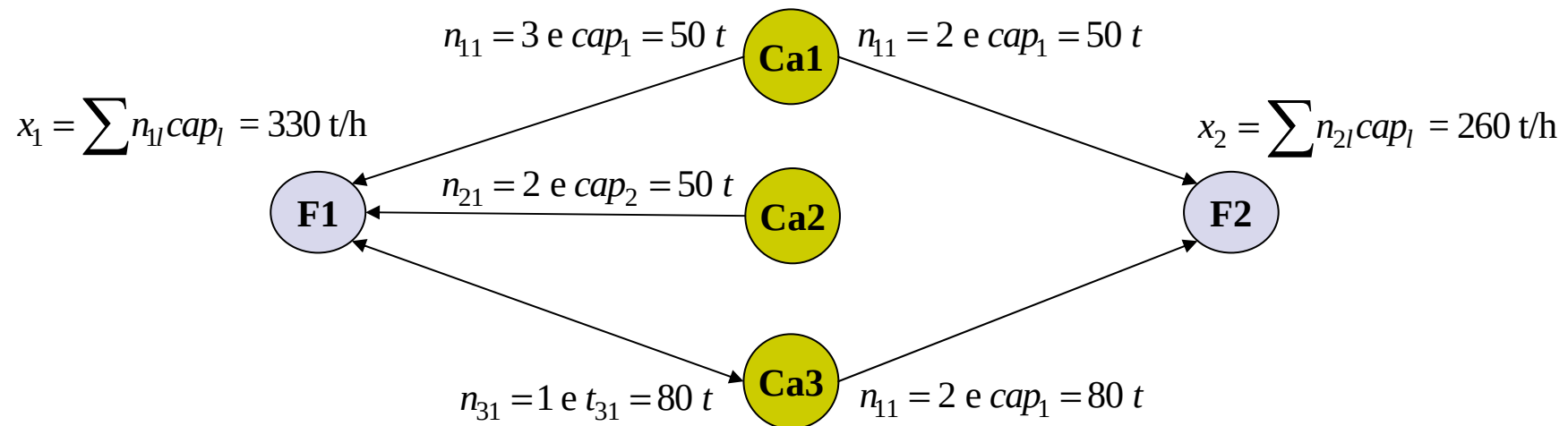
$$\begin{cases} \text{Se } \text{comp}_{1k} = 1 \text{ então } nv = 0 \text{ até } 4 \text{ (60/15)} \\ \text{Se } \text{comp}_{1k} = 0 \text{ então } nv = 0 \end{cases}$$

# Alocação Dinâmica de Caminhões

## Restrições relativas à Produção dos Caminhões

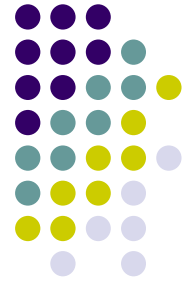


$$x_i = \sum_{l \in \text{caminhoes}} n_{il} cap_l \quad \forall i \in \text{frentes}$$



# Alocação Dinâmica de Caminhões

## Restrições de Integralidade e Não-negatividade



$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in \text{frentes}$$

$$y_{ik} \in \{0,1\} \quad \forall i \in \text{frentes}, k \in \text{carregadeiras}$$

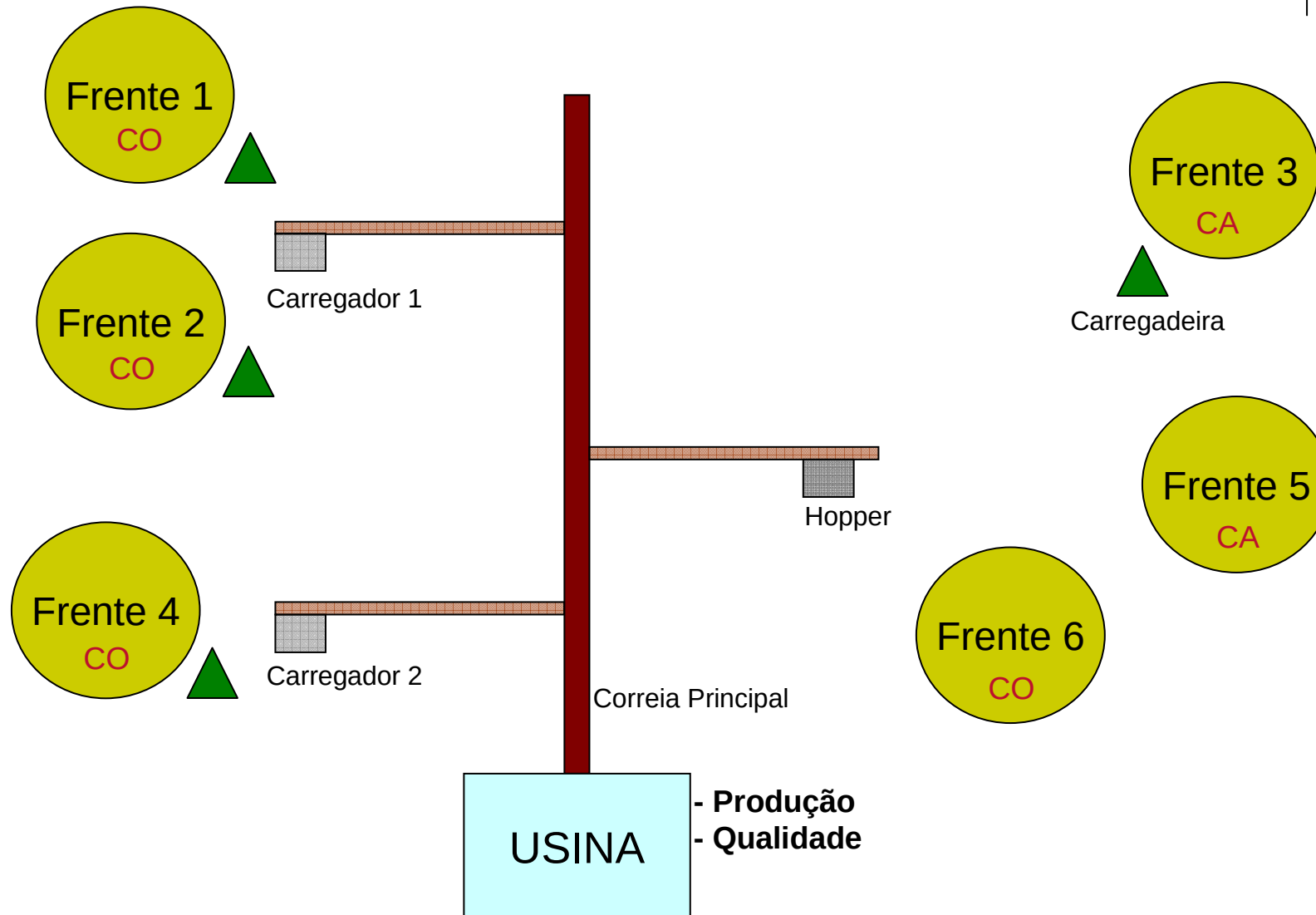
$$n_{il} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i \in \text{frentes}, l \in \text{caminhoes}$$

$$d_j^-, d_j^+ \geq 0 \quad \forall j \in \text{parametros}$$

$$P^-, P^+ \geq 0$$



# Determinação do Ritmo de Lavra



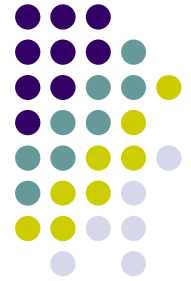
# Determinação do Ritmo de Lavra: Dados de Entrada



- Limites inferior, superior e meta dos parâmetros de controle (Fe, SiO<sub>2</sub>, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, P, etc);
- Produção mínima, máxima e a meta de produção, em ton/h, para atender a usina;
- Frentes de lavra que podem ou não estar disponíveis (ativadas), com suas respectivas características químicas, ritmos de lavra desejados e método de lavra (caminhão ou correia);
- Quantidade e modelos de carregadeiras disponíveis;
- Produtividade mínima e máxima das carregadeiras.

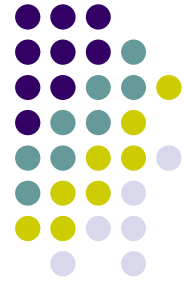
|                        | CA   | CO                              |
|------------------------|------|---------------------------------|
| <i>Cu (prod. max.)</i> | fixo | varia com a DM da CAR a correia |
| <i>Cl (prod. min.)</i> | fixo | fixo                            |

# Determinação do Ritmo de Lavra: Objetivos



- Determinar o ritmo de lavra próximo da meta de produção
- Gerar um produto dentro de certas especificações e próximo às metas de qualidade
- Fazer a alocação dos equipamentos de carga

# Determinação do Ritmo de Lavra: Função MultiObjetivo



$$\begin{aligned} \min fo = & \sum_{j \in \text{parametros}} (wdq_j \times dnq_j + wde_j \times dne_j) + \\ & \sum_{j \in \text{parametros}} (wdq_j \times dpq_j + wde_j \times dpe_j) + \\ & wp (pn + pp) + wdp (dnp + dpp) \end{aligned}$$

- $wdq_j$**  : peso para o desvio da meta no parâmetro  $j$ ;
- $wde_j$**  : peso para o desvio fora dos limites de especificação no parâmetro  $j$ ;
- $dnq_j$**  : desvio negativo da meta no parâmetro  $j$ ;
- $dpq_j$**  : desvio positivo da meta no parâmetro  $j$ ;
- $dne_j$**  : desvio negativo abaixo do limite mínimo de especificação no parâmetro  $j$ ;
- $dpe_j$**  : desvio positivo acima do limite máximo de especificação no parâmetro  $j$ ;
- $wp$**  : peso para o desvio da meta de produção;
- $pn$**  : desvio negativo da meta de produção;
- $pp$**  : desvio positivo da meta de produção;
- $wdp$**  : peso para o desvio fora dos limites de produção;
- $dnp$**  : desvio negativo abaixo do limite mínimo de produção;
- $dpp$**  : desvio positivo acima do limite máximo de produção;

# Determinação do Ritmo de Lavra: Restrições



- Restrições relativas aos limites e metas dos parâmetros de controle:

Teor do parâmetro de controle  $j$  não pode superar o limite máximo de especificação ( $tu_j$ )

$$\sum_{i \in \text{frentes}} ((teores_{ij} - tu_j) \times x_i) - dpe_j \leq 0 \quad \forall j \in \text{parametros}$$

Teor do parâmetro de controle  $j$  não pode ser menor que o limite mínimo de especificação ( $tl_j$ )

$$\sum_{i \in \text{frentes}} ((teores_{ij} - tl_j) \times x_i) + dne_j \geq 0 \quad \forall j \in \text{parametros}$$

Teor do parâmetro de controle  $j$  deve buscar a meta de qualidade ( $tr_j$ )

$$\sum_{i \in \text{frentes}} ((teores_{ij} - tr_j) \times x_i) + dnq_j - dpq_j = 0 \quad \forall j \in \text{parametros}$$

# Determinação do Ritmo de Lavra: Restrições



- Restrições de Produção:

Ritmo total de lavra não pode superar o limite máximo de produção ( $pu$ )

$$\sum_{i \in \text{Frentes}} x_i - dpp \leq pu$$

Ritmo total de lavra não pode ser menor que o limite mínimo de produção ( $pl$ )

$$\sum_{i \in \text{Frentes}} x_i + dnp \geq pl$$

Ritmo total de lavra deve buscar a meta de produção ( $pr$ )

$$\sum_{i \in \text{Frentes}} x_i + pn - pp = pr$$

# Determinação do Ritmo de Lavra: Restrições



- Restrições de Produção Por Frente:

Ritmo de lavra na frente  $i$  não pode superar o limite máximo de produção da carregadeira  $k$  na frente  $i$  ( $Cu_{ik}$ ), o qual é fixo se o método de lavra for caminhão, mas é variável de acordo com a distância da carregadeira à correia, se o método de lavra for correia transportadora.

$$x_i \leq \sum_{k \in \text{Carregadeiras}} Cu_{ik} y_{ik} \quad \forall i \in \text{frentes}$$

Ritmo de lavra na frente  $i$  não pode ser inferior ao limite mínimo de produção da carregadeira  $k$  ( $Cl_k$ )

$$x_i \geq \sum_{k \in \text{Carregadeiras}} Cl_k y_{ik} \quad \forall i \in \text{frentes}$$

# Determinação do Ritmo de Lavra: Restrições



- Restrições relativas às Carregadeiras:

Em cada frente só pode haver uma carregadeira operando

$$\sum_{k \in \text{Carregadeiras}} y_{ik} \leq 1 \quad \forall i \in \text{Frentes}$$

O número de carregadeiras do modelo  $k$  utilizadas não pode ultrapassar o número de carregadeiras disponíveis desse modelo ( $carregdisp_k$ )

$$\sum_{i \in \text{Frentes}} y_{ik} \leq carregdisp_k \quad \forall k \in \text{Carregadeiras}$$

|              |        |
|--------------|--------|
| CAR modelo 1 | 3 unid |
|--------------|--------|

$$y_{11} + y_{21} + y_{31} + y_{41} \leq 3$$

4 Frentes



# Determinação do Ritmo de Lavra: Restrições



- Restrições relativas ao Ritmo de Lavra:

Quando for definido um ritmo de lavra mínimo ( $ritmin_i$ ) para uma frente  $i$  e ela estiver disponível ( $dispfrente_i$ ), então esse ritmo mínimo tem que ser respeitado:

$$x_i \geq ritmin_i \times dispfrente_i \quad \forall i \in Frentes \mid ritmin_i \neq 0$$

Quando for definido um ritmo de lavra máximo ( $ritmax_i$ ) para uma frente  $i$  e ela estiver disponível ( $dispfrente_i$ ), então esse ritmo máximo tem que ser respeitado:

$$x_i \leq ritmax_i \times dispfrente_i \quad \forall i \in Frentes \mid ritmin_i \neq 0$$

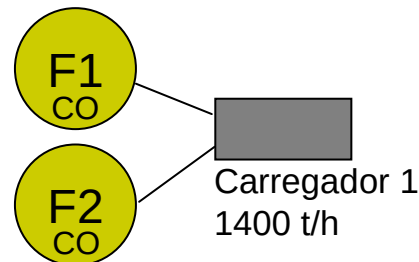
# Determinação do Ritmo de Lavra: Restrições



- Restrições de Capacidade:

O ritmo de lavra total das frentes que operam com o carregador  $l$  não pode ultrapassar a capacidade do carregador

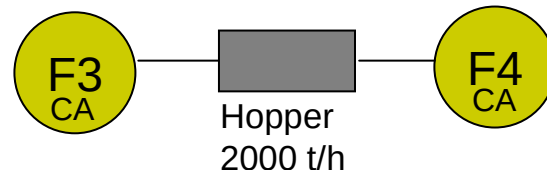
$$\sum_{i \in \text{Frentes}} (x_i \mid \text{carregador}_i = l) \leq \text{capcarregador} \quad \forall l \in \text{carregadores}$$



$$x_1 + x_2 \leq 1400$$

O ritmo de lavra total das frentes que operam com caminhão não pode ultrapassar a capacidade do Hopper

$$\sum_{i \in \text{Frentes}} (x_i \mid \text{Método de lavra da frente } i \text{ é caminhão}) \leq \text{caphopper}$$



$$x_3 + x_4 \leq 2000$$

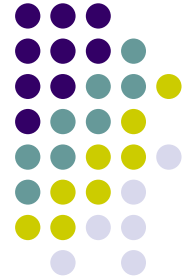
## COMPOSIÇÃO DE LOTES DE MINÉRIO DE FERRO DA MINA CAUÊ



- Otimizar a coleta de minério dos pátios de estocagem:
  - Produzir soluções que melhor se aproximem das metas de qualidade estabelecidas
  - Ao utilizar minério de uma pilha, tentar eliminá-la, sempre que possível
  - Respeitar as restrições operacionais dos pátios

# COMPOSIÇÃO DE LOTES DE MINÉRIO DE FERRO DA MINA CAUÊ

## O MODELO BASEADO EM PROGRAMAÇÃO POR METAS

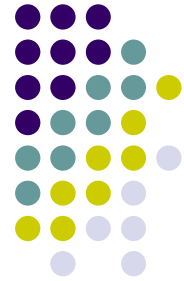


### Parâmetros do modelo

- ✓ Pátio: Conjunto de pátios, no caso,  $\text{Pátio} = \{A, B, C\}$ ;
- ✓  $\text{Baliza}(k)$ : Conjunto de balizas do pátio  $k$ . Para cada pátio  $k$  o número de balizas  $nb$  varia no intervalo  $[1, nb(k)]$ . Para o pátio A, tem-se:  $\text{Baliza}(A) = \{-25, -20, -15, \dots, 330\}$ , isto é,  $nb(A) = 71$ ;
- ✓ Cada pilha situada em uma dada baliza  $i$  de um dado pátio  $k$ , é dividido em duas partes: uma superior, denotada por  $sup$ , outra inferior, denotada por  $inf$ .
- ✓  $\text{Eliminar}_{ijk}$ : Parâmetro que assume o valor 1 se a pilha situada na baliza  $i$ , parte  $j$  do pátio  $k$  deve ser completamente eliminada, como desejo do operador ;
- ✓  $\text{ElParc}_{ijk}$ : Quantidade de minério, em toneladas, a ser eliminado da parte  $j$  da baliza  $i$  do pátio  $k$ ;
- ✓  $\text{Qu}_{ijk}$ : Quantidade de minério, em toneladas, existente na baliza  $i$  do pátio  $k$ , na parte  $j$ ;
- ✓  $\text{tem}_{ijl}$ : Parâmetro que assume valor 1 se há um conjunto de pilhas contíguas iniciando na baliza  $i$ , parte  $j$ , do pátio  $k$ . Para as demais balizas, o parâmetro assume o valor zero;
- ✓  $\text{nep}_k$ : Número máximo de conjuntos de pilhas contíguas a serem retiradas do pátio  $k$  nas posições  $inf$  e  $sup$ ;
- ✓  $S$ : Conjunto dos parâmetros de qualidade analisados no minério;
- ✓  $t_{ijkl}$ : Teor do parâmetro  $l$  na parte  $j$  da pilha situada na baliza  $i$  do pátio  $k$  (%);
- ✓  $tr_l$ : Teor recomendado para o parâmetro  $l$  no produto final (%);
- ✓  $lig_l$ : Limite inferior de garantia, isto é, teor mínimo admissível para o parâmetro  $l$  no produto final (%);
- ✓  $lsg_l$ : Limite superior de garantia, isto é, teor máximo admissível para o parâmetro  $l$  no produto final (%);

# COMPOSIÇÃO DE LOTES DE MINÉRIO DE FERRO DA MINA CAUÊ

## O MODELO BASEADO EM PROGRAMAÇÃO POR METAS



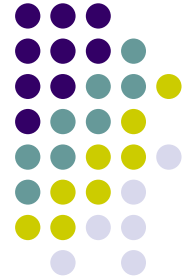
### Parâmetros do modelo

Sejam os seguintes parâmetros de entrada:

- ✓  $lie_i$ : Limite inferior de especificação, isto é, teor mínimo recomendável para o parâmetro  $i$  no produto final (%);
- ✓  $lse_i$ : Limite superior de especificação, isto é, teor máximo recomendável para o parâmetro  $i$  no produto final (%);
- ✓  $\alpha_i^+$ : Penalidade por desvio positivo em relação ao limite superior de garantia do parâmetro  $i$  no produto final;
- ✓  $\alpha_i^-$ : Penalidade por desvio negativo em relação ao limite inferior de garantia do parâmetro  $i$  no produto final;
- ✓  $\gamma_i^+$ : Penalidade por desvio positivo em relação ao limite superior de especificação do parâmetro  $i$  no produto final;
- ✓  $\gamma_i^-$ : Penalidade por desvio negativo em relação ao limite inferior de especificação do parâmetro  $i$  no produto final;
- ✓  $\delta_i^+$ : Penalidade por desvio negativo em relação à meta de qualidade para o parâmetro  $i$  no produto final;
- ✓  $\delta_i^-$ : Penalidade por desvio positivo em relação à meta de qualidade para o parâmetro  $i$  no produto final;
- ✓  $\beta^+$ : Penalidade por desvio negativo na meta de produção;
- ✓  $\beta^-$ : Penalidade por desvio positivo na meta de produção;
- ✓  $P_m$ : meta de produção (t);

# COMPOSIÇÃO DE LOTES DE MINÉRIO DE FERRO DA MINA CAUÊ

## O MODELO BASEADO EM PROGRAMAÇÃO POR METAS



### Variáveis de decisão

- ✓  $x_{ijk}$ : quantidade de minério, em toneladas, a ser retirado da parte  $j$  da baliza  $i$  do pátio  $k$ ;
- ✓  $y_{ijk} : \begin{cases} 1 & \text{se a pilha que está na baliza } i \text{ do pátio } k, \text{ parte } j, \text{ pode ser usada} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$
- ✓  $z_{ijk} : \begin{cases} 1 & \text{se a pilha que está na baliza } i \text{ do pátio } k, \text{ parte } j, \text{ será usada} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$
- ✓  $dg_l^+$ : Desvio positivo do parâmetro  $l$  no produto final (t) , em relação ao limite superior de garantia;
- ✓  $dg_l^-$ : Desvio negativo do parâmetro  $l$  no produto final (t), em relação ao limite inferior de garantia;
- ✓  $de_l^+$ : Desvio positivo do parâmetro  $l$  no produto final (t) , em relação ao seu limite superior de especificação;
- ✓  $de_l^-$ : Desvio negativo do parâmetro  $l$  no produto final (t) , em relação ao seu limite inferior de especificação;
- ✓  $dr_l^+$ : Desvio positivo do parâmetro  $l$  no produto final (t) , em relação à meta;
- ✓  $dr_l^-$ : Desvio negativo do parâmetro  $l$  no produto final (t) , em relação à meta;
- ✓  $P^-$ : Desvio negativo em relação à meta de produção (t);
- ✓  $P^+$ : Desvio positivo em relação à meta de produção (t);
- ✓  $dbaliza_{ijk}$ : Quantidade de minério que resta na pilha localizada na baliza  $i$ , parte  $j$  do pátio  $k$ .

# COMPOSIÇÃO DE LOTES DE MINÉRIO DE FERRO DA MINA CAUÊ

## O MODELO BASEADO EM PROGRAMAÇÃO POR METAS



### • Função objetivo

$$\min \sum_{l \in S} \alpha_l^+ dg_l^+ + \sum_{l \in S} \alpha_l^- dg_l^- + \sum_{l \in S} \gamma_l^+ de_l^+ + \sum_{l \in S} \gamma_l^- de_l^- + \sum_{l \in S} \delta_l^+ dr_l^+ + \sum_{l \in S} \delta_l^- dr_l^- + \beta^- P^- + \beta^+ P^+ + \sum_{i \in Baliza} \sum_{j \in Parte} \sum_{k \in Patio} dbaliza_{ijk}$$

### • Restrições de Qualidade e Produção

$$\sum_{k \in Patio} \sum_{i \in Baliza(k)} \sum_{j \in Parte} (t_{ijkl} - lsg_l) x_{ijk} - dg_l^+ \leq 0 \quad \forall l \in S$$

$$\sum_{k \in Patio} \sum_{i \in Baliza(k)} \sum_{j \in Parte} (t_{ijkl} - lig_l) x_{ijk} + dg_l^- \geq 0 \quad \forall l \in S$$

$$\sum_{k \in Patio} \sum_{i \in Baliza(k)} \sum_{j \in Parte} (t_{ijkl} - lse_l) x_{ijk} - de_l^+ \leq 0 \quad \forall l \in S$$

$$\sum_{k \in Patio} \sum_{i \in Baliza(k)} \sum_{j \in Parte} (t_{ijkl} - lie_l) x_{ijk} + de_l^- \geq 0 \quad \forall l \in S$$

$$\sum_{k \in Patio} \sum_{i \in Baliza(k)} \sum_{j \in Parte} (t_{ijkl} - tr_l) x_{ijk} + dr_l^- - dr_l^+ = 0 \quad \forall l \in S$$

$$\sum_{k \in Patio} \sum_{i \in Baliza(k)} \sum_{j \in Parte} x_{ijk} + P^- - P^+ = P_m \quad \forall l \in S$$

# COMPOSIÇÃO DE LOTES DE MINÉRIO DE FERRO DA MINA CAUÊ

## O MODELO BASEADO EM PROGRAMAÇÃO POR METAS



- **Restrições de Seqüenciamento Horizontal**

$$y_{ijk} \leq \frac{x_{i-1,j,k}}{Qu_{i-1,j,k}} \quad \forall i \in \text{Baliza}(k), \forall j \in \text{Parte}, \forall k \in \text{Pátio} \mid i \geq 2 \text{ e } Qu_{i-1,j,k} \neq 0$$

$$y_{ijk} \geq \frac{x_{ijk}}{Qu_{ijk}} \quad \forall i \in \text{Baliza}(k), \forall j \in \text{Parte}, \forall k \in \text{Pátio} \mid Qu_{ijk} \neq 0$$

- **Restrições de Seqüenciamento Vertical**

$$y_{i,\text{inf},k} \leq y_{i+1,\text{sup},k} \quad \forall i \in \text{Baliza}(k), \forall k \in \text{Pátio} \mid i \leq \text{nb}(k) - 1$$

$$y_{i,\text{inf},k} \leq \frac{x_{i+1,\text{sup},k}}{Qu_{i+1,\text{sup},k}} \quad \forall i \in \text{Baliza}(k), \forall k \in \text{Pátio} \mid Qu_{i+1,\text{sup},k} \neq 0 \text{ e } i \leq \text{nb}(k) - 1$$

- **Restrições Para Forçar Retomada Concentrada**

$$z_{ijk} \leq x_{ijk} \quad \forall i \in \text{Baliza}(k), \forall j \in \text{Parte}, \forall k \in \text{Pátio}$$

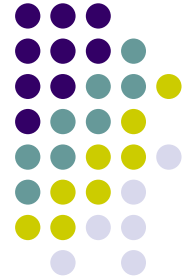
$$z_{ijk} \geq \frac{x_{ijk}}{Qu_{ijk}} \quad \forall i \in \text{Baliza}(k), \forall j \in \text{Parte}, \forall k \in \text{Pátio} \mid Qu_{ijk} \neq 0$$

$$\sum_{i \in \text{Baliza}(k)} \text{tem}_{i,\text{sup},k} z_{i,\text{sup},k} + \sum_{i \in \text{Baliza}(k)} \text{tem}_{i,\text{inf},k} z_{i,\text{inf},k} \leq \text{nccp}_k \quad \forall k \in \text{Pátio}$$



# COMPOSIÇÃO DE LOTES DE MINÉRIO DE FERRO DA MINA CAUÊ

## O MODELO BASEADO EM PROGRAMAÇÃO POR METAS



- **Restrições Para Eliminar Parcial e Totalmente**

$$x_{ijk} = ElParc_{ijk} \quad \forall i \in Baliza(k), \forall k \in Pátio, \forall j \in Parte \mid ElParc_{ijk} \neq 0, \\ Qu_{ijk} \neq 0 \text{ e } Eliminar_{ijk} \neq 1$$

$$x_{ijk} = Qu_{ijk} \quad \forall i \in Baliza(k), \forall k \in Pátio, \forall j \in Parte \mid Eliminar_{ijk} = 1$$

- **Restrição Para Tentar Limpar Pilha**

$$x_{ijk} + dbaliza_{ijk} = z_{ijk} \times Qu_{ijk} \quad \forall i \in Baliza(k), \forall j \in Parte, \forall k \in Pátio$$

# Programação da produção: Dimensionamento de lotes



- Empresas de manufatura fabricam diversos tipos de produtos solicitados por diferentes clientes
- Produtos devem estar prontos em datas previamente agendadas
- Fábricas têm capacidade de produção limitada (máquinas, mão-de-obra etc)
- Necessário se faz planejar a produção
  - Decidir **o quê** produzir, **quanto** produzir, isto é, dimensionar os lotes de produção, e **quando** produzir (em cada período do horizonte de planejamento)
- A necessidade de antecipação da fabricação de produtos (estocados de um período para outro) acarreta custos de estocagem e algumas dificuldades operacionais
- No planejamento da produção deseja-se determinar o tamanho dos lotes de produção para atender a demanda na data solicitada, de modo que a soma dos custos de produção e estocagem seja mínima

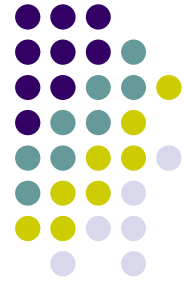
## Programação da produção: Dimensionamento de lotes (um único item)



- Uma empresa recebe uma encomenda para entregar um produto ao longo de um período de tempo. São dadas para cada mês: a demanda desse produto, o custo de produção e o custo de estocagem.
- Considere que o estoque no início é de 3 unidades.
- Elabore um modelo de PLI que minimize o custo total de produção e estocagem.

| Mês | Cap. Produção (unid) | Demanda (unid.) | Custo estocagem (R\$) | Custo de prod. (R\$) |
|-----|----------------------|-----------------|-----------------------|----------------------|
| 1   | 7                    | 10              | 6                     | 5                    |
| 2   | 7                    | 2               | 5                     | 3                    |
| 3   | 7                    | 9               | 3                     | 7                    |
| 4   | 7                    | 6               | 8                     | 4                    |
| 5   | 7                    | 8               | 6                     | 5                    |
| 6   | 7                    | 7               | 2                     | 9                    |

# Programação da produção: Dimensionamento de lotes (um único item)



- Dados de entrada:
  - Mes = conjunto dos meses de produção
  - $cprod_t$  = custo de produção no mês  $t$
  - $cest_t$  = custo de estoque no mês  $t$
  - $demandat$  = demanda no mês  $t$
  - $cap_t$  = capacidade de produção no mês  $t$
  - $estinicial$  = estoque inicial
- Variáveis de decisão:
  - $x_t$  = quantidade do produto a ser produzida no mês  $t$
  - $e_t$  = quantidade do produto a ser estocada no mês  $t$

## Programação da produção: Dimensionamento de lotes (um único item)



- Função objetivo: minimizar os custos de produção e de estocagem

$$\sum_{t \in Mes} (cprod_t \times x_t + cest_t \times e_t)$$

- Restrições: Conservação de fluxo no final do mês 1:

$$e_1 = estinicial + x_1 - demanda_1$$

## Programação da produção: Dimensionamento de lotes (um único item)



- Restrições: Conservação de fluxo em cada mês  $t > 1$ :

$$e_t = e_{t-1} + x_t - demanda_t \quad \forall t \in Mes \mid t > 1$$

- Restrições: Respeito à capacidade de produção em cada mês  $t$ :

$$x_t \leq cap_t \quad \forall t \in Mes$$

# Programação da produção: Dimensionamento de lotes



- Considere uma empresa que fabrica  $n$  produtos e deseja programar sua produção nos próximos  $T$  períodos de tempo (= horizonte de planejamento)
- É conhecida a demanda de cada produto em cada período do horizonte de planejamento
- Em cada período, os recursos necessários para a produção são limitados e renováveis, isto é, uma quantidade de recursos está disponível e não depende de como foram utilizados nos períodos anteriores.
- Exemplos de recursos renováveis: mão-de-obra, energia elétrica, horas de máquina
- Exemplo de recurso não renovável: matéria-prima que sobra em um período e pode ser usada nos períodos seguintes
- Há a possibilidade de estocagem de produtos de um período para outro
- Dados de entrada do problema:
  - $d_{it}$ : demanda do item  $i$  no período  $t$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $t = 1, \dots, T$ )
  - $disp_t$ : disponibilidade de recursos (renováveis) no período  $t$
  - $r_i$ : quantidade de recursos necessários para a produção de uma unidade do item  $i$
  - $c_{it}$ : custo de produzir uma unidade do item  $i$  no período  $t$
  - $h_{it}$ : custo de estocar uma unidade do item  $i$  no período  $t$
- Variáveis de decisão:
  - $x_{it}$ : número de itens do tipo  $i$  produzidos no período  $t$
  - $e_{it}$ : número de itens do tipo  $i$  em estoque no final do período  $t$
- Estoques iniciais do horizonte de planejamento  $e_{i0}$  são dados

# Programação da produção: Dimensionamento de lotes



- Função objetivo:  
(minimizar os custos de  
produção e estocagem)

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T c_{it} x_{it} + \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T h_{it} e_{it}$$

- Equações de  
conservação de estoque:

$$e_{it} = e_{i,t-1} + x_{it} - d_{it} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall t = 1, \dots, T$$

- Restrições de  
capacidade de produção:

$$\sum_{i=1}^n r_i x_{it} \leq \text{disp}_t \quad \forall t = 1, \dots, T$$

- Garantia de atendimento  
à demanda:

$$e_{it} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall t = 1, \dots, T$$

- Não-negatividade e  
integralidade:

$$x_{it} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall t = 1, \dots, T$$



# Programação da produção: Dimensionamento de lotes



- Considere uma fábrica de pré-moldados que produz dois tipos de vigas, cujas demandas para as próximas 3 semanas são conhecidas
- Os produtos utilizam os mesmos tipos de recursos, porém em quantidades diferentes
- Suponha que apenas um centro de trabalho esteja disponível para a produção dos dois itens, cuja disponibilidade é de 40 horas por período e que a produção de uma unidade do item 1 consuma 15 minutos (= 1/4 da hora) e uma unidade do item 2 consuma 20 minutos (= 1/3 da hora)
- Os custos de produção por período, bem como os custos de estocagem são conhecidos
- Os estoques iniciais dos dois produtos são nulos
- Definir um plano de produção de modo que os pedidos sejam atendidos ao menor custo de produção e estocagem

| <b>Demanda de vigas</b>    | <b>Período 1</b> | <b>Período 2</b> | <b>Período 3</b> |
|----------------------------|------------------|------------------|------------------|
| Item 1                     | 15               | 90               | 120              |
| Item 2                     | 35               | 50               | 80               |
|                            |                  |                  |                  |
| <b>Custos de produção</b>  | <b>Período 1</b> | <b>Período 2</b> | <b>Período 3</b> |
| Item 1                     | 20               | 20               | 30               |
| Item 2                     | 20               | 20               | 30               |
|                            |                  |                  |                  |
| <b>Custos de estocagem</b> | <b>Período 1</b> | <b>Período 2</b> |                  |
| Item 1                     | 2                | 3                |                  |
| Item 2                     | 2,5              | 3,5              |                  |

# Programação da produção: Seqüenciamento em uma máquina



- Problema de seqüenciamento em uma máquina com penalidades por antecipação e atraso da produção (PSUMAA).
- Tempo de preparação de máquina dependente da seqüência de produção;
- Janelas de atendimento;
- Os objetivos: redução dos custos de manutenção do estoque (quando a produção é antecipada) e dos custos por atraso na produção.

# Programação da produção: Seqüenciamento em uma máquina



Características do PSUMAA:

- Uma máquina deve processar um conjunto de  $n$  *jobs*;
- Cada *job* possui um tempo de processamento  $P_i$ , uma data inicial  $E_i$  e uma data final  $T_i$  desejadas para o término do processamento;
- A máquina executa no máximo um *job* por vez e uma vez iniciado o processamento de um *job*, o mesmo deve ser finalizado, ou seja, não é permitido a interrupção do processamento;

# Programação da produção: Seqüenciamento em uma máquina



- Todos os *jobs* estão disponíveis para processamento na data 0;
- Quando um *job*  $j$  é seqüenciado imediatamente após um *job*  $i$ , sendo estes pertencentes a diferentes famílias de produtos, é necessário um tempo  $S_{ij}$  para a preparação da máquina;
- Assume-se, ainda, que a máquina não necessita de tempo de preparação inicial;

# Programação da produção: Seqüenciamento em uma máquina



- É permitido tempo ocioso entre a execução de dois *jobs* consecutivos.
- Os *jobs* devem ser finalizados dentro da janela de tempo  $[E_i, T_i]$ , denominada janela de entrega.
  - Se o *job*  $i$  for finalizado antes de  $E_i$  então há um custo de manutenção de estoque.
  - Caso o *job* seja finalizado após  $T_i$  então há associado um custo por atraso (que pode ser uma multa imposta por contratos de prestação de serviço), além de insatisfação do cliente.
  - Os *jobs* que forem finalizados dentro da janela de entrega não proporcionarão nenhum custo para a empresa;
- Os custos unitários por antecipação e atraso da produção são dependentes dos *jobs*.
- Objetivo: minimização do somatório dos custos de antecipação e atraso da produção.

# Programação da produção: Seqüenciamento em uma máquina



- Dados de Entrada:
  - $n$ : número de *jobs* a serem processados;
  - $P_i$ : tempo de processamento do *job*  $i$ ;
  - $E_i$ : data de início do período de entrega do *job*  $i$ ;
  - $T_i$ : data de término do período de entrega do *job*  $i$ ;
  - $S_{ij}$ : tempo de preparação da máquina necessário para processar *job*  $j$  depois do *job*  $i$ ;
  - $\alpha_i$ : custos de antecipação da produção do *job*  $i$  por unidade de tempo;
  - $\beta_i$ : custos de atraso da produção do *job*  $i$  por unidade de tempo.

# Programação da produção: Seqüenciamento em uma máquina



- Variáveis de Decisão:
  - $s_i$ : a data de início do processamento do *job*  $i$ ;
  - $e_i$ : o tempo de antecipação do *job*  $i$ ;
  - $t_i$ : o tempo de atraso do *job*  $i$ ;
- Jobs Fictícios:
  - 0: antecede imediatamente o primeiro *job* na seqüência de produção;
  - $n + 1$ : sucede imediatamente o último *job* na seqüência de produção;
- Observação:
  - $P_0$  e  $P_{n+1}$  são iguais a zero,
  - $S_{0i}=0$  e  $S_{i, n+1}=0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$ .

# Programação da produção: Seqüenciamento em uma máquina



- Função Objetivo
  - Minimizar o somatório dos custos totais de antecipação e atraso da produção<sub>(0)</sub>

$$\min Z = \sum_{i=1}^n (\alpha_i e_i + \beta_i t_i)$$



# Programação da produção: Seqüenciamento em uma máquina



- Restrições

- Um job  $j$  só pode ser iniciado imediatamente após um job  $i$ , sem nenhum job intermediário, depois de preparar a máquina de  $i$  para  $j$  e completado o processamento do job  $i$ :

$$s_j - s_i - y_{ij}(M + S_{ij}) \geq P_i - M \quad \forall i = 0, 1, \dots, n, \quad (3)$$

onde:

$$\forall j = 1, 2, \dots, n+1 \text{ e } i \neq j$$

$M$  é uma constante de valor suficientemente grande

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o job } j \text{ é sequenciado imediatamente após o job } i; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

# Programação da produção: Seqüenciamento em uma máquina



- Restrições

$$s_j - s_i - y_{ij}(M + S_{ij}) \geq P_i - M \quad \forall i = 0, 1, \dots, n,$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, n+1 \text{ e } i \neq j \quad (3)$$

- Quando  $j$  sucede  $i$  ( $y_{ij}=1$ ), têm-se:

$$s_j \geq s_i + P_i + S_{ij}$$

- Quando  $j$  não sucede  $i$  ( $y_{ij}=0$ ), têm-se:

$$s_j - s_i - P_i \geq -M$$

# Programação da produção: Seqüenciamento em uma máquina



- Restrições:
  - Cada *job j* tem somente um *job i* imediatamente antecessor:

$$\sum_{i=0, i \neq j}^n y_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n+1 \quad (4)$$

- Cada *job i* tem somente um *job j* imediatamente sucessor:

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{n+1} y_{ij} = 1 \quad \forall i = 0, 1, \dots, n \quad (5)$$

# Programação da produção: Seqüenciamento em uma máquina



- Restrições:
  - O tempo de antecipação  $e_i \in [0, (E_i - P_i - s_i)]$  é determinado pelas restrições:

$$s_i + P_i + e_i \geq E_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

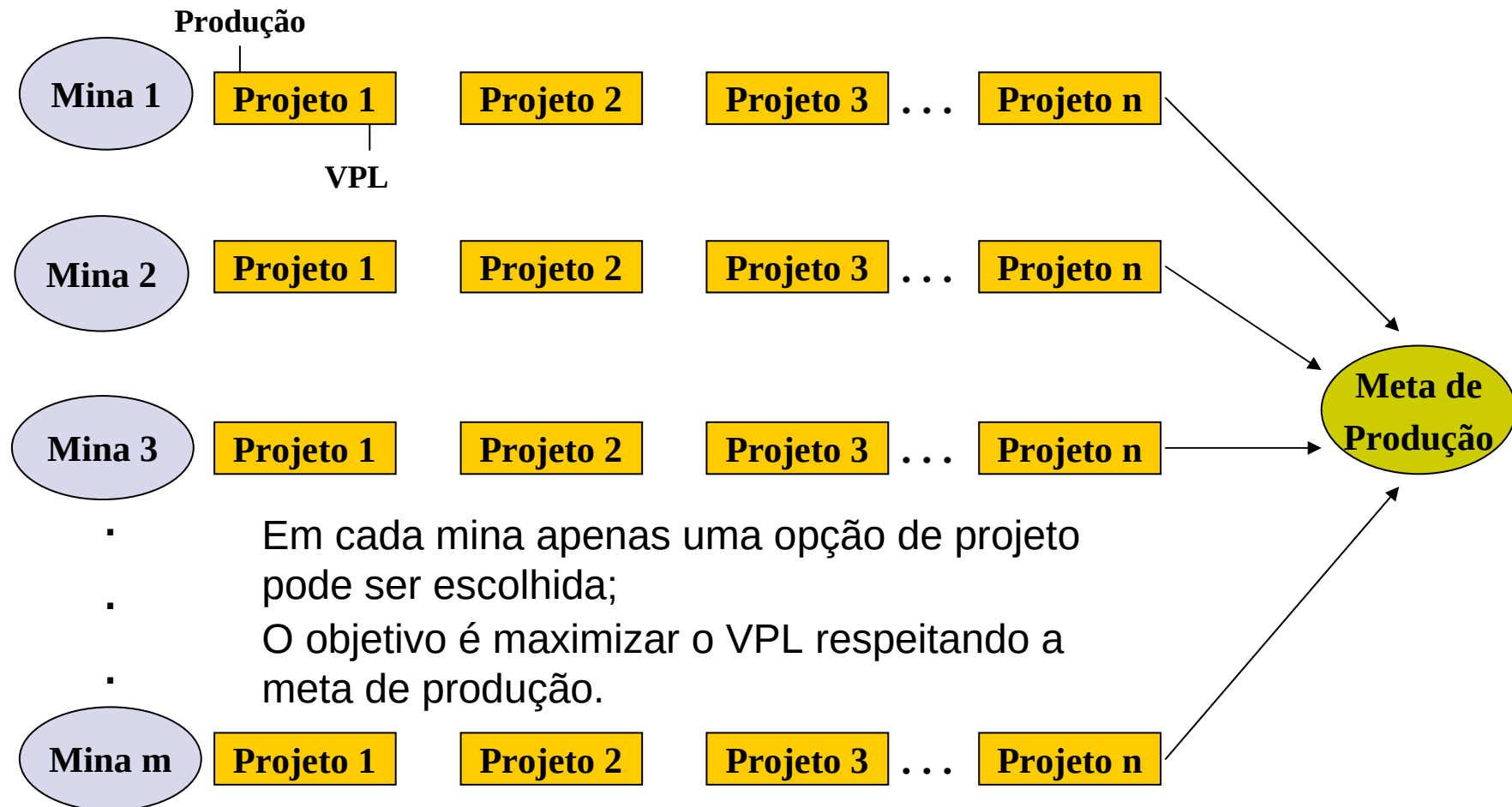
$$e_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

- O tempo de atraso  $t_i \in [0, (s_i + P_i - T_i)]$  é determinado pelas restrições:

$$s_i + P_i - t_i \leq T_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

$$t_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

# Problema de Seleção de Projetos Mineiros Concorrentes





## Problema de Seleção de Projetos Mineiros Concorrentes – Ex. de opções de projeto por mina

- ❖ Projeto Mina 1: Maior capacidade de produção de todo o sistema, sendo que encontra-se em operação e se mantém operativa até o final do estudo em questão.

| Opção | Produção | VPL (\$x10 <sup>6</sup> ) | Custo/t. | Observações:                            |
|-------|----------|---------------------------|----------|-----------------------------------------|
| 1     | 40.00    | 884.42                    | 4.59     | Caso Base.                              |
| 2     | 43.00    | 929.56                    | 4.36     | Aumento Capacidade.                     |
| 3     | 43.00    | 922.04                    | 5.08     | Aumento Capacidade c/risco operacional. |
| 4     | 43.00    | 885.11                    | 5.16     | Aumento Capacidade c/ aumento custo.    |
| 5     | 40.00    | 857.75                    | 4.39     | Caso Base com variação de risco.        |
| 6     | 40.00    | 874.16                    | 4.61     | Caso Base com variação de risco.        |
| 7     | 40.00    | 1000.00                   | 4.42     | Caso Base com variação de risco.        |
| 8     | 40.00    | 857.07                    | 4.56     | Caso Base com variação de risco.        |
| 9     | 40.00    | 804.41                    | 4.63     | Caso Base com variação de risco.        |
| 10    | 42.00    | 967.17                    | 4.70     | Aumento Capacidade 2.                   |
| 11    | 42.00    | 909.04                    | 4.75     | Aumento Capacidade 2 c/ risco.          |
| 12    | 42.00    | 843.39                    | 4.84     | Aumento Capacidade 2 c/ risco.          |
| 13    | 48.00    | 972.64                    | 3.88     | Aproveitamento Minério Marginal.        |
| 14    | 48.00    | 935.71                    | 3.90     | Ídem c/ variação de investimento.       |
| 15    | 45.00    | 930.93                    | 4.14     | Ídem c/ variação de produção.           |
| 16    | 45.00    | 897.42                    | 4.16     | Ídem c/ variação de investimento.       |



# Exemplo de Problema de Seleção de Projetos Mineiros Concorrentes

Exemplo de VPL (\$x10<sup>6</sup>):

|          | <i>1</i> | <i>2</i> | <i>3</i> | ... | <i>16</i> |
|----------|----------|----------|----------|-----|-----------|
| <i>1</i> | 884.42   | 929.56   | 922.04   | ... | 897.42    |
| <i>2</i> | 177.28   | 149.92   | 199.85   | ... | 247.04    |
| ...      | ...      | ...      | ...      | ... | ...       |
| <i>7</i> | 111.63   | 106.84   | 103.42   | ... | 126.67    |

Exemplo de Produção (Mt):

|          | <i>1</i> | <i>2</i> | <i>3</i> | ... | <i>16</i> |
|----------|----------|----------|----------|-----|-----------|
| <i>1</i> | 40       | 43       | 43       | ... | 45        |
| <i>2</i> | 10       | 10       | 10       | ... | 12.5      |
| ...      | ...      | ...      | ...      | ... | ...       |
| <i>7</i> | 2        | 2        | 2        | ... | 4         |

# Modelo de Programação Matemática para o Problema de Seleção de Projetos



- Considere:

Minas: conjunto de minas;

Opcoes: conjunto de opções de projeto em cada mina;

$VPL_{ij}$ : Valor Presente Líquido do projeto  $j$  na mina  $i$ ;

$prod_{ij}$ : produção do projeto  $j$  na mina  $i$ ;

$M$ : meta de produção;

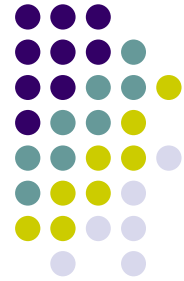
$P_{falta}$ : penalidade por produção inferior à meta estabelecida;

$P_{exc}$ : penalidade por produção superior à meta estabelecida.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{caso a mina } i \text{ opere com o projeto } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



# Modelo de Programação Matemática para o Problema de Seleção de Projetos



$$\max \sum_{i \in Minas} \sum_{j \in Projetos} VPL_{ij} x_{ij} - Pfalta \times dnp - Pexc \times dpp$$

$$\sum_{j \in Projetos} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in Minas$$

$$\sum_{i \in Minas} \sum_{j \in Projetos} prod_{ij} x_{ij} - dpp + dnp = M$$

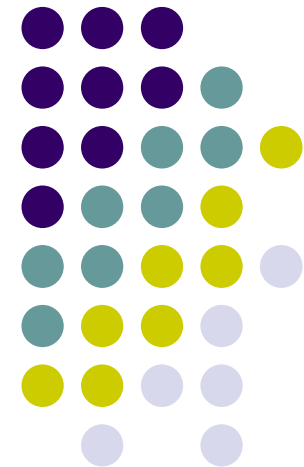
$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in Minas, \forall j \in Projetos$$

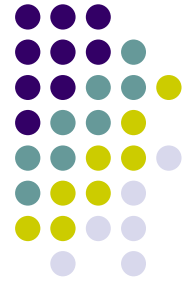
# Heurísticas construtivas e de refinamento: Fundamentação e aplicações

---

Marcone Jamilson Freitas Souza  
Alexandre Xavier Martins  
Tatiana Alves Costa  
José Maria do Carmo Bento Alves  
Frederico Augusto Coimbra Guimarães  
Túlio Ângelo Machado Toffolo

Departamento de Computação  
Homepage: <http://www.decom.ufop.br/prof/marcone>  
E-mail: [marcone.freitas@yahoo.com.br](mailto:marcone.freitas@yahoo.com.br)

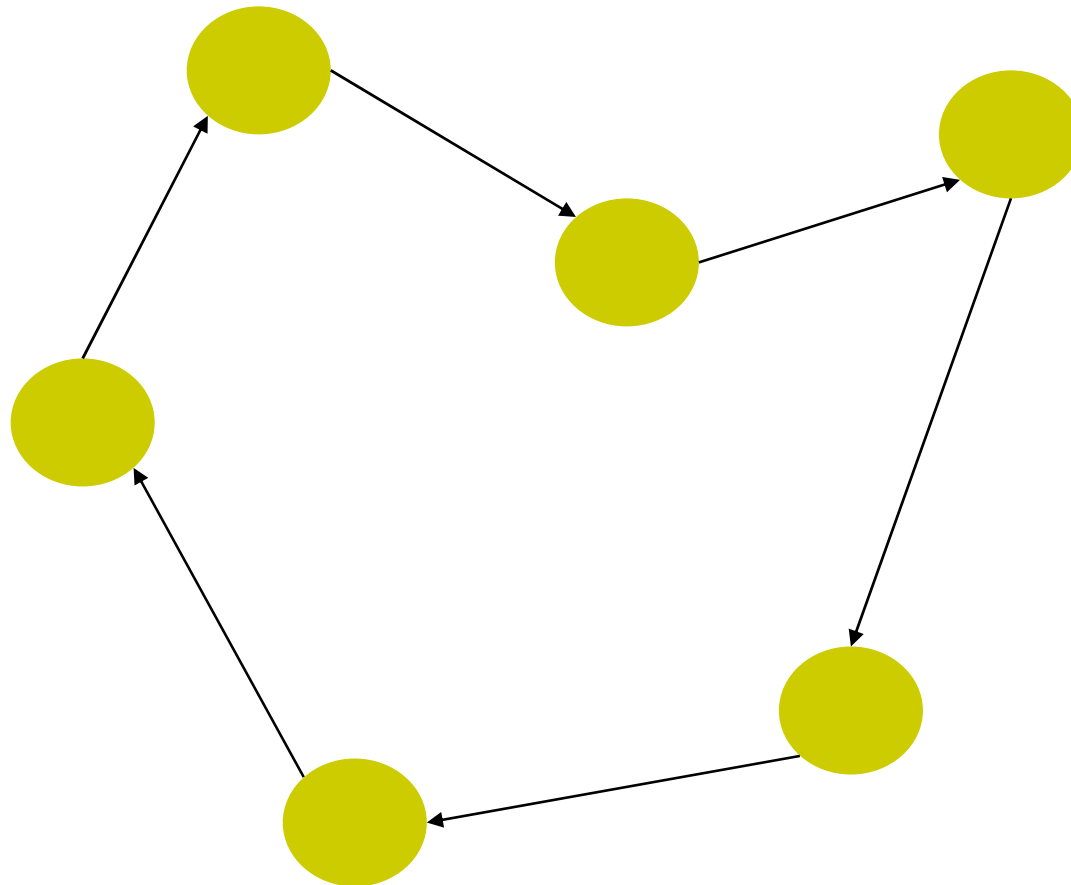
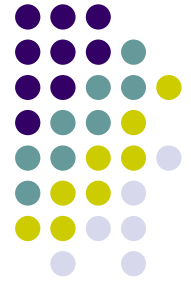




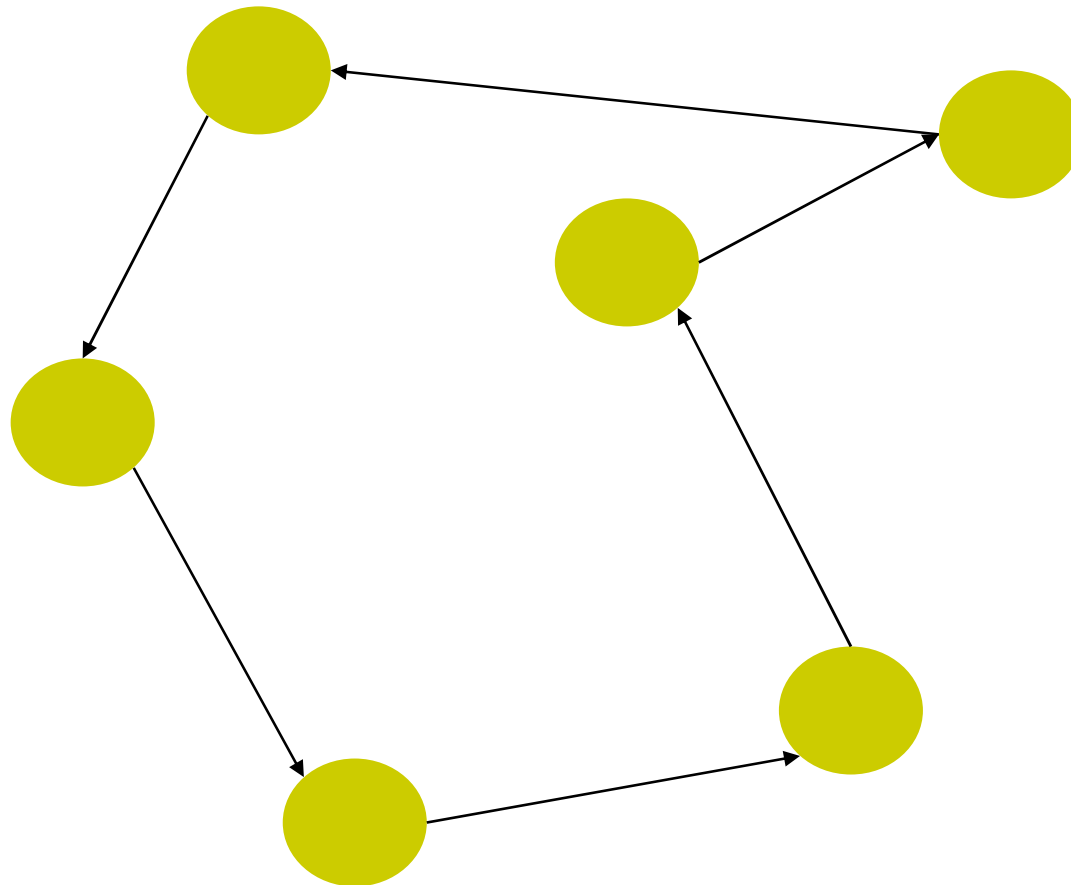
# Problema do Caixeiro Viajante

- Dado um conjunto de cidades e uma matriz de distâncias entre elas
- PCV consiste em encontrar uma rota para um Caixeiro Viajante tal que este:
  - parta de uma cidade origem
  - passe por todas as demais cidades uma única vez
  - retorne à cidade origem ao final do percurso
  - percorra a menor distância possível
- Rota conhecida como ciclo hamiltoniano

# Problema do Caixeiro Viajante



# Problema do Caixeiro Viajante



# Formulação Matemática para o Problema do Caixeiro Viajante



- Dados de entrada:
  - Cidades: Conjunto de cidades
  - $d_{ij}$  = distância entre as cidades  $i$  e  $j$
- Variáveis de decisão:
  - $x_{ij} = 1$  se a aresta  $(i,j)$  será usada; 0, caso contrário
  - $f_{ij}$  = quantidade de fluxo de  $i$  para  $j$
- Função objetivo:

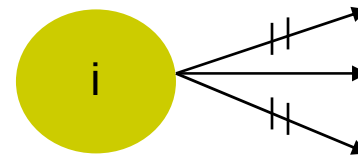
$$\min \sum_{i \in \text{Cidades}} \sum_{j \in \text{Cidades}} d_{ij} x_{ij}$$

# Formulação Matemática para o Problema do Caixeiro Viajante

Restrições:

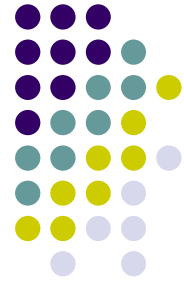
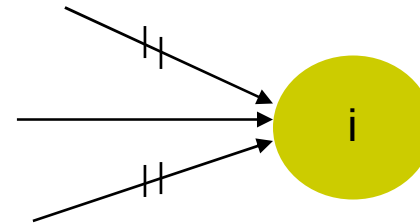
1. De cada cidade  $i$  só sai uma aresta:

$$\sum_{j \in \text{Cidades}} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in \text{Cidades}$$



2. A cada cidade  $j$  só chega uma aresta:

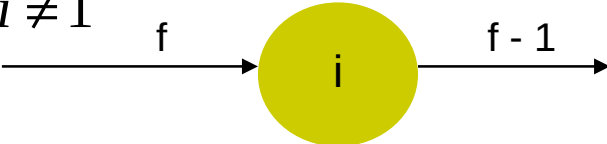
$$\sum_{i \in \text{Cidades}} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in \text{Cidades}$$



# Formulação Matemática para o Problema do Caixeiro Viajante



3. O fluxo que chega a uma cidade  $i$  menos o que sai é igual a uma unidade:

$$\sum_{j \in \text{Cidades}} f_{ji} - \sum_{j \in \text{Cidades}} f_{ij} = 1 \quad \forall i \in \text{Cidades} \mid i \neq 1$$


The diagram shows a yellow circle labeled 'i'. An arrow labeled 'f' points into the circle from the left, and an arrow labeled 'f - 1' points out of the circle to the right.

4. O fluxo máximo em cada aresta é igual a  $n-1$ , onde  $n$  é o número de cidades:

$$f_{ij} \leq (n-1)x_{ij} \quad \forall i \in \text{Cidades}, \forall j \in \text{Cidades}$$

5. Integralidade e não negatividade:

$$f_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in \text{Cidades}, \forall j \in \text{Cidades}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in \text{Cidades}, \forall j \in \text{Cidades}$$



# Problema do Caixeiro Viajante

## Complexidade



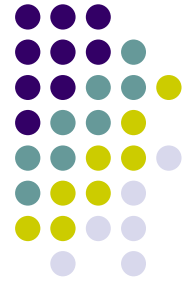
- Considerando PCV simétrico ( $d_{ij} = d_{ji}$ ), para  $n$  cidades há  $(n-1)!/2$  rotas possíveis
- Para  $n = 20$  cidades, há  $10^{16}$  rotas possíveis. Um computador que avalia uma rota em  $10^{-8}$  segundos gastaria cerca de 19 anos para encontrar a melhor solução por enumeração completa
- Métodos de enumeração implícita, tais como *branch-and-bound*, embutidos em *solvers*, podem reduzir significativamente este tempo
- Não há garantia de que isso sempre ocorra

# Problema do Caixeiro Viajante

## Complexidade



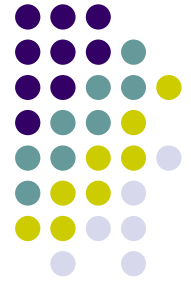
- Para dimensões mais elevadas ( $> 50$  cidades), a resolução por modelos de programação matemática é proibitiva em termos de tempos computacionais
- PCV é da classe NP-difícil: ainda não existem algoritmos exatos que o resolvam em tempo polinomial
- À medida que  $n$  cresce, o tempo de execução cresce exponencialmente
- PCV é resolvido por meio de heurísticas:
  - Procedimentos que seguem uma intuição para resolver o problema (forma humana de resolver o problema, fenômenos naturais, processos biológicos, etc.)
  - Não garantem a otimalidade da solução final
  - Em geral, produzem soluções finais de boa qualidade rapidamente



# Heurísticas

- Construtivas
  - Consistem em construir uma solução passo a passo, elemento por elemento
- De refinamento
  - Consistem em efetuar modificações na solução construída, de forma a tentar melhorá-la

# Heurística de construção gulosa



- Funcionamento:
  - Constrói uma solução, elemento por elemento
  - A cada passo é adicionado um único elemento candidato
  - O candidato escolhido é o “melhor” segundo um certo critério
  - O método se encerra quando todos os elementos candidatos foram analisados

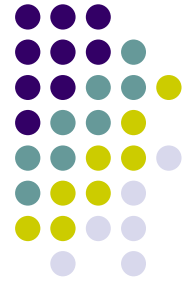
# Heurísticas construtivas para o Problema do Caixeiro Viajante



- Vizinho mais próximo
  - Idéia central: Construir uma rota passo a passo, adicionando à solução corrente a cidade mais próxima (ainda não visitada) da última cidade inserida
- Inserção mais barata
  - Idéia central: Construir uma rota passo a passo, partindo de rota inicial envolvendo 3 cidades e adicionar a cada passo, a cidade  $k$  (ainda não visitada) entre a ligação  $(i, j)$  de cidades já visitadas, cujo custo de inserção seja o mais barato

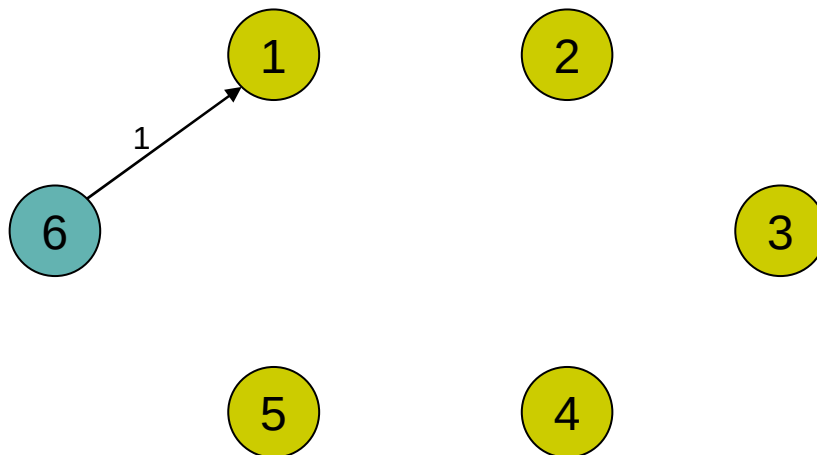
# PCV – Vizinho mais Próximo

## Exemplo - Passo 1



| Cid. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------|---|---|---|---|---|---|
| 1    | 0 | 2 | 1 | 4 | 9 | 1 |
| 2    | 2 | 0 | 5 | 9 | 7 | 2 |
| 3    | 1 | 5 | 0 | 3 | 8 | 6 |
| 4    | 4 | 9 | 3 | 0 | 2 | 6 |
| 5    | 9 | 7 | 8 | 2 | 0 | 2 |
| 6    | 1 | 2 | 6 | 6 | 2 | 0 |

| i | j | $d_{ij}$ |
|---|---|----------|
| 6 | 1 | 1        |
| 6 | 2 | 2        |
| 6 | 3 | 6        |
| 6 | 4 | 6        |
| 6 | 5 | 2        |



- Distância Total = 1

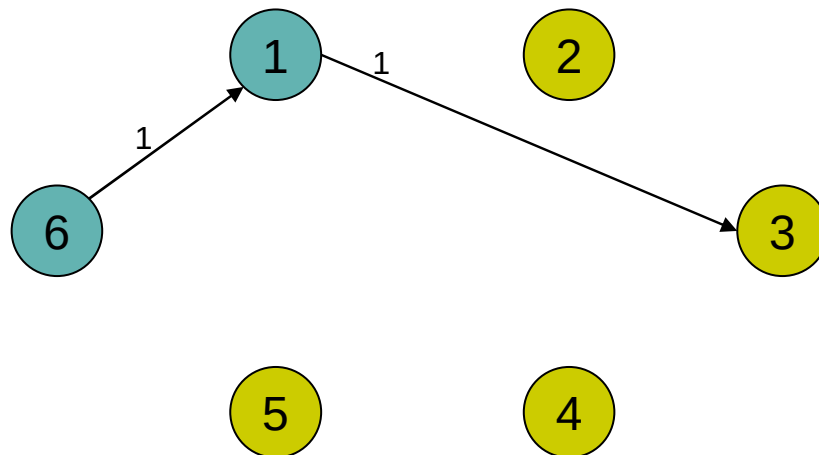
# PCV – Vizinho mais Próximo

## Exemplo - Passo 2



| Cid. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------|---|---|---|---|---|---|
| 1    | 0 | 2 | 1 | 4 | 9 | 1 |
| 2    | 2 | 0 | 5 | 9 | 7 | 2 |
| 3    | 1 | 5 | 0 | 3 | 8 | 6 |
| 4    | 4 | 9 | 3 | 0 | 2 | 6 |
| 5    | 9 | 7 | 8 | 2 | 0 | 2 |
| 6    | 1 | 2 | 6 | 6 | 2 | 0 |

| i | j | $d_{ij}$ |
|---|---|----------|
| 1 | 2 | 2        |
| 1 | 3 | 1        |
| 1 | 4 | 4        |
| 1 | 5 | 9        |



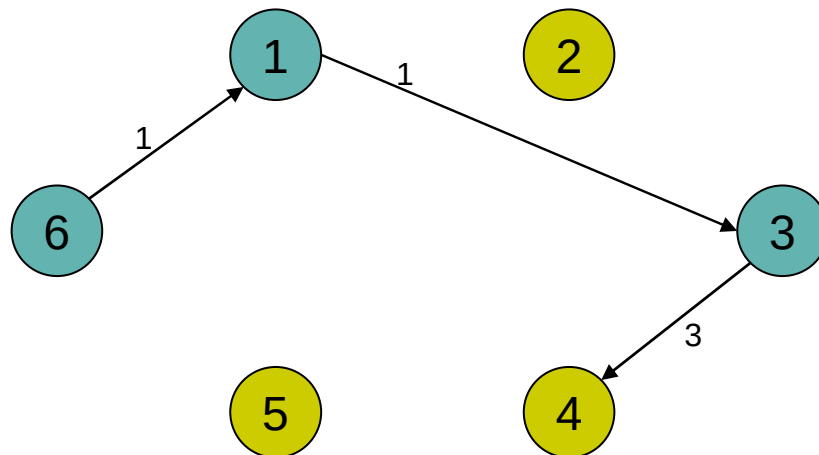
- Distância Total =  $1 + 1 = 2$

# PCV – Vizinho mais Próximo

## Exemplo - Passo 3

| Cid. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------|---|---|---|---|---|---|
| 1    | 0 | 2 | 1 | 4 | 9 | 1 |
| 2    | 2 | 0 | 5 | 9 | 7 | 2 |
| 3    | 1 | 5 | 0 | 3 | 8 | 6 |
| 4    | 4 | 9 | 3 | 0 | 2 | 6 |
| 5    | 9 | 7 | 8 | 2 | 0 | 2 |
| 6    | 1 | 2 | 6 | 6 | 2 | 0 |

| i | j | $d_{ij}$ |
|---|---|----------|
| 3 | 2 | 5        |
| 3 | 4 | 3        |
| 3 | 5 | 8        |



- Distância Total =  $2 + 3 = 5$

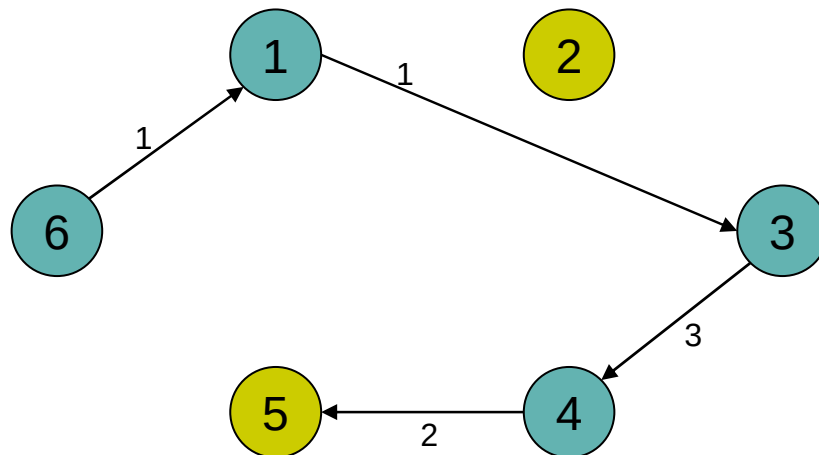


# PCV – Vizinho mais Próximo

## Exemplo - Passo 4

| Cid. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------|---|---|---|---|---|---|
| 1    | 0 | 2 | 1 | 4 | 9 | 1 |
| 2    | 2 | 0 | 5 | 9 | 7 | 2 |
| 3    | 1 | 5 | 0 | 3 | 8 | 6 |
| 4    | 4 | 9 | 3 | 0 | 2 | 6 |
| 5    | 9 | 7 | 8 | 2 | 0 | 2 |
| 6    | 1 | 2 | 6 | 6 | 2 | 0 |

| i | j | $d_{ij}$ |
|---|---|----------|
| 4 | 2 | 9        |
| 4 | 5 | 2        |



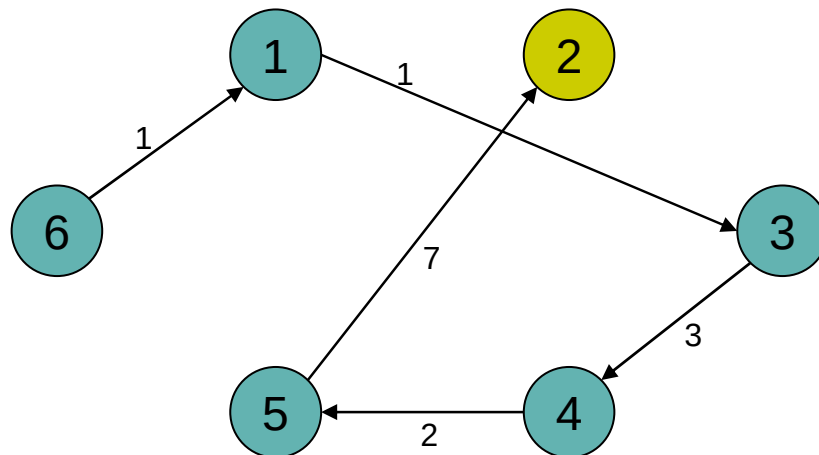
- Distância Total = 5 + 2 = 7

# PCV – Vizinho mais Próximo

## Exemplo - Passo 5

| Cid. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------|---|---|---|---|---|---|
| 1    | 0 | 2 | 1 | 4 | 9 | 1 |
| 2    | 2 | 0 | 5 | 9 | 7 | 2 |
| 3    | 1 | 5 | 0 | 3 | 8 | 6 |
| 4    | 4 | 9 | 3 | 0 | 2 | 6 |
| 5    | 9 | 7 | 8 | 2 | 0 | 2 |
| 6    | 1 | 2 | 6 | 6 | 2 | 0 |

| i | j | $d_{ij}$ |
|---|---|----------|
| 5 | 2 | 7        |



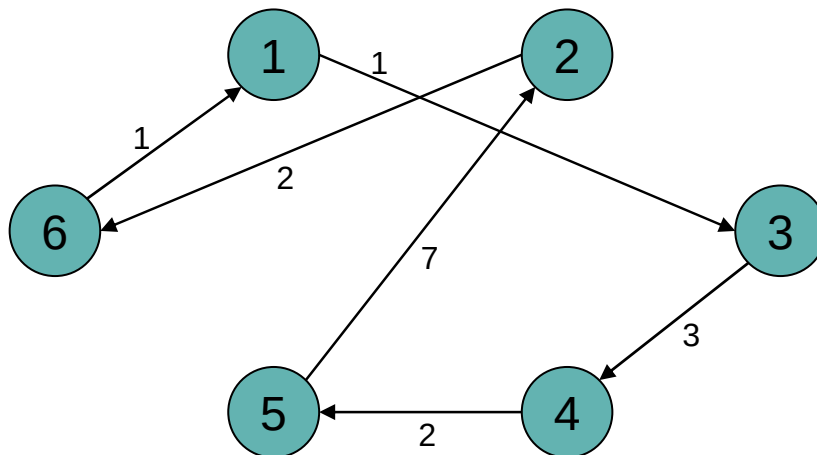
- Distância Total = 7 + 7 = 14

# PCV – Vizinho mais Próximo

## Exemplo – Passo final: “Inserção forçada”



| Cid. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------|---|---|---|---|---|---|
| 1    | 0 | 2 | 1 | 4 | 9 | 1 |
| 2    | 2 | 0 | 5 | 9 | 7 | 2 |
| 3    | 1 | 5 | 0 | 3 | 8 | 6 |
| 4    | 4 | 9 | 3 | 0 | 2 | 6 |
| 5    | 9 | 7 | 8 | 2 | 0 | 2 |
| 6    | 1 | 2 | 6 | 6 | 2 | 0 |



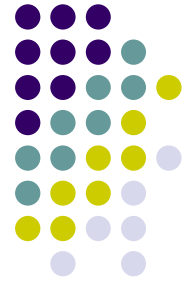
- Distância Total =  $14 + 2 = 16$

# Heurística da Inserção Mais Barata para o Problema do Caixeiro Viajante

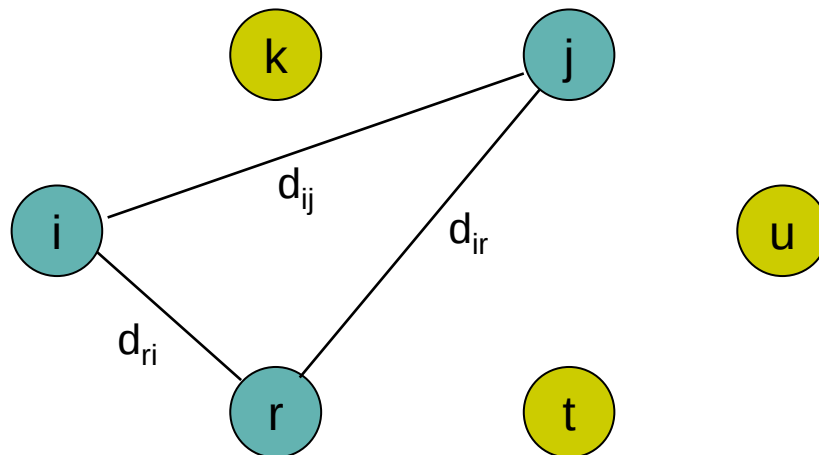


- Inserção mais barata
  - Idéia central: Construir uma rota passo a passo, partindo de rota inicial envolvendo 3 cidades (obtidas por um método qualquer) e adicionar a cada passo, a cidade  $k$  (ainda não visitada) entre a ligação  $(i, j)$  de cidades já visitadas, cujo custo de inserção seja o mais barato

# Heurística da Inserção Mais Barata para o Problema do Caixeiro Viajante



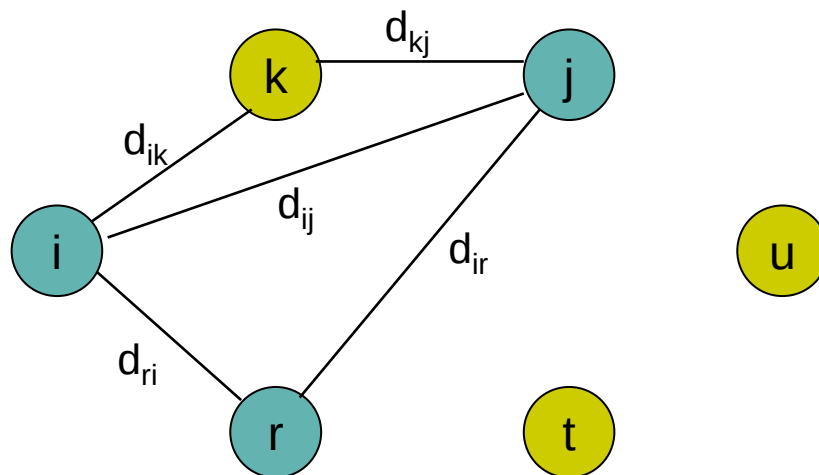
| Cid. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------|---|---|---|---|---|---|
| 1    | 0 | 2 | 1 | 4 | 9 | 1 |
| 2    | 2 | 0 | 5 | 9 | 7 | 2 |
| 3    | 1 | 5 | 0 | 3 | 8 | 6 |
| 4    | 4 | 9 | 3 | 0 | 2 | 6 |
| 5    | 9 | 7 | 8 | 2 | 0 | 2 |
| 6    | 1 | 2 | 6 | 6 | 2 | 0 |



# Heurística da Inserção Mais Barata para o Problema do Caixeiro Viajante



| Cid. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------|---|---|---|---|---|---|
| 1    | 0 | 2 | 1 | 4 | 9 | 1 |
| 2    | 2 | 0 | 5 | 9 | 7 | 2 |
| 3    | 1 | 5 | 0 | 3 | 8 | 6 |
| 4    | 4 | 9 | 3 | 0 | 2 | 6 |
| 5    | 9 | 7 | 8 | 2 | 0 | 2 |
| 6    | 1 | 2 | 6 | 6 | 2 | 0 |



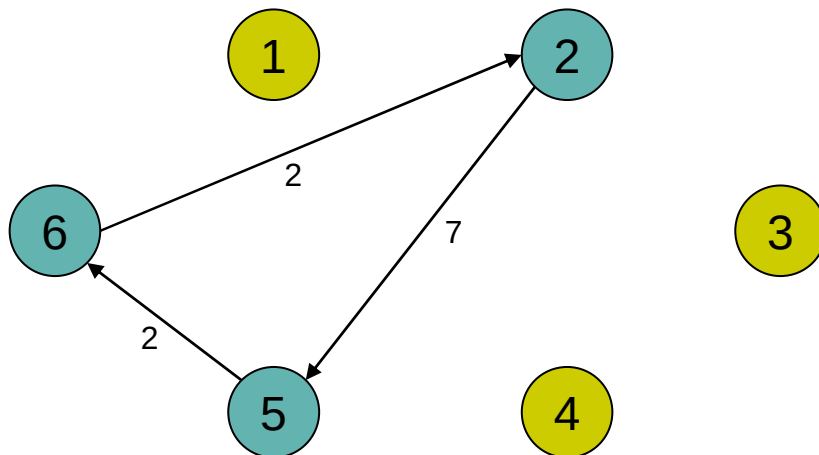
$$\text{Custo da inserção} = d_{ik} + d_{kj} - d_{ij}$$

# PCV – Inserção mais Barata

## Exemplo - Passo 1



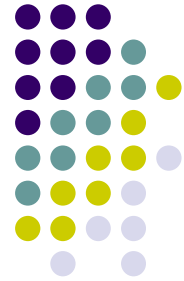
| Cid. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------|---|---|---|---|---|---|
| 1    | 0 | 2 | 1 | 4 | 9 | 1 |
| 2    | 2 | 0 | 5 | 9 | 7 | 2 |
| 3    | 1 | 5 | 0 | 3 | 8 | 6 |
| 4    | 4 | 9 | 3 | 0 | 2 | 6 |
| 5    | 9 | 7 | 8 | 2 | 0 | 2 |
| 6    | 1 | 2 | 6 | 6 | 2 | 0 |



• Distância Total = 11

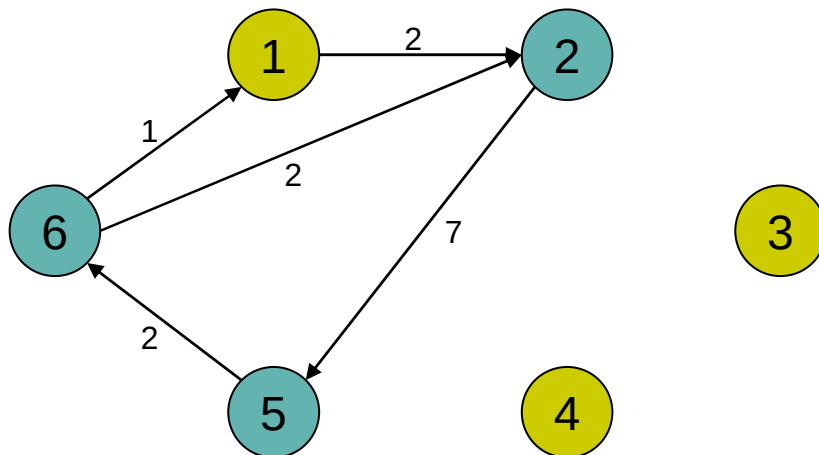
# PCV – Inserção mais Barata

## Exemplo - Passo 2



| Cid. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------|---|---|---|---|---|---|
| 1    | 0 | 2 | 1 | 4 | 9 | 1 |
| 2    | 2 | 0 | 5 | 9 | 7 | 2 |
| 3    | 1 | 5 | 0 | 3 | 8 | 6 |
| 4    | 4 | 9 | 3 | 0 | 2 | 6 |
| 5    | 9 | 7 | 8 | 2 | 0 | 2 |
| 6    | 1 | 2 | 6 | 6 | 2 | 0 |

| i | k | j | $d_{ik} + d_{kj} - d_{ij}$ |
|---|---|---|----------------------------|
| 6 | 1 | 2 | $1 + 2 - 2 = 1$            |
| 6 | 3 | 2 | $6 + 5 - 2 = 9$            |
| 6 | 4 | 2 | $6 + 9 - 2 = 3$            |
| 2 | 1 | 5 | $2 + 9 - 7 = 4$            |
| 2 | 3 | 5 | $5 + 8 - 7 = 6$            |
| 2 | 4 | 5 | $9 + 2 - 7 = 4$            |
| 5 | 1 | 6 | $9 + 1 - 2 = 8$            |
| 5 | 3 | 6 | $8 + 6 - 2 = 12$           |
| 5 | 4 | 6 | $2 + 6 - 2 = 6$            |

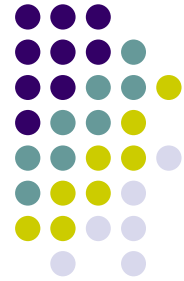


- Distância Total =  $11 + 1 = 12$



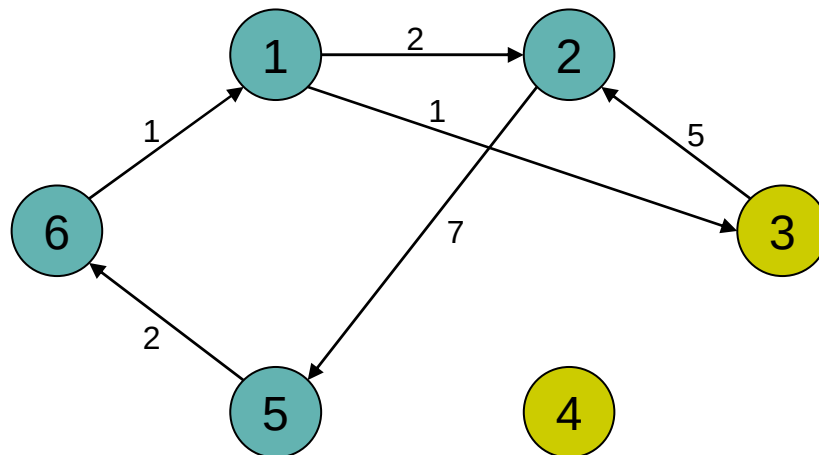
# PCV – Inserção mais Barata

## Exemplo - Passo 3



| Cid. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------|---|---|---|---|---|---|
| 1    | 0 | 2 | 1 | 4 | 9 | 1 |
| 2    | 2 | 0 | 5 | 9 | 7 | 2 |
| 3    | 1 | 5 | 0 | 3 | 8 | 6 |
| 4    | 4 | 9 | 3 | 0 | 2 | 6 |
| 5    | 9 | 7 | 8 | 2 | 0 | 2 |
| 6    | 1 | 2 | 6 | 6 | 2 | 0 |

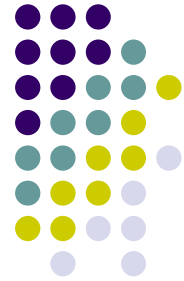
| i | k | j | $d_{ik} + d_{kj} - d_{ij}$ |
|---|---|---|----------------------------|
| 6 | 3 | 1 | $6 + 1 - 1 = 6$            |
| 6 | 4 | 1 | $6 + 4 - 1 = 9$            |
| 1 | 3 | 2 | $1 + 5 - 2 = 4$            |
| 1 | 4 | 2 | $4 + 9 - 2 = 11$           |
| 2 | 3 | 5 | $5 + 8 - 7 = 6$            |
| 2 | 4 | 5 | $9 + 2 - 7 = 4$            |
| 5 | 3 | 6 | $8 + 6 - 2 = 12$           |
| 5 | 4 | 6 | $2 + 6 - 2 = 6$            |



- Distância Total =  $12 + 4 = 16$

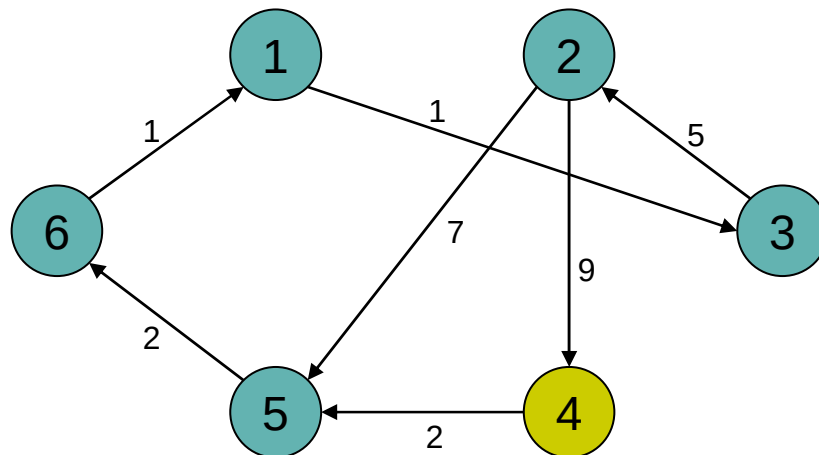
# PCV – Inserção mais Barata

## Exemplo – Passo final



| Cid. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------|---|---|---|---|---|---|
| 1    | 0 | 2 | 1 | 4 | 9 | 1 |
| 2    | 2 | 0 | 5 | 9 | 7 | 2 |
| 3    | 1 | 5 | 0 | 3 | 8 | 6 |
| 4    | 4 | 9 | 3 | 0 | 2 | 6 |
| 5    | 9 | 7 | 8 | 2 | 0 | 2 |
| 6    | 1 | 2 | 6 | 6 | 2 | 0 |

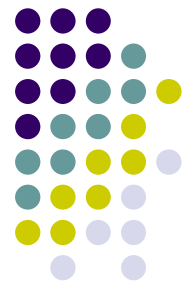
| i | k | j | $d_{ik} + d_{kj} - d_{ij}$ |
|---|---|---|----------------------------|
| 6 | 4 | 1 | $6 + 4 - 1 = 9$            |
| 1 | 4 | 3 | $4 + 3 - 1 = 6$            |
| 3 | 4 | 2 | $3 + 9 - 5 = 7$            |
| 2 | 4 | 5 | $9 + 2 - 7 = 4$            |
| 5 | 4 | 6 | $2 + 6 - 2 = 6$            |



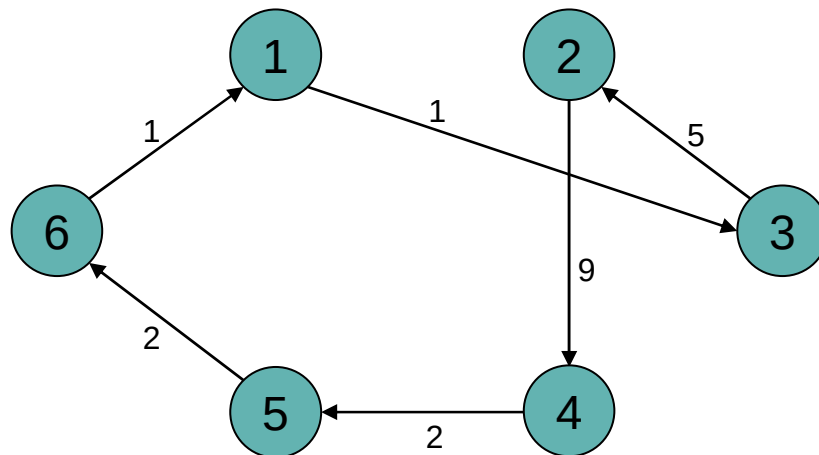
- Distância Total =  $16 + 4 = 20$

# PCV – Inserção mais Barata

## Exemplo – Solução final

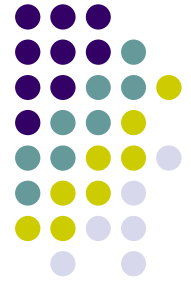


| Cid. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------|---|---|---|---|---|---|
| 1    | 0 | 2 | 1 | 4 | 9 | 1 |
| 2    | 2 | 0 | 5 | 9 | 7 | 2 |
| 3    | 1 | 5 | 0 | 3 | 8 | 6 |
| 4    | 4 | 9 | 3 | 0 | 2 | 6 |
| 5    | 9 | 7 | 8 | 2 | 0 | 2 |
| 6    | 1 | 2 | 6 | 6 | 2 | 0 |



- Distância Total = 16 + 4 = 20

$s = (6 \ 1 \ 3 \ 2 \ 4 \ 5)$



# Heurísticas de refinamento

- Baseadas na noção de vizinhança
- A cada solução  $s$  está associado um conjunto de vizinhos  $s'$  definidos por um determinado tipo de movimento  $m$
- $s' = s \oplus m$
- O tipo de movimento é dependente do problema



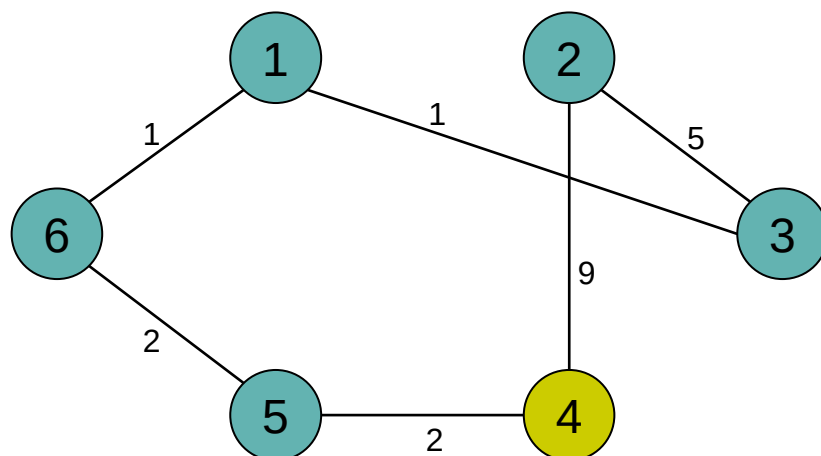
# Heurísticas de refinamento

- No PCV, um movimento  $m$  pode ser a troca da ordem de visita entre duas cidades
- Exemplo:
  - Dada a solução  $s = (6\ 1\ 3\ 2\ 4\ 5)$ , são exemplos de vizinhos de  $s$ :
    - $s' = (6\ 4\ 3\ 2\ 1\ 5)$
    - $s'' = (6\ 1\ 4\ 2\ 3\ 5)$

# PCV - Ex: Vizinhos de uma solução $s$



| Cid. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------|---|---|---|---|---|---|
| 1    | 0 | 2 | 1 | 4 | 9 | 1 |
| 2    | 2 | 0 | 5 | 9 | 7 | 2 |
| 3    | 1 | 5 | 0 | 3 | 8 | 6 |
| 4    | 4 | 9 | 3 | 0 | 2 | 6 |
| 5    | 9 | 7 | 8 | 2 | 0 | 2 |
| 6    | 1 | 2 | 6 | 6 | 2 | 0 |



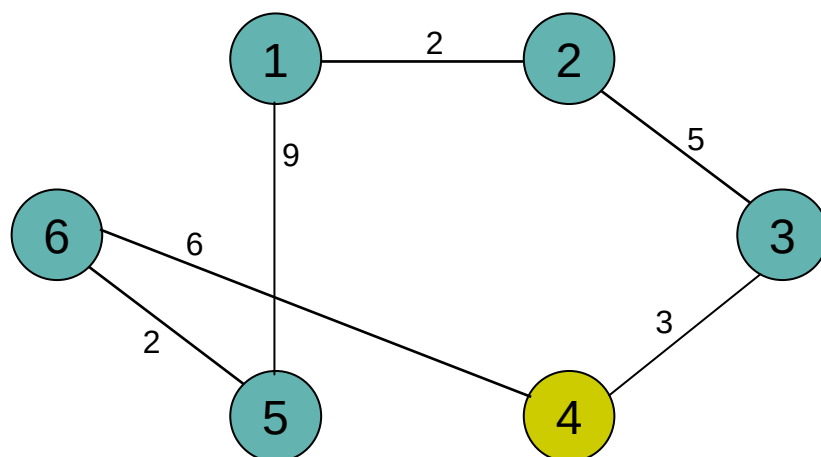
- Distância Total  $s = 20$

$$s = (6 \ 1 \ 3 \ 2 \ 4 \ 5)$$

# PCV - Ex: Vizinhos de uma solução s



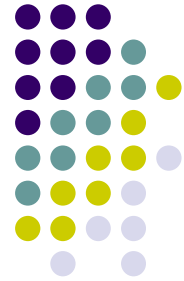
| Cid. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------|---|---|---|---|---|---|
| 1    | 0 | 2 | 1 | 4 | 9 | 1 |
| 2    | 2 | 0 | 5 | 9 | 7 | 2 |
| 3    | 1 | 5 | 0 | 3 | 8 | 6 |
| 4    | 4 | 9 | 3 | 0 | 2 | 6 |
| 5    | 9 | 7 | 8 | 2 | 0 | 2 |
| 6    | 1 | 2 | 6 | 6 | 2 | 0 |



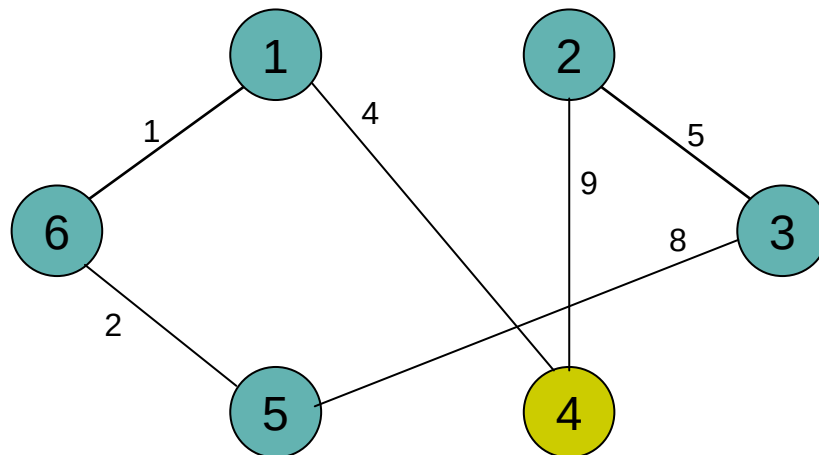
- Distância Total  $s' = 27$

$$s' = (6 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 5)$$

# PCV - Ex: Vizinhos de uma solução $s$



| Cid. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------|---|---|---|---|---|---|
| 1    | 0 | 2 | 1 | 4 | 9 | 1 |
| 2    | 2 | 0 | 5 | 9 | 7 | 2 |
| 3    | 1 | 5 | 0 | 3 | 8 | 6 |
| 4    | 4 | 9 | 3 | 0 | 2 | 6 |
| 5    | 9 | 7 | 8 | 2 | 0 | 2 |
| 6    | 1 | 2 | 6 | 6 | 2 | 0 |

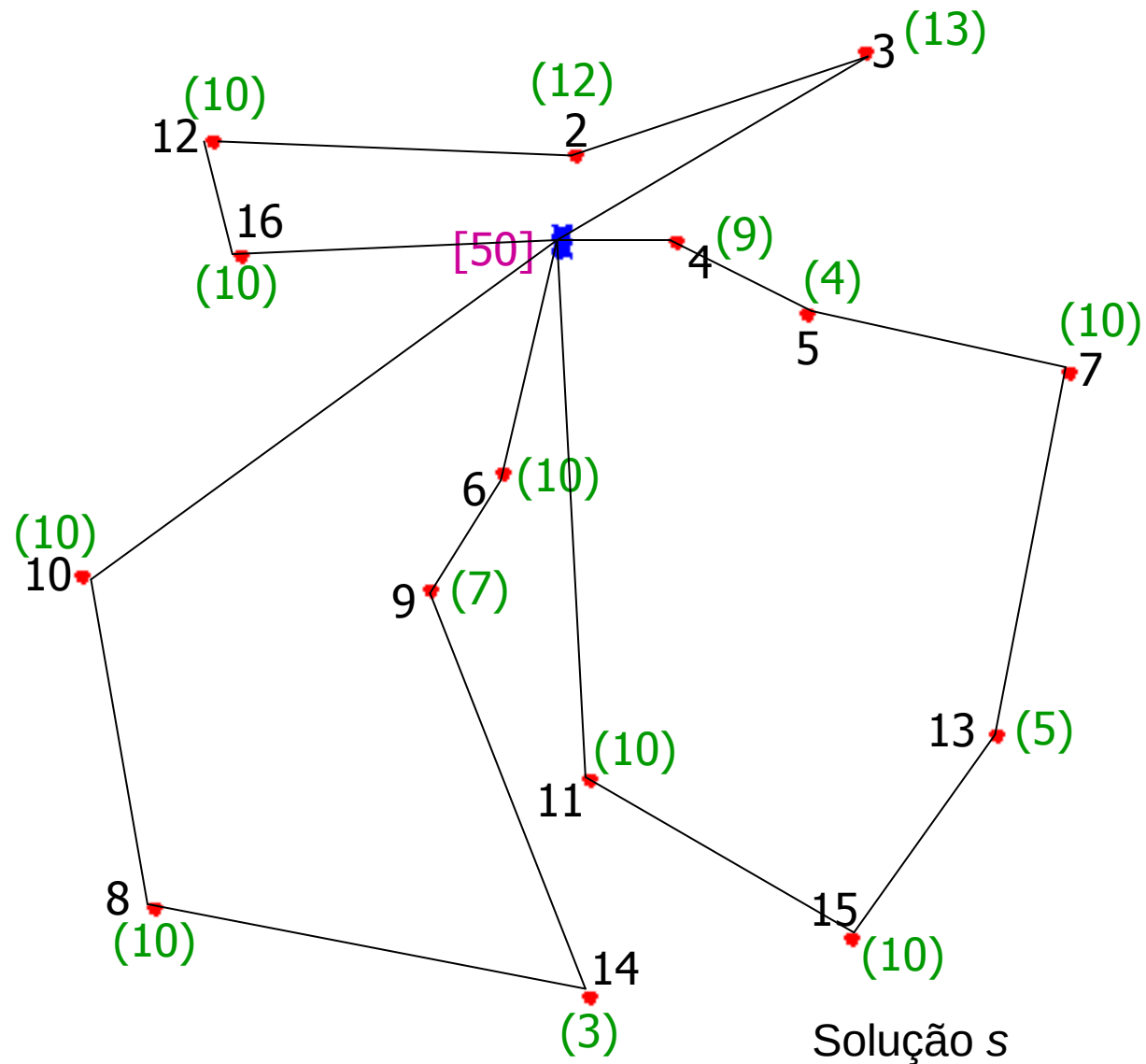


- Distância Total  $s'' = 29$

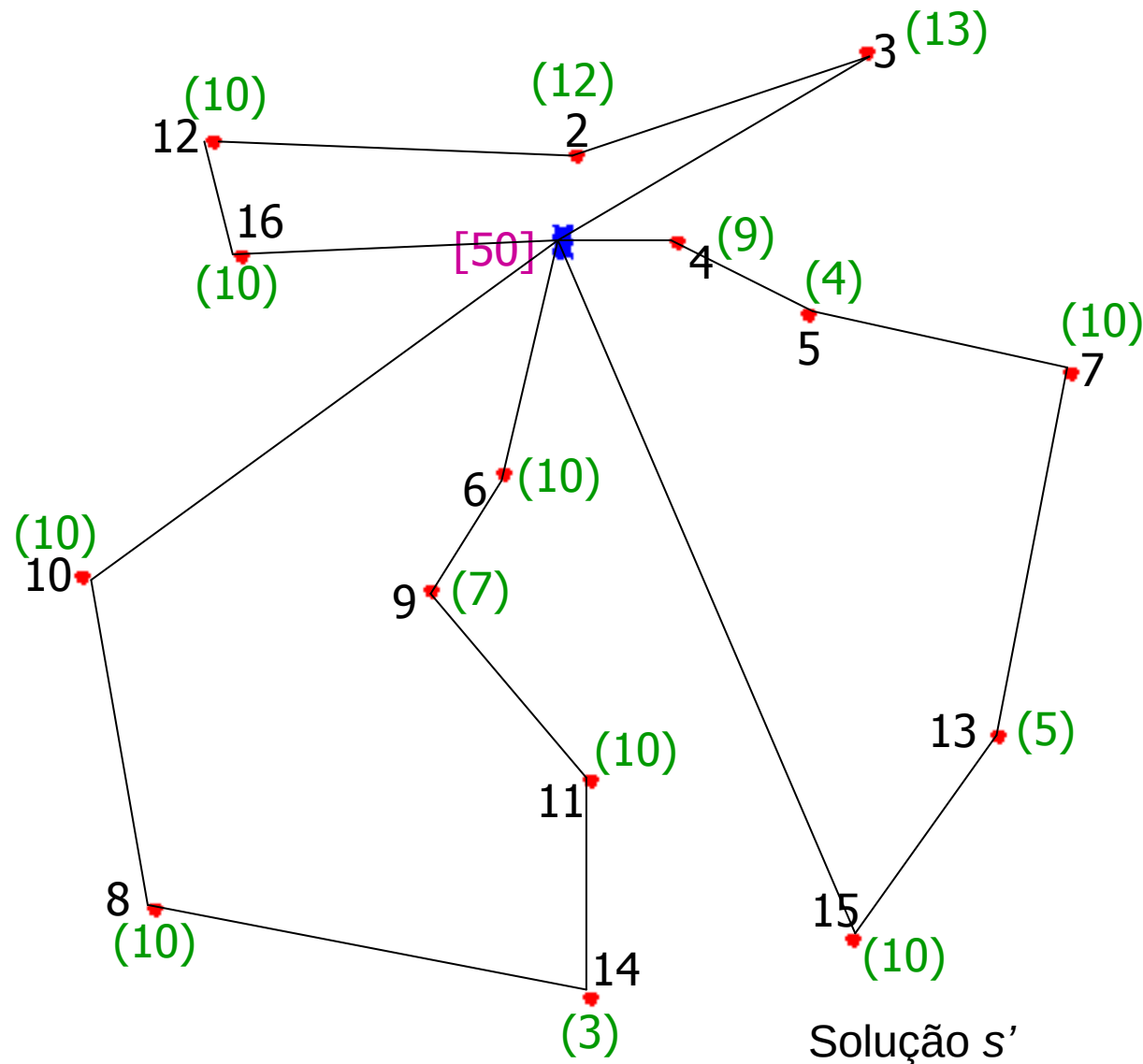
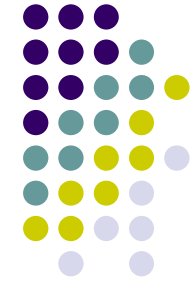
$$s'' = (6 \ 1 \ 4 \ 2 \ 3 \ 5)$$



# Exemplos de vizinhos no Problema de Roteamento de Veículos (*Vehicle Routing Problem*)

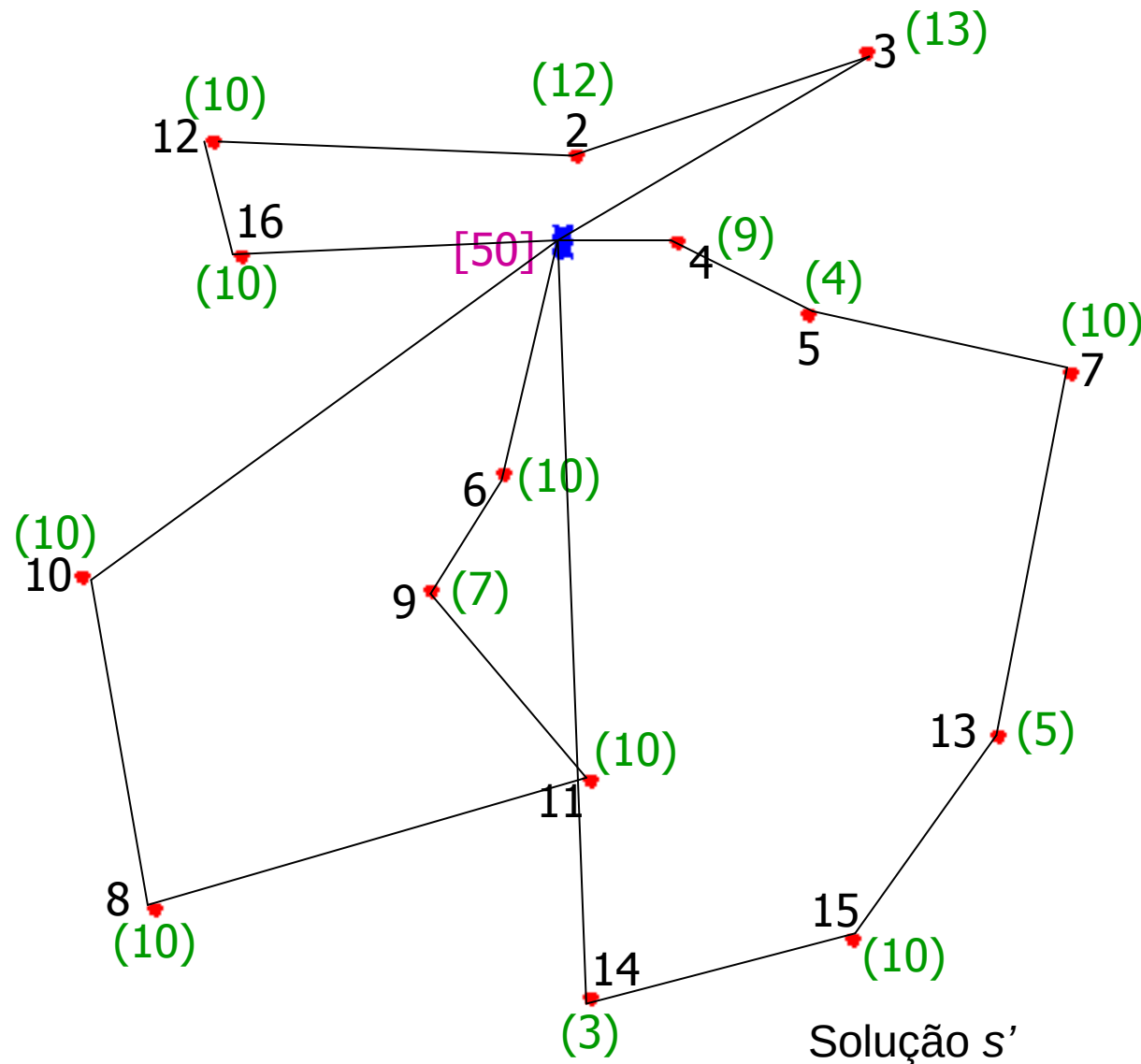
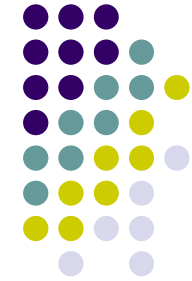


# Exemplos de vizinhos no Problema de Roteamento de Veículos (Vehicle Routing Problem)



$s'$  obtida  
pela  
**realocação**  
de um  
cliente de  
uma rota  
para outra  
rota  
(realocação  
inter-rota)

# Exemplos de vizinhos no Problema de Roteamento de Veículos (Vehicle Routing Problem)



$s'$  obtida  
pela **troca**  
de clientes  
entre rotas  
(movimento  
inter-rotas)  
(Clientes 11  
e 14  
mudam de  
rota)

# Problema de Alocação de Salas (*Classroom Assignment Problem*)



- Diz respeito à designação de salas para as aulas de uma instituição de ensino
- O horário das aulas é previamente conhecido
- O PAS é um subproblema do Problema de Programação de Horários (*timetabling*)
- Pode ser tratado de forma isolada ou de forma integrada à programação de horários

# Problema de Alocação de Salas (*Classroom Assignment Problem*)



- Restrições:
  - Não pode haver sobreposição de turmas;
  - As salas têm que comportar as turmas etc.
- Objetivos:
  - Manter as aulas de uma mesma turma em uma mesma sala ao longo da semana;
  - Minimizar o fluxo de alunos mudando de sala após uma aula;
  - Sempre que possível, alocar a uma mesma sala alunos de um mesmo curso e período etc.

# Problema de Alocação de Salas (Classroom Assignment Problem)

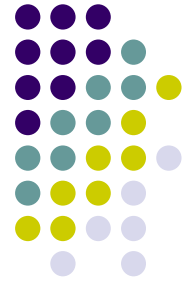


|          |   | Salas |    |    |   |
|----------|---|-------|----|----|---|
|          |   | 1     | 2  | 3  | 4 |
| Horários | 1 | 3     |    |    |   |
|          | 2 | 3     |    | 1  | 6 |
|          | 3 | 3     | 5  |    | 6 |
|          | 4 |       | 5  | 2  | 6 |
|          | 5 | 12    |    | 2  |   |
|          | 6 | 12    | 13 | 11 | 9 |
|          | 7 |       | 13 | 11 | 9 |
|          | 8 | 8     |    | 11 |   |
|          | 9 | 8     |    |    |   |
|          |   |       |    |    |   |

|          |   | Salas |    |    |   |
|----------|---|-------|----|----|---|
|          |   | 1     | 2  | 3  | 4 |
| Horários | 1 | 3     |    |    |   |
|          | 2 | 3     |    | 1  | 6 |
|          | 3 | 3     | 5  |    | 6 |
|          | 4 |       | 5  | 2  | 6 |
|          | 5 | 12    |    | 2  |   |
|          | 6 | 12    | 13 | 11 | 9 |
|          | 7 |       | 13 | 11 | 9 |
|          | 8 |       |    | 11 | 8 |
|          | 9 |       |    |    | 8 |
|          |   |       |    |    |   |

**Movimento de Realocação**

# Problema de Alocação de Salas (Classroom Assignment Problem)



Salas

|   |    |    |    |   |
|---|----|----|----|---|
|   | 1  | 2  | 3  | 4 |
| 1 | 3  |    |    |   |
| 2 | 3  |    | 1  | 6 |
| 3 | 3  | 5  |    | 6 |
| 4 |    | 5  | 2  | 6 |
| 5 | 12 |    | 2  |   |
| 6 | 12 | 13 | 11 | 9 |
| 7 |    | 13 | 11 | 9 |
| 8 | 8  |    | 11 |   |
| 9 | 8  |    |    |   |
|   |    |    |    |   |

Horários

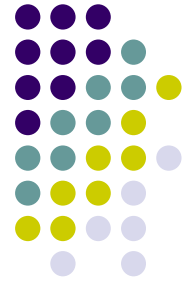
Salas

|   |    |    |    |   |
|---|----|----|----|---|
|   | 1  | 2  | 3  | 4 |
| 1 | 3  |    |    |   |
| 2 | 3  | 6  | 1  |   |
| 3 | 3  | 6  |    | 5 |
| 4 |    | 6  | 2  | 5 |
| 5 | 12 |    | 2  |   |
| 6 | 12 | 13 | 11 | 9 |
| 7 |    | 13 | 11 | 9 |
| 8 | 8  |    | 11 |   |
| 9 | 8  |    |    |   |
|   |    |    |    |   |

Horários

**Movimento de Troca**

# Problema de Alocação de Salas (*Classroom Assignment Problem*)



Algumas possíveis estruturas de vizinhança:

- $N^1(s) = \{s' \mid s' \leftarrow s \oplus \text{movimento de } \textit{realocação}\}$
- $N^2(s) = \{s' \mid s' \leftarrow s \oplus \text{movimento de } \textit{troca}\}$
- $N(s) = \{s' \mid s' \leftarrow s \oplus \text{mov. de } \textit{realocação} \text{ ou } \textit{troca}\}$



# Planejamento Operacional de Lavra com Alocação Dinâmica de Caminhões



## Representação de uma Solução

|                      | <i>CARGA</i>                  | <i>Cam<sub>1</sub></i> | <i>Cam<sub>2</sub></i> | ... | <i>Cam<sub>V</sub></i> |
|----------------------|-------------------------------|------------------------|------------------------|-----|------------------------|
| <i>F<sub>1</sub></i> | ( <i>Car<sub>2</sub></i> , 0) | 5                      | X                      | ... | 4                      |
| <i>F<sub>2</sub></i> | ( <i>D</i> , 0)               | 0                      | 0                      | ... | 0                      |
| <i>F<sub>3</sub></i> | ( <i>Car<sub>1</sub></i> , 1) | 2                      | 4                      | ... | 1                      |
| ...                  | ...                           | ...                    | ...                    | ... | ...                    |
| <i>F<sub>F</sub></i> | ( <i>Car<sub>5</sub></i> , 1) | 0                      | 9                      | ... | 3                      |

# Planejamento Operacional de Lavra com Alocação Dinâmica de Caminhões



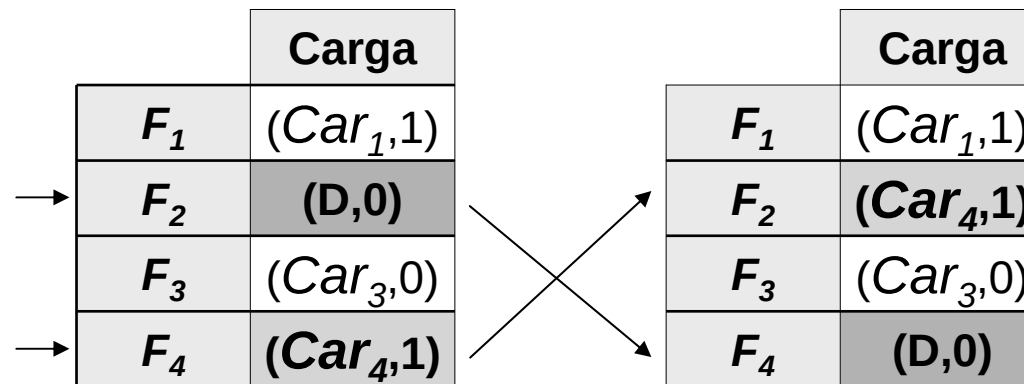
- Seis tipos de movimentos para explorar o espaço de soluções:
  - Movimento Carga
  - Movimento Número de Viagens
  - Movimento Realocar Viagem de um Caminhão
  - Movimento Realocar Viagem a uma Frente
  - Movimento Operação Caminhão
  - Movimento Operação Frente
- Cada movimento define um tipo de vizinhança

# Planejamento Operacional de Lavra com Alocação Dinâmica de Caminhões



Vizinhança  $N^{CG}$

Movimento Carga -  $N^{CG}(s)$



# Planejamento Operacional de Lavra com Alocação Dinâmica de Caminhões



## Vizinhança $N^{OF}$

### Movimento Operação Frente - $N^{OF}(s)$

Desativar operação de uma carregadeira alocada a uma frente

|   |       |                            |   |       |                            |
|---|-------|----------------------------|---|-------|----------------------------|
|   |       | <b>Carga</b>               |   |       | <b>Carga</b>               |
| → | $F_1$ | <b>(Car<sub>1</sub>,1)</b> | → | $F_1$ | <b>(Car<sub>1</sub>,0)</b> |
|   | $F_2$ | (D,0)                      |   | $F_2$ | (D,0)                      |
|   | $F_3$ | (Car <sub>3</sub> ,0)      |   | $F_3$ | (Car <sub>3</sub> ,0)      |
|   | $F_4$ | (Car <sub>4</sub> ,1)      |   | $F_4$ | (Car <sub>4</sub> ,1)      |

Ativar operação de uma carregadeira alocada a uma frente

|   |       |                            |   |       |                            |
|---|-------|----------------------------|---|-------|----------------------------|
|   |       | <b>Carga</b>               |   |       | <b>Carga</b>               |
|   | $F_1$ | (Car <sub>1</sub> ,1)      |   | $F_1$ | (Car <sub>1</sub> ,0)      |
|   | $F_2$ | (D,0)                      |   | $F_2$ | (D,0)                      |
| → | $F_3$ | <b>(Car<sub>3</sub>,0)</b> | → | $F_3$ | <b>(Car<sub>3</sub>,1)</b> |
|   | $F_4$ | (Car <sub>4</sub> ,1)      |   | $F_4$ | (Car <sub>4</sub> ,1)      |

# Planejamento Operacional de Lavra com Alocação Dinâmica de Caminhões

## Vizinhança $N^{NV}$



### Movimento Número de Viagens - $N^{NV}(s)$

Decréscimo no número de viagens de um caminhão a uma frente

|       | Carga                 | Cam <sub>1</sub> | Cam <sub>2</sub> |
|-------|-----------------------|------------------|------------------|
| $F_1$ | (Car <sub>1</sub> ,1) | 6                | X                |
| $F_2$ | (D,0)                 | 0                | 0                |
| $F_3$ | (Car <sub>3</sub> ,0) | 0                | 0                |
| $F_4$ | (Car <sub>4</sub> ,1) | 4                | 3                |

-1

|       | Carga                 | Cam <sub>1</sub> | Cam <sub>2</sub> |
|-------|-----------------------|------------------|------------------|
| $F_1$ | (Car <sub>1</sub> ,1) | 5                | X                |
| $F_2$ | (D,0)                 | 0                | 0                |
| $F_3$ | (Car <sub>3</sub> ,0) | 0                | 0                |
| $F_4$ | (Car <sub>4</sub> ,1) | 4                | 3                |

Acréscimo no número de viagens de um caminhão a uma frente

|       | Carga                 | Cam <sub>1</sub> | Cam <sub>2</sub> |
|-------|-----------------------|------------------|------------------|
| $F_1$ | (Car <sub>1</sub> ,1) | 6                | X                |
| $F_2$ | (D,0)                 | 0                | 0                |
| $F_3$ | (Car <sub>3</sub> ,0) | 0                | 0                |
| $F_4$ | (Car <sub>4</sub> ,1) | 4                | 3                |

+1

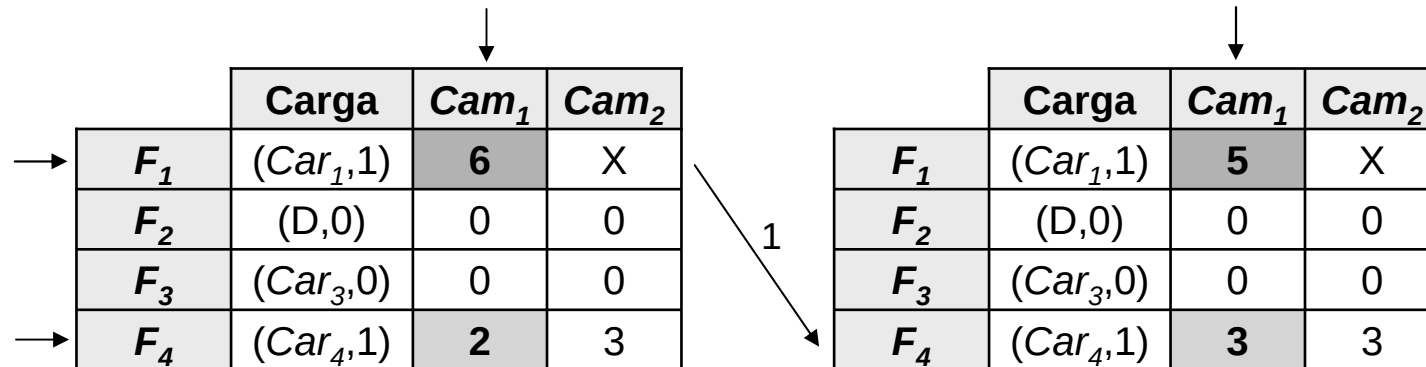
|       | Carga                 | Cam <sub>1</sub> | Cam <sub>2</sub> |
|-------|-----------------------|------------------|------------------|
| $F_1$ | (Car <sub>1</sub> ,1) | 6                | X                |
| $F_2$ | (D,0)                 | 0                | 0                |
| $F_3$ | (Car <sub>3</sub> ,0) | 0                | 0                |
| $F_4$ | (Car <sub>4</sub> ,1) | 4                | 4                |

# Planejamento Operacional de Lavra com Alocação Dinâmica de Caminhões



Vizinhança  $N^{VC}$

Movimento Realocar Viagem de um Caminhão -  $N^{VC}(s)$



# Planejamento Operacional de Lavra com Alocação Dinâmica de Caminhões



Vizinhança  $N^{VF}$

Movimento Realocar Viagem a uma Frente -  $N^{VF}(s)$

|   |       |              | ↓       | ↓       |
|---|-------|--------------|---------|---------|
|   |       | Carga        | $Cam_1$ | $Cam_2$ |
| → | $F_1$ | $(Car_1, 1)$ | 6       | X       |
|   | $F_2$ | $(D, 0)$     | 0       | 0       |
|   | $F_3$ | $(Car_3, 0)$ | 0       | 0       |
|   | $F_4$ | $(Car_4, 1)$ | 4       | 3       |

1

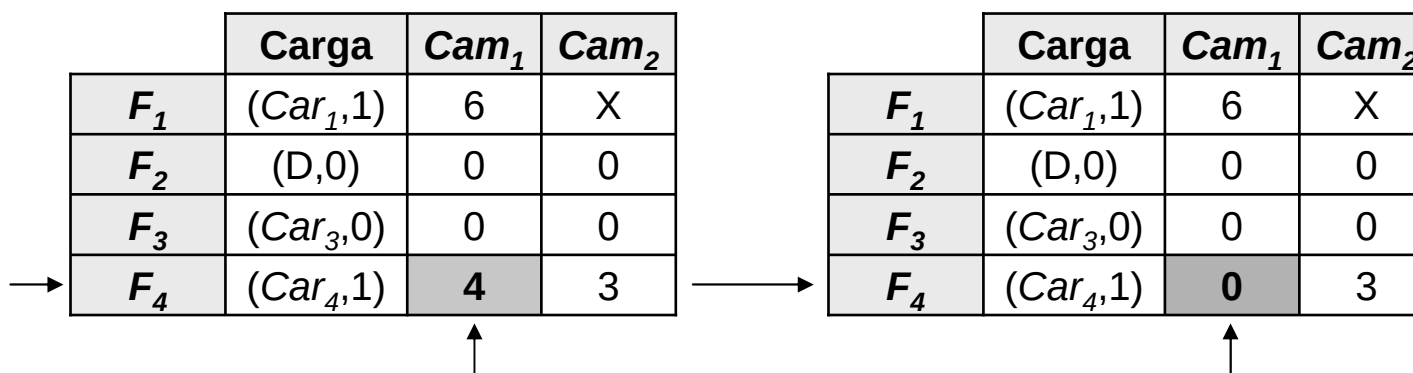
|  |       | Carga        | $Cam_1$ | $Cam_2$ |
|--|-------|--------------|---------|---------|
|  | $F_1$ | $(Car_1, 1)$ | 6       | X       |
|  | $F_2$ | $(D, 0)$     | 0       | 0       |
|  | $F_3$ | $(Car_3, 0)$ | 0       | 0       |
|  | $F_4$ | $(Car_4, 1)$ | 3       | 4       |

# Planejamento Operacional de Lavra com Alocação Dinâmica de Caminhões



## Vizinhança $N^{OC}$

### Movimento Operação Caminhão - $N^{OC}(s)$





# Planejamento Operacional de Lavra com Alocação Dinâmica de Caminhões



## Função de avaliação de uma solução $s$ :

- Feita por uma função que penaliza o não atendimento às restrições e objetivos
- Restrições (Requisitos essenciais):
  - Produção da mina dentro dos limites de especificação;
  - Parâmetros de controle respeitam os limites de qualidade especificados;
  - Relação estéril/minério dentro dos limites de especificação;
  - Taxa de utilização dos caminhões inferior ao máximo possível;
  - Produção dos equipamentos de carga respeita as capacidades de produção especificadas.
- Objetivos (Requisitos não-essenciais):
  - Atendimento às metas de produção da mina
  - Atendimento às metas de qualidade dos parâmetros de controle
  - Atendimento à relação estéril/minério desejada
  - Taxa de utilização de caminhões igual à meta de utilização
  - Utilização do menor número possível de caminhões.

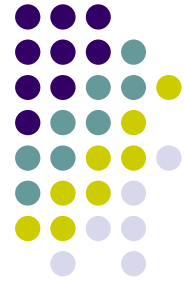
$$f(s) = f^p(s) + \sum_{j \in S} f_j^q(s) + f^r(s) + \sum_{l \in V} f_l^u(s) + \sum_{i \in F} f_i^c(s) + f^n(s)$$

# Planejamento Operacional de Lavra com Alocação Dinâmica de Caminhões

Avaliação da solução  $s$  quanto à produção:

$$f^p(s) = \theta^p \times |Pr - P|$$

- $P$  : Produção de minério (t/h);
- $Pr$  : Meta de produção de minério (t/h);
- $\theta^p$  : Peso associado à avaliação da produção.



# Planejamento Operacional de Lavra com Alocação Dinâmica de Caminhões

Avaliação da solução  $s$  quanto à qualidade:



$$f_j^q(s) = \theta_j^q \times \Delta_j^q \times |Qr_j - Q_j| \quad \forall j \in S$$

$Q_j$  : Quantidade encontrada na mistura para o parâmetro  $j$  (t/h);

$Qr_j$  : Quantidade recomendada para o parâmetro  $j$  na mistura (t/h);

$\theta_j^q$  : Peso associado à avaliação da qualidade do parâmetro  $j$ ;

$\Delta_j^q$  : Multiplicador associado ao parâmetro  $j$ .

# Planejamento Operacional de Lavra com Alocação Dinâmica de Caminhões

Avaliação da solução  $s$  quanto à relação estéril /  
minério:



$$f^r(s) = \theta^r \times |Rr - R|$$

$R$  : Produção de estéril na mistura (t/h);

$R_r$  : Meta de Produção de estéril na mistura (t/h);

$\theta_r$  : Peso associado à avaliação da relação estéril/minério

# Planejamento Operacional de Lavra com Alocação Dinâmica de Caminhões

Avaliação da solução  $s$  quanto à taxa de utilização dos caminhões:



$$f_l^u(s) = \theta_l^u \times |Ur_l - U_l| \quad \forall l \in V$$

$U_l$  : Carga transportada pelo caminhão  $l$  (t/h);

$Ur_l$  : Meta de carga transportada pelo caminhão  $l$  (t/h);

$\theta_l^u$  : Peso associado à avaliação da utilização do caminhão  $l$

# Planejamento Operacional de Lavra com Alocação Dinâmica de Caminhões

Avaliação da solução  $s$  quanto à produção dos equipamentos de carga:

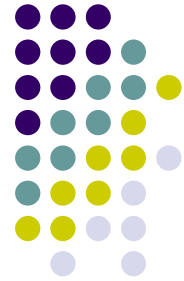
$$f_i^c(s) = \theta_k^c \times |Cu_k - x_i| \quad \forall i \in F$$

$x_i$  : Ritmo de lavra da frente  $i$  (t/h);

$k$  : Equipamento de carga que está operando na frente  $i$ ;

$Cu^k$  : Produção máxima do equipamento de carga  $k$  alocado à frente  $i$  (t/h);

$\theta_k^c$  : Peso associado à avaliação da produção do equipamento de carga  $k$  alocada à frente  $i$



# Planejamento Operacional de Lavra com Alocação Dinâmica de Caminhões

Avaliação da solução  $s$  quanto ao número de caminhões utilizados:

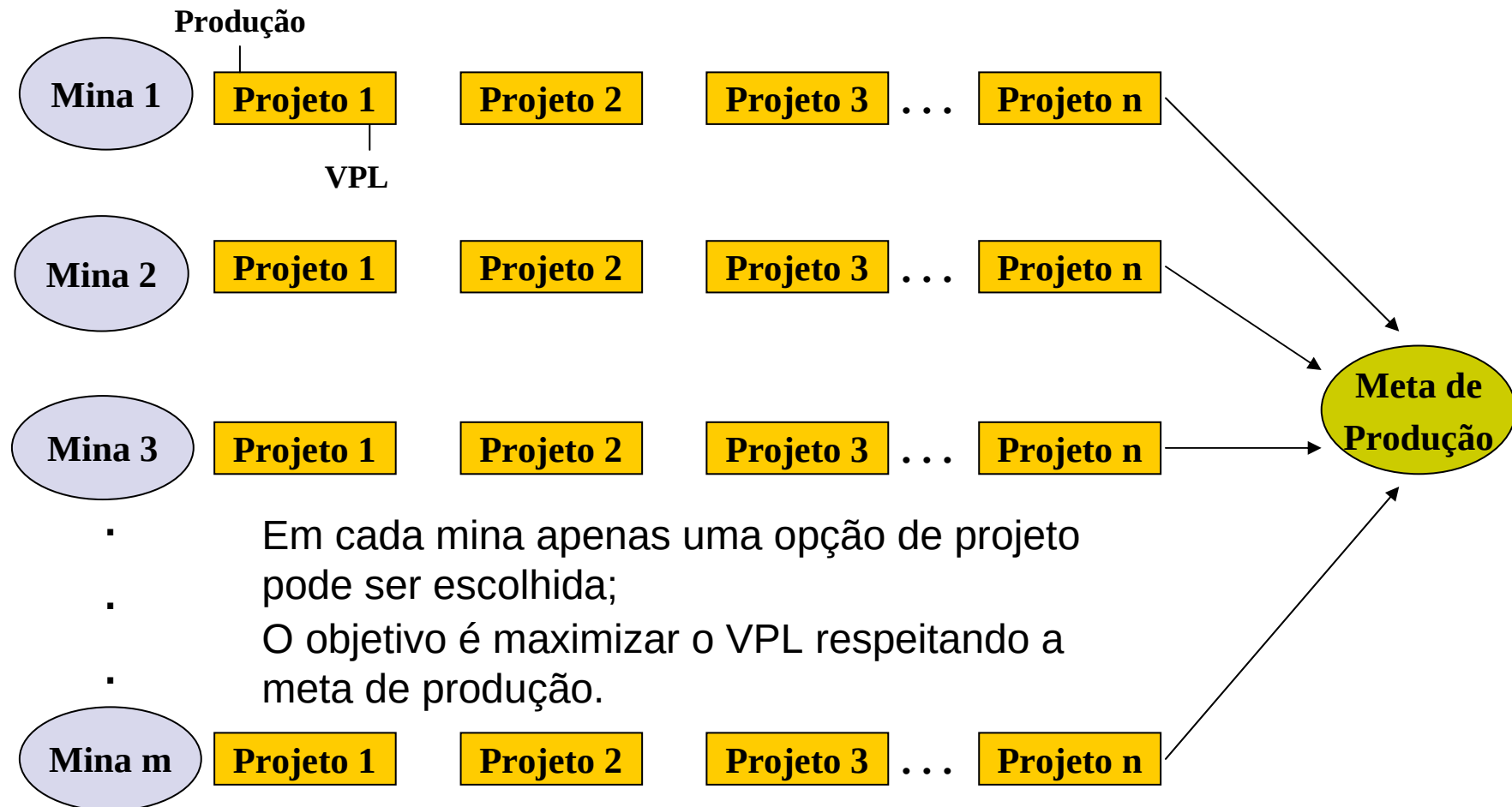
$$f^n(s) = \beta^n \times \sum_{i \in F} [TU_i]$$

$TU_i$  : Taxa de utilização do caminhão  $i$  , em %;

$\beta_n$  : Peso associado à avaliação do número total de caminhões utilizados

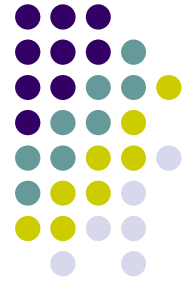


# Problema de Seleção de Projetos Mineiros Concorrentes





# Modelagem Heurística para o Problema de Seleção de Projetos

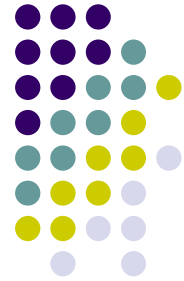


Representação de uma solução:

|   |    |   |   |   |    |   |
|---|----|---|---|---|----|---|
| 7 | 15 | 7 | 3 | 8 | 14 | 5 |
| 1 | 2  | 3 | 4 | 5 | 6  | 7 |

\*Obs.: Com esta representação, a restrição de que em cada mina um projeto tem que ser implementado é **automaticamente** satisfeita

# Estrutura de Vizinhança para o Problema de Seleção de Projetos



**Exploração do espaço de soluções por meio do Movimento Substituição da Opção**

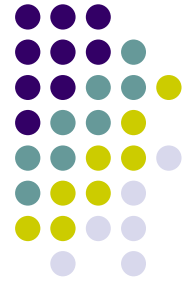
Solução  $s$ :

|   |    |   |   |   |    |   |
|---|----|---|---|---|----|---|
| 7 | 15 | 7 | 3 | 8 | 14 | 5 |
| 1 | 2  | 3 | 4 | 5 | 6  | 7 |

Exemplo de vizinho  $s'$ : gerado a partir de  $s$ , substituindo-se a opção implementada em uma mina pela opção posterior

|   |    |   |   |   |    |   |
|---|----|---|---|---|----|---|
| 7 | 15 | 7 | 3 | 9 | 14 | 5 |
| 1 | 2  | 3 | 4 | 5 | 6  | 7 |

# Avaliação da Solução heurística do Problema da Seleção de Projetos



Feita por função que procura maximizar o VPL e penalizar a produção inferior ou superior à meta

$$f(s) = \sum_{i \in \text{Minas}} \sum_{j \in \text{Opcoes}} \text{VPL}_{i,S_i} - P_{falta} \times \max\{0, M - \sum_{i \in \text{Minas}} \text{prod}_{i,S_i}\} - P_{exc} \times \max\{0, \sum_{i \in \text{Minas}} \text{prod}_{i,S_i} - M\}$$

em que:

Minas = conjunto de minas;

Opcoes = conjunto das opções de projeto em cada mina;

$\text{VPL}_{i,S_i}$  = Valor Presente Líquido referente à opção j da mina i;

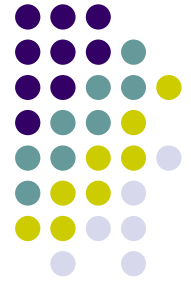
$\text{prod}_{i,S_i}$  = Produção referente à opção j da mina i;

$P_{falta}$  = Penalidade por produção inferior à meta;

$P_{exc}$  = Penalidade por produção superior à meta;

M = Meta de produção especificada.

# Heurísticas de refinamento (Princípio de funcionamento)



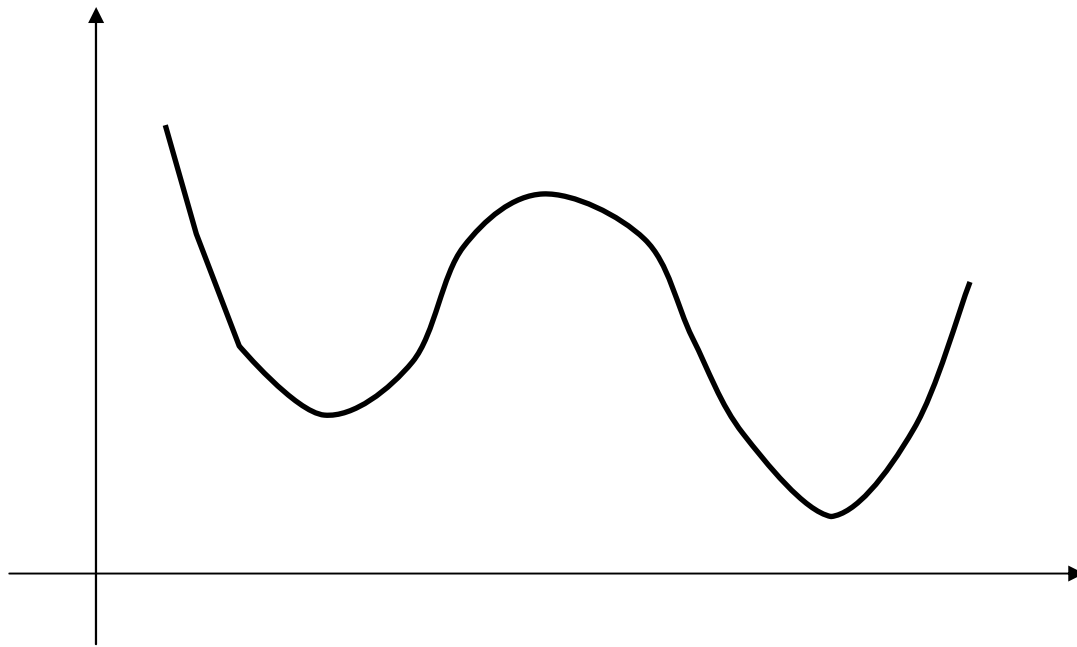
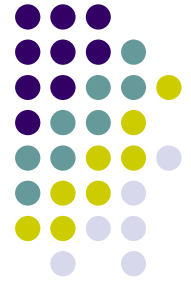
- Partir de uma solução inicial qualquer
- Caminhar, a cada iteração, de vizinho para vizinho de acordo com a definição de vizinhança adotada, tentando **melhorar** a solução construída

# Método da descida/subida (*Descent/Uphill Method*)

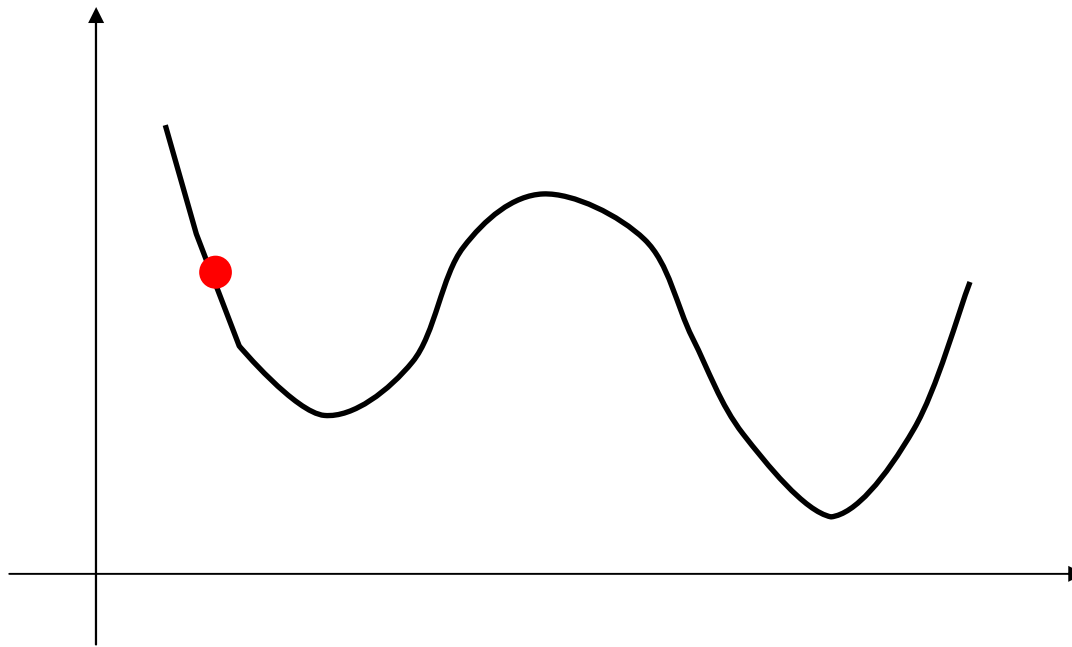
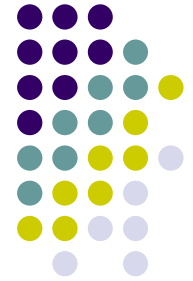


- Parte de uma solução inicial qualquer
- A cada passo analisa **todos** os possíveis vizinhos
- Move somente para o vizinho que representa uma **melhora** no valor atual da função de avaliação.
  - Em problemas de minimização, um vizinho  $s'$  é melhor que  $s$  quando  $f(s') < f(s)$ . Neste caso,  $s'$  passa a ser a nova solução corrente
- O método pára quando um ótimo local (com respeito à definição de vizinhança) é encontrado

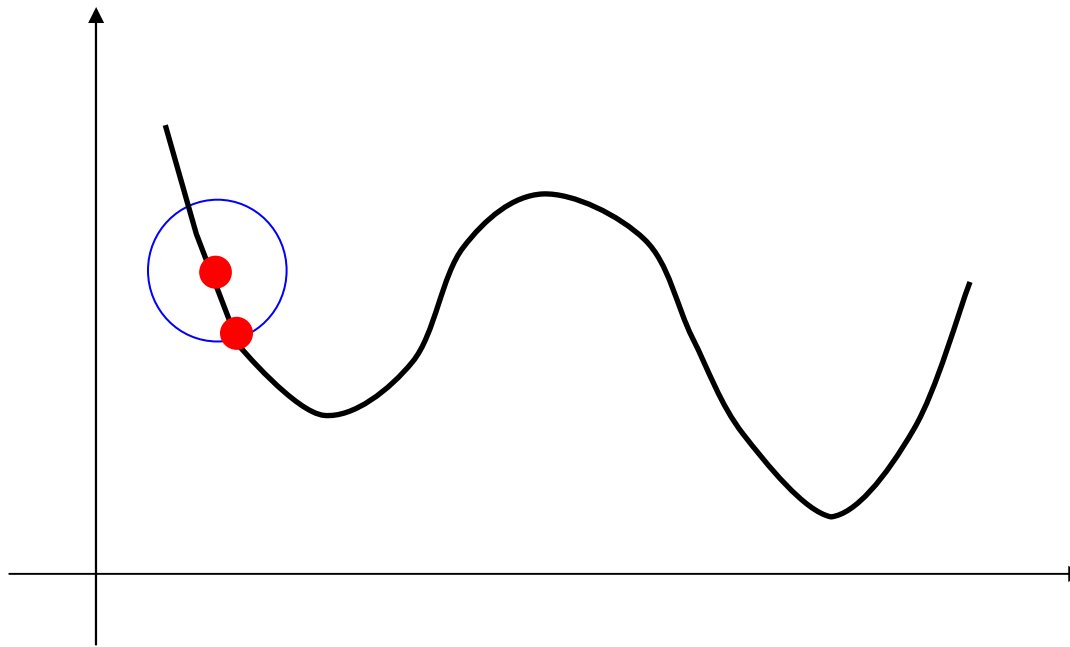
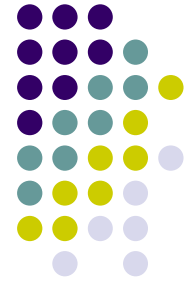
# Funcionamento da Heurística de Descida



# Funcionamento da Heurística de Descida

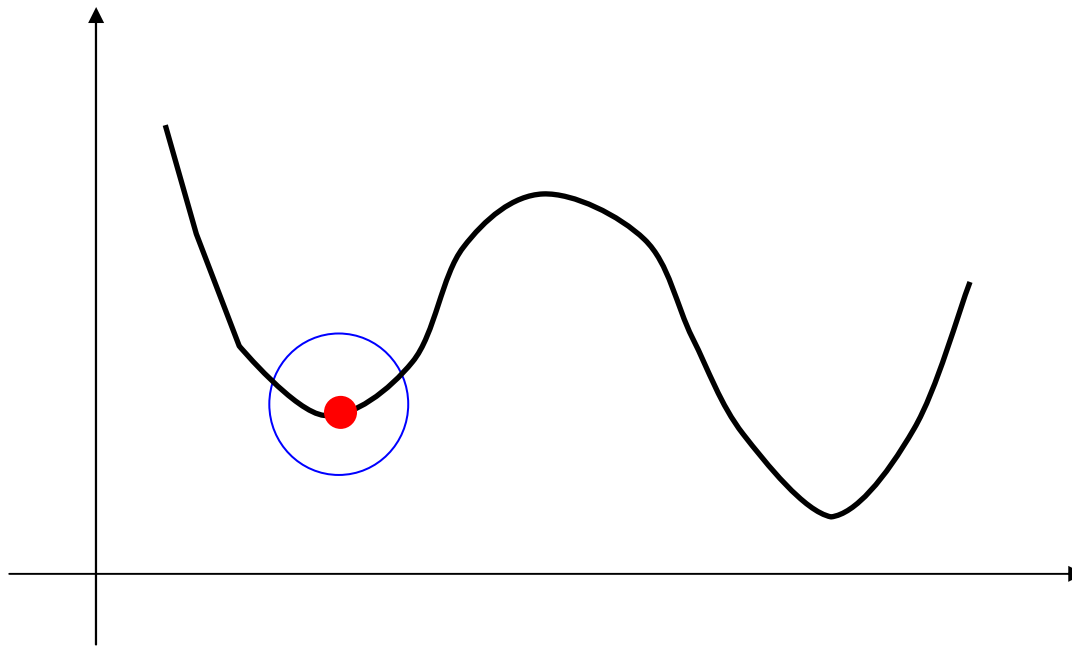
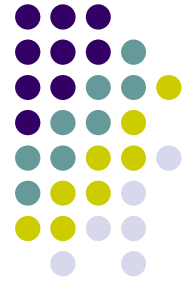


# Funcionamento da Heurística de Descida





# Funcionamento da Heurística de Descida



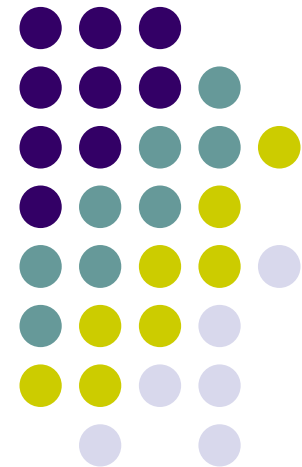
**Problema: Fica-se **preso** no primeiro ótimo local**

# METAHEURÍSTICAS

---

Marcone Jamilson Freitas Souza  
Alexandre Xavier Martins  
Tatiana Alves Costa  
José Maria do Carmo Bento Alves  
Frederico Augusto Coimbra Guimarães  
Túlio Ângelo Machado Toffolo

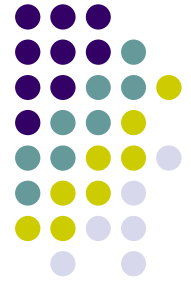
Departamento de Computação  
Homepage: <http://www.decom.ufop.br/prof/marcone>  
E-mail: [marcone.freitas@yahoo.com.br](mailto:marcone.freitas@yahoo.com.br)





# Metaheurísticas

- Métodos heurísticos, de caráter geral, dotados de mecanismos para escapar das armadilhas dos ótimos locais
- Princípio básico: aceitar soluções de piora
- Podem ser baseados em Busca Local ou Busca Populacional.
- Os métodos baseados em Busca Local são fundamentados na noção de vizinhança:
  - Dada uma solução  $s$ , diz-se que  $s'$  é um vizinho de  $s$ , se  $s'$  é obtido de  $s$  a partir de um movimento  $m$ , isto é:  $s' \leftarrow s \oplus m$
  - A estrutura de vizinhança varia de acordo com o problema tratado
- Os métodos baseados em Busca Populacional partem de um conjunto de soluções, aplicando sobre estes operadores que visam à melhoria desse conjunto.



# Metaheurísticas

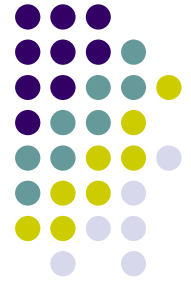
- Exemplos de metaheurísticas:
  - de busca local:
    - Busca Tabu
    - *Simulated Annealing*
    - *Iterated Local Search* (ILS)
    - *Variable Neighborhood Search* (VNS)
  - de busca populacional:
    - Algoritmos Genéticos
    - Colônia de Formigas

# Simulated Annealing: Fundamentação do método



- Proposto por Kirkpatrick *et al.* (1983)
- Simula o processo de recozimento de metais;
- Resfriamento rápido conduz a produtos meta-estáveis, de maior energia interna;
- Resfriamento lento conduz a produtos mais estáveis, estruturalmente fortes, de menor energia;
- Durante o recozimento o material passa por vários estados possíveis

# Simulated Annealing: Fundamentação do método



- Analogia com um problema combinatorial:
  - Os estados possíveis de um metal correspondem a soluções do espaço de busca;
  - A energia em cada estado corresponde ao valor da função objetivo;
  - A energia mínima corresponde ao valor de uma solução ótima local, possivelmente global.

# Simulated Annealing:

## Fundamentação do método

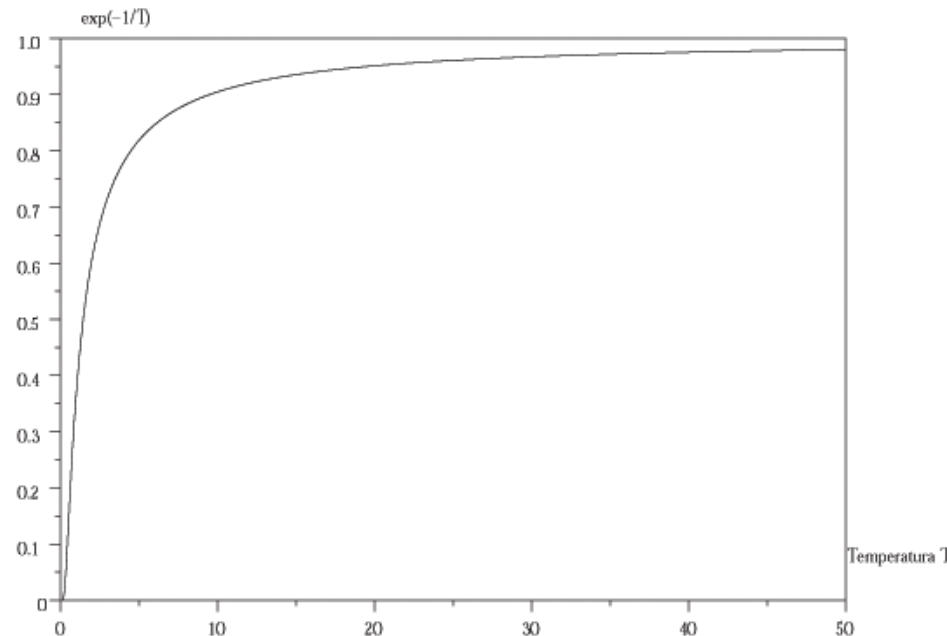


- A cada iteração do método, um novo estado é gerado a partir do estado corrente por uma modificação aleatória neste;
- Se o novo estado é de energia **menor** que o estado corrente, esse novo estado passa a ser o estado corrente;
- Se o novo estado tem uma energia **maior** que o estado corrente em  $\Delta$  unidades, a probabilidade de se mudar do estado corrente para o novo estado é:
  - $e^{-\Delta/(kT)}$ , onde  $k$  = constante de Boltzmann e  $T$  = temperatura corrente;
- Este procedimento é repetido até se atingir o equilíbrio térmico (passo de Metrópolis)



## Simulated Annealing: Probabilidade de aceitação de um movimento de piora

- Baseada na fórmula:  $P(\text{aceitação}) = e^{-\Delta/T}$
- $\Delta$  = variação de custo;  $T$  = temperatura

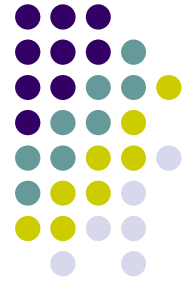


- Temperatura  $\uparrow \Rightarrow$  Probabilidade de aceitação  $\uparrow$
- Temperatura  $\downarrow \Rightarrow$  Probabilidade de aceitação  $\downarrow$



# Simulated Annealing:

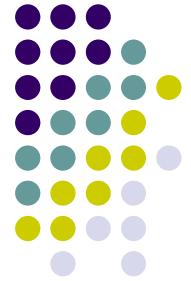
## Fundamentação do método



- No início do processo, a temperatura é elevada e a probabilidade de se aceitar soluções de piora é maior;
- As soluções de piora são aceitas para escapar de ótimos locais;
- A probabilidade de se aceitar uma solução de piora depende de um parâmetro, chamado temperatura;
- Quanto menor a temperatura, menor a probabilidade de se aceitar soluções de piora;

# Simulated Annealing:

## Fundamentação do método



- Atingido o equilíbrio térmico, a temperatura é diminuída;
- A taxa de aceitação de movimentos de piora é, portanto, diminuída com o decorrer das iterações;
- No final do processo, praticamente não se aceita movimentos de piora e o método se comporta como o método da descida/subida;
- O final do processo se dá quando a temperatura se aproxima de zero e nenhuma solução de piora é mais aceita, evidenciando o encontro de um ótimo local.

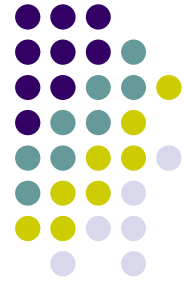
# Algoritmo *Simulated Annealing*



```
procedimento  $SA(f(.), N(.), \alpha, S_{Amax}, T_0, s)$   
1   $s^* \leftarrow s$ ;    {Melhor solução obtida até então}  
2   $IterT \leftarrow 0$ ; {Número de iterações na temperatura T}  
3   $T \leftarrow T_0$ ;   {Temperatura corrente}  
4  enquanto ( $T > 0$ ) faça  
5      enquanto ( $IterT < S_{Amax}$ ) faça  
6           $IterT \leftarrow IterT + 1$ ;  
7          Gere um vizinho qualquer  $s' \in N(s)$ ;  
8           $\Delta = f(s') - f(s)$ ;  
9          se ( $\Delta < 0$ )  
10             então  
11                  $s \leftarrow s'$ ;  
12                 se ( $f(s') < f(s^*)$ ) então  $s^* \leftarrow s'$ ;  
13             senão  
14                 Tome  $x \in [0, 1]$ ;  
15                 se ( $x < e^{-\Delta/T}$ ) então  $s \leftarrow s'$ ;  
16             fim-se;  
17         fim-enquanto;  
18          $T \leftarrow \alpha \times T$ ;  
19          $IterT \leftarrow 0$ ;  
20 fim-enquanto;  
21  $s \leftarrow s^*$ ;  
22 Retorne  $s$ ;  
fim  $SA$ ;
```

# Simulated Annealing:

## Prescrições para o resfriamento



### 1. Geométrico:

$$T_k = \alpha T_{k-1} \quad \forall k \geq 1 \quad (1)$$

onde  $T_k$  representa a temperatura na iteração  $k$  do método, isto é, na  $k$ -ésima vez em que há alteração no valor da temperatura e  $\alpha$  uma constante tal que  $0 < \alpha < 1$ .

### 2.

$$T_k = \frac{T_{k-1}}{1 + \gamma \sqrt{T_{k-1}}} \quad \forall k \geq 1 \quad (2)$$

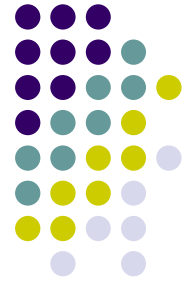
onde  $T_k$  representa a temperatura na iteração  $k$  do método e  $\gamma$  uma constante tal que  $0 < \gamma < 1$ .

### 3.

$$T_k = \begin{cases} \beta T_{k-1} & \text{se } k = 1 \\ \frac{T_{k-1}}{1 + \gamma T_{k-1}} & \text{se } k \geq 2 \end{cases} \quad (3)$$

onde  $\gamma = \frac{T_0 - T_{k-1}}{(k-1)T_0 T_{k-1}}$ , sendo  $T_0$  a temperatura inicial,  $T_k$  a temperatura na  $k$ -ésima iteração e  $\beta$  um parâmetro para corrigir a imperfeição do resfriamento ( $0 < \beta < 1$ ).

# Simulated Annealing: Prescrições para determinar a temperatura inicial



## 1. Pela média dos custos das soluções vizinhas:

- Gerar uma solução inicial qualquer
- Gerar um certo número de vizinhos
- Para cada vizinho, calcular o respectivo custo
- Retornar como temperatura o maior custo das soluções vizinhas

## 2. Por simulação

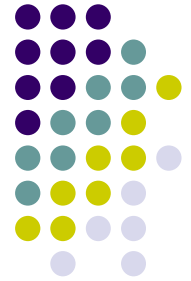
- Gerar uma solução inicial qualquer
- Partir de uma temperatura inicial baixa
- Contar quantos vizinhos são aceitos em  $S_{Amax}$  iterações nessa temperatura
- Se o número de vizinhos aceitos for alto (por exemplo, 95%) retornar a temperatura corrente como a temperatura inicial para o método
- Caso contrário, aumentar a temperatura (por exemplo, em 10%) e repetir o processo

# Determinação da temperatura inicial por simulação



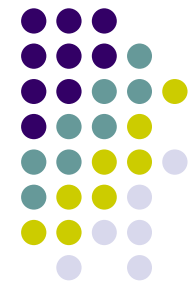
```
procedimento TemperaturaInicial( $\beta, \gamma, SA_{max}, T_0, s$ )
1   $T \leftarrow T_0$ ;           {Temperatura corrente}
2   $Continua \leftarrow TRUE$ ;
3  enquanto ( $Continua$ ) faça
4       $Aceitos \leftarrow 0$ ; {Vizinhos aceitos na temp. T}
5      para  $IterT = 1$  até  $SA_{max}$  faça
6          Gere um vizinho qualquer  $s' \in N(s)$ ;
7           $\Delta = f(s') - f(s)$ ;
8          se ( $\Delta < 0$ )
9              então
10                  $Aceitos \leftarrow Aceitos + 1$ ;
11             senão
12                 Tome  $x \in [0, 1]$ ;
13                 se ( $x < e^{-\Delta/T}$ ) então  $Aceitos++$ ;
14             fim-se;
15         fim-para;
16         se ( $Aceitos \geq \gamma \times SA_{max}$ )
17             então  $Continua \leftarrow FALSE$ ;
18             senão  $T \leftarrow \beta \times T$ ;
19         fim-se;
20 fim-enquanto;
21 Retorne  $T$ ;
fim TemperaturaInicial;
```

## Simulated Annealing: Considerações Gerais



- Número máximo de iterações em uma dada temperatura calculado com base na dimensão do problema;
- Temperatura de congelamento do sistema: quando se atingir, p.ex.,  $T = 0,001$  ou quando a taxa de aceitação de movimentos cair abaixo de um valor predeterminado;
- Os parâmetros mais adequados para uma dada aplicação só podem ser obtidos por experimentação.

# Resultados Computacionais do Problema de Seleção de Projetos



- Parâmetros do AG

| Parâmetro                                 | Valor |
|-------------------------------------------|-------|
| Geração de populações                     | 200   |
| Número de indivíduos em cada nova geração | 20    |
| Probabilidade de Mutação                  | 4%    |
| Probabilidade de Crossover                | 50%   |

- Parâmetros do SA

| Parâmetro                       | Valor                |
|---------------------------------|----------------------|
| $SA_{max}$                      | 500                  |
| Temperatura inicial             | Obtida por simulação |
| $\alpha$ (taxa de resfriamento) | 0.99                 |



# Resultados Computacionais do Problema de Seleção de Projetos



- Meta de produção e penalidades por desvios de meta

| Parâmetro            | Valor     |
|----------------------|-----------|
| meta de produção (M) | 90 Mt     |
| Pexc                 | \$15,00/t |
| Pfalta               | \$3,00/t  |

# Resultados Computacionais do Problema de Seleção de Projetos

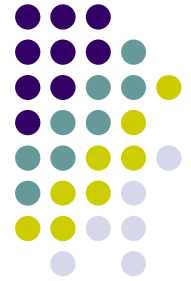


- Microcomputador PC AMD Durom, 900 MHz, 128 MB RAM
- LINGO versão 7.0
- SA e SA+Subida desenvolvidos em Borland C++ 5.0
- Algoritmos Genéticos: linguagem e equipamento não especificados

| Método    | Melhor VPL<br>(\$X10 <sup>6</sup> ) | VPL Médio<br>(\$X10 <sup>6</sup> ) | Tempo Médio<br>de execução<br>(segundos) |
|-----------|-------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------------|
| AG        | 2015                                | -                                  | 2,03                                     |
| SA        | 2167                                | 2165                               | 2,99                                     |
| SA+Subida | 2180                                | 2180                               | 2,99                                     |
| Lingo     | 2148                                | -                                  | 0,00                                     |

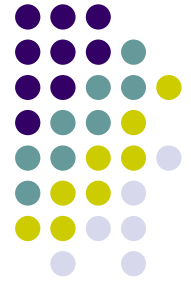
Solução ótima: 2180 (obtida por enumeração completa, em 180 segundos)<sup>298</sup>

# ***Variable Neighborhood Descent (VND)***



- Proposto por Nenad Mladenovic & Pierre Hansen em 1997
- Método de Descida em Vizinhaça Variável
- Explora o espaço de soluções através de trocas sistemáticas de estruturas de vizinhaça
- Explora vizinhaças gradativamente mais “distantes”
- Sempre que há melhora em uma certa vizinhaça, retorna-se à vizinhaça “menos distante”

# ***Variable Neighborhood Descent (VND)***



- Princípios básicos:
  - Um ótimo local com relação a uma vizinhança não necessariamente corresponde a um ótimo com relação a outra vizinhança
  - Um ótimo global corresponde a um ótimo local para todas as estruturas de vizinhança
  - Para muitos problemas, ótimos locais com relação a uma vizinhança são relativamente próximos

# Variable Neighborhood Descent (VND)

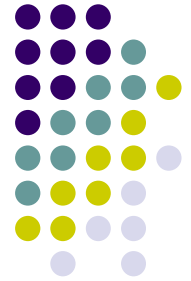


```
1  Seja  $s_0$  uma solução inicial e  $r$  o número de estruturas de
   vizinhança;
2   $s \leftarrow s_0$ ;                                {Solução corrente}
3   $k \leftarrow 1$ ;                                {Tipo de estrutura de vizinhança}
4  enquanto ( $k \leq r$ ) faça
5      Encontre o melhor vizinho  $s' \in N^{(k)}(s)$ ;
6      se (  $f(s') < f(s)$  )
7          então  $s \leftarrow s'$ ;  $k \leftarrow 1$ ;
8          senão  $k \leftarrow k + 1$ ;
9      fim-se;
10 fim-enquanto;
11 Retorne  $s$ ;
fim VND;
```

# *Iterated Local Search (ILS)*

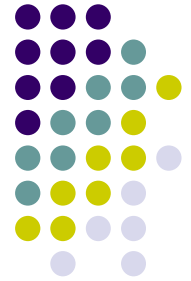


- Pressuposto:
  - Os ótimos locais de um problema de otimização podem ser gerados a partir de perturbações na solução ótima local corrente
- A perturbação precisa ser suficientemente forte para permitir que a busca local explore diferentes soluções e fraca o suficiente para evitar um reinício aleatório



# *Iterated Local Search (ILS)*

- Componentes do ILS:
  - GeraSolucaoInicial:
  - BuscaLocal:
    - Retorna uma solução melhorada
  - Perturbacao:
    - Modifica a solução corrente guiando a uma solução intermediária
  - CriterioAceitacao:
    - Decide de qual solução a próxima perturbação será aplicada



# *Iterated Local Search (ILS)*

## **procedimento ILS**

$s_0 \leftarrow \text{SolucaoInicial}$

$s \leftarrow \text{BuscaLocal}(s_0)$

$\text{iter} \leftarrow 0$

**enquanto** ( $\text{iter} < \text{iter}_{\max}$ )

$\text{iter} \leftarrow \text{iter} + 1$

$s' \leftarrow \text{perturbação}(s, \text{histórico})$

$s'' \leftarrow \text{BuscaLocal}(s')$

$s \leftarrow \text{CritérioAceitacao}(s, s', s'')$

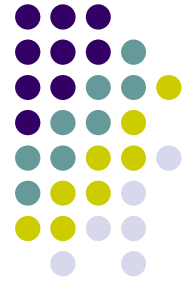
**fim-enquanto**

**retorne**  $s$





# *Iterated Local Search (ILS)*



- Combina intensificação com diversificação
- Intensificação:
  - É obtida fazendo-se “pequenas” perturbações na solução ótima corrente
- Diversificação:
  - É obtida aplicando-se “grandes” perturbações na solução ótima corrente

# ILS aplicado ao Planejamento Operacional de Lavra com Alocação Dinâmica de Caminhões



- Utiliza 20 níveis de perturbação;
  - Cada nível  $n$  consiste em realizar  $n$  diferentes movimentos de forma aleatória
- Busca Local:  
Método VND (*Variable Neighborhood Search*)
- Critério de Parada:  
Tempo de processamento pré-determinado

# ILS aplicado ao Planejamento Operacional de Lavra com Alocação Dinâmica de Caminhões



## Problemas-teste:

- Situações reais em mineradoras;

| Instâncias | Nº De Frentes | Nº de Parâmetros de Controles | Nº de Carregadeiras | Nº de Caminhões |
|------------|---------------|-------------------------------|---------------------|-----------------|
| POLAD1     | 17            | 10                            | 8                   | 30              |
| POLAD2     | 17            | 10                            | 8                   | 30              |
| POLAD3     | 32            | 10                            | 7                   | 30              |
| POLAD4     | 32            | 10                            | 7                   | 30              |

# ILS aplicado ao Planejamento Operacional de Lavra com Alocação Dinâmica de Caminhões

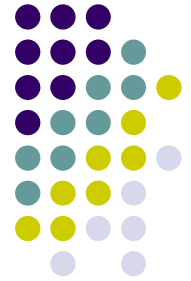
## Desempenho do Algoritmo ILS:



| Instância | Procedimento I                                   |                         |          | Procedimento II         |          |         |
|-----------|--------------------------------------------------|-------------------------|----------|-------------------------|----------|---------|
|           | $f_1^{\text{PM}}(s^*)$                           | $f_1^{\text{ILS}}(s^*)$ | $Dp$ (%) | $f_2^{\text{ILS}}(s^*)$ | $Dp$ (%) | $Tempo$ |
| POLAD01   | 216,80 <sup>(1)</sup><br>216,80 <sup>(2)</sup>   | 211,99                  | 0,0      | 2638,83                 | 0,2      | 789,2   |
| POLAD02   | 2751,79 <sup>(1)</sup><br>2751,79 <sup>(2)</sup> | 2731,71                 | 0,0      | 5248,99                 | 0,1      | 822,1   |
| POLAD03   | 1962,90 <sup>(1)</sup><br>1584,50 <sup>(2)</sup> | 585,30                  | 80,6     | 3736,94                 | 71,0     | 842,1   |
| POLAD04   | 3021,83 <sup>(1)</sup><br>2706,45 <sup>(3)</sup> | 2706,45                 | 3,6      | 59795,83                | 0,1      | 819,4   |

<sup>(1)</sup> Melhor solução em 15 minutos de processamento; <sup>(2)</sup> Melhor solução em 240 minutos;

<sup>(3)</sup> Solução ótima, obtida em 80 minutos de processamento.



# Algoritmos Genéticos

- ✓ Os AGs fundamentam-se em uma analogia com processos naturais de evolução, nos quais, dada uma população, os indivíduos com características genéticas melhores **têm maiores chances de sobrevivência** e de produzirem filhos cada vez mais aptos, enquanto indivíduos menos aptos **tendem a desaparecer**
- ✓ As características dos indivíduos, registradas em seus genes, são transmitidas para seus descendentes e tendem a propagar-se por novas gerações
- ✓ Características dos descendentes são parcialmente herdadas de seus pais (**Crossover**) e parcialmente de novos genes criados durante o processo de reprodução (**Mutação**)

# Operadores genéticos

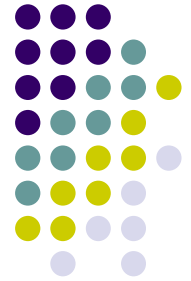


*CROSSOVER*



*MUTAÇÃO*





# Algoritmos Genéticos

- O objetivo de um AG é o de **tentar melhorar as qualidades genéticas** de uma população através de um processo de renovação iterativa das populações

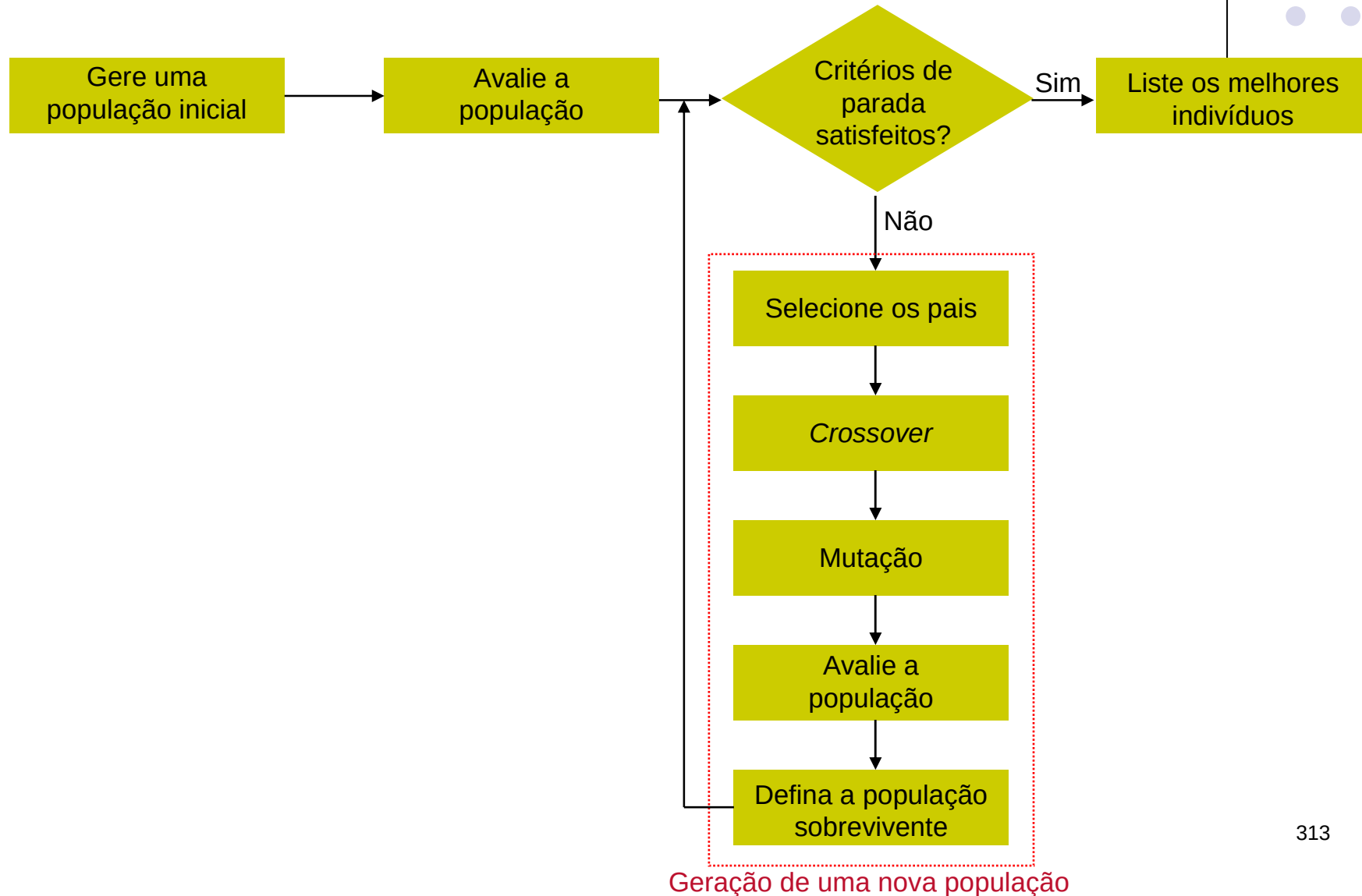
# Relação entre AG e Problema de Otimização

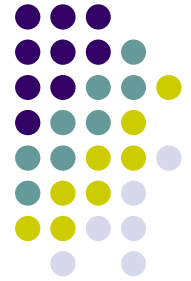


| AG                  | Problema de Otimização                |
|---------------------|---------------------------------------|
| Indivíduo           | Solução de um problema                |
| População           | Conjunto de soluções                  |
| Cromossomo          | Representação de uma solução          |
| Gene                | Parte da representação de uma solução |
| Alelos              | Valores que uma variável pode assumir |
| Crossover / Mutação | Operadores de busca                   |



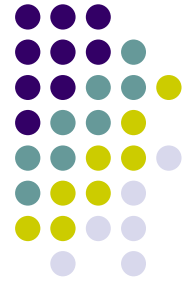
# Estrutura de um AG básico





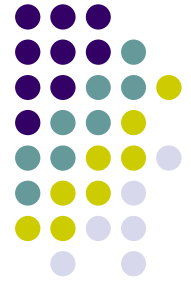
# Avaliação de cromossomos

- Feita pela função de aptidão (*fitness*)
- Em um problema de maximização pode ser a própria função objetivo
- Em um problema de minimização pode ser o inverso da função objetivo



# Fase de seleção

- *Binary tournament selection:*
  - Selecionar dois indivíduos aleatoriamente
  - O primeiro pai é o indivíduo com maior aptidão
  - Selecionar, aleatoriamente, outros dois pais
  - O segundo pai é o indivíduo com maior aptidão nessa nova seleção
- Aleatório
- Roleta russa



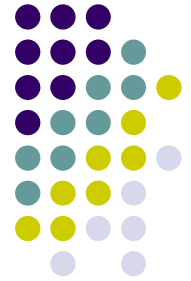
# Fase de reprodução

- Dois ou mais cromossomos passam por um processo de mutação e/ou recombinação para gerar novos cromossomos filhos (*offsprings*)
- Operador mutação clássico

$$p = ( 0 \ 1 \ 0 \ 1 )$$



$$p = ( 0 \ 1 \ 1 \ 1 )$$



# Fase de reprodução

- Operador crossover clássico (one point crossover):
- Descendentes são formados a partir da reunião de segmentos de cada pai

$$p_1 = ( 0 \ 1 \ 1 \mid 1 \ 0 \ 0 )$$

$$p_2 = ( 1 \ 0 \ 1 \mid 0 \ 1 \ 0 )$$



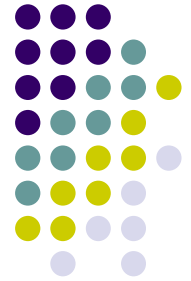
$$O_1 = ( 0 \ 1 \ 1 \mid 0 \ 1 \ 0 )$$

$$O_2 = ( 1 \ 0 \ 1 \mid 1 \ 0 \ 0 )$$

# Operador *crossover* para o PCV

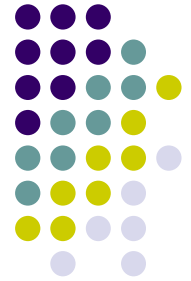


- Operador OX
  - Operador crossover de dois pontos de corte
  - Cruzamento entre os pais geram dois filhos
  - Filhos herdam a ordem de visita dos pais



# Operador OX para o PCV

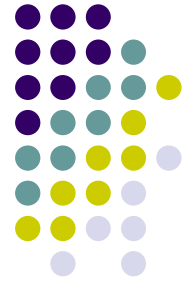
- $p_1 = (6 \ 3 \ 8 \mid 2 \ 4 \ 1 \mid 5 \ 7 \ 9)$
- $p_2 = (1 \ 2 \ 7 \mid 4 \ 6 \ 5 \mid 8 \ 9 \ 3)$
- $f_1 = (x \ x \ x \mid 2 \ 4 \ 1 \mid x \ x \ x)$
- Ordem de visita de  $p_2 = \{8, 9, 3, 1, 2, 7, 4, 6, 5\}$



# Operador OX para o PCV

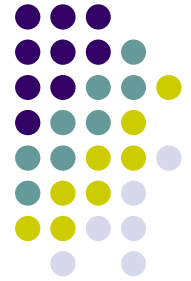
- $p_1 = (6 \ 3 \ 8 \mid 2 \ 4 \ 1 \mid 5 \ 7 \ 9)$
- $p_2 = (1 \ 2 \ 7 \mid 4 \ 6 \ 5 \mid 8 \ 9 \ 3)$
- $f_1 = (x \ x \ x \mid 2 \ 4 \ 1 \mid x \ x \ x)$
- Ordem de visita de  $p_2 = \{8, 9, 3, \cancel{1}, \cancel{2}, 7, \cancel{4}, 6, 5\}$





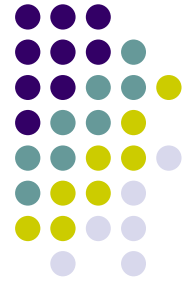
# Operador OX para o PCV

- $p_1 = (6 \ 3 \ 8 \mid 2 \ 4 \ 1 \mid 5 \ 7 \ 9)$
- $p_2 = (1 \ 2 \ 7 \mid 4 \ 6 \ 5 \mid 8 \ 9 \ 3)$
- $f_1 = (x \ x \ x \mid 2 \ 4 \ 1 \mid x \ x \ x)$
- Ordem de visita de  $p_2 = \{8, 9, 3, \cancel{1}, \cancel{2}, 7, \cancel{4}, 6, 5\}$
- $f_1 = (x \ x \ x \mid 2 \ 4 \ 1 \mid 8 \ x \ x)$



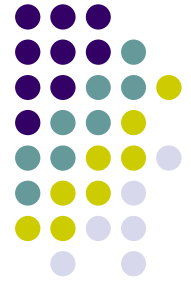
# Operador OX para o PCV

- $p_1 = (6 \ 3 \ 8 \mid 2 \ 4 \ 1 \mid 5 \ 7 \ 9)$
- $p_2 = (1 \ 2 \ 7 \mid 4 \ 6 \ 5 \mid 8 \ 9 \ 3)$
- $f_1 = (x \ x \ x \mid 2 \ 4 \ 1 \mid x \ x \ x)$
- Ordem de visita de  $p_2 = \{8, 9, 3, 1, 2, 7, 4, 6, 5\}$
- $f_1 = (x \ x \ x \mid 2 \ 4 \ 1 \mid 8 \ 9 \ x)$



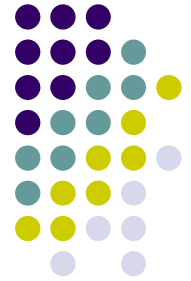
# Operador OX para o PCV

- $p_1 = (6 \ 3 \ 8 \mid 2 \ 4 \ 1 \mid 5 \ 7 \ 9)$
- $p_2 = (1 \ 2 \ 7 \mid 4 \ 6 \ 5 \mid 8 \ 9 \ 3)$
- $f_1 = (x \ x \ x \mid 2 \ 4 \ 1 \mid x \ x \ x)$
- Ordem de visita de  $p_2 = \{\cancel{8}, \cancel{9}, 3, \cancel{1}, \cancel{2}, 7, \cancel{4}, 6, 5\}$
- $f_1 = (x \ x \ x \mid 2 \ 4 \ 1 \mid 8 \ 9 \ 3)$



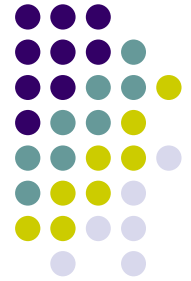
# Operador OX para o PCV

- $p_1 = (6 \ 3 \ 8 \mid 2 \ 4 \ 1 \mid 5 \ 7 \ 9)$
- $p_2 = (1 \ 2 \ 7 \mid 4 \ 6 \ 5 \mid 8 \ 9 \ 3)$
- $f_1 = (x \ x \ x \mid 2 \ 4 \ 1 \mid x \ x \ x)$
- Ordem de visita de  $p_2 = \{\cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{3}, \cancel{1}, \cancel{2}, 7, \cancel{4}, 6, 5\}$
- $f_1 = (7 \ x \ x \mid 2 \ 4 \ 1 \mid 8 \ 9 \ 3)$



# Operador OX para o PCV

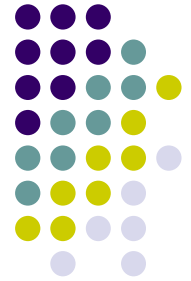
- $p_1 = (6 \ 3 \ 8 \mid 2 \ 4 \ 1 \mid 5 \ 7 \ 9)$
- $p_2 = (1 \ 2 \ 7 \mid 4 \ 6 \ 5 \mid 8 \ 9 \ 3)$
- $f_1 = (x \ x \ x \mid 2 \ 4 \ 1 \mid x \ x \ x)$
- Ordem de visita de  $p_2 = \{\cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{3}, \cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{7}, \cancel{4}, 6, 5\}$
- $f_1 = (7 \ 6 \ x \mid 2 \ 4 \ 1 \mid 8 \ 9 \ 3)$



# Operador OX para o PCV

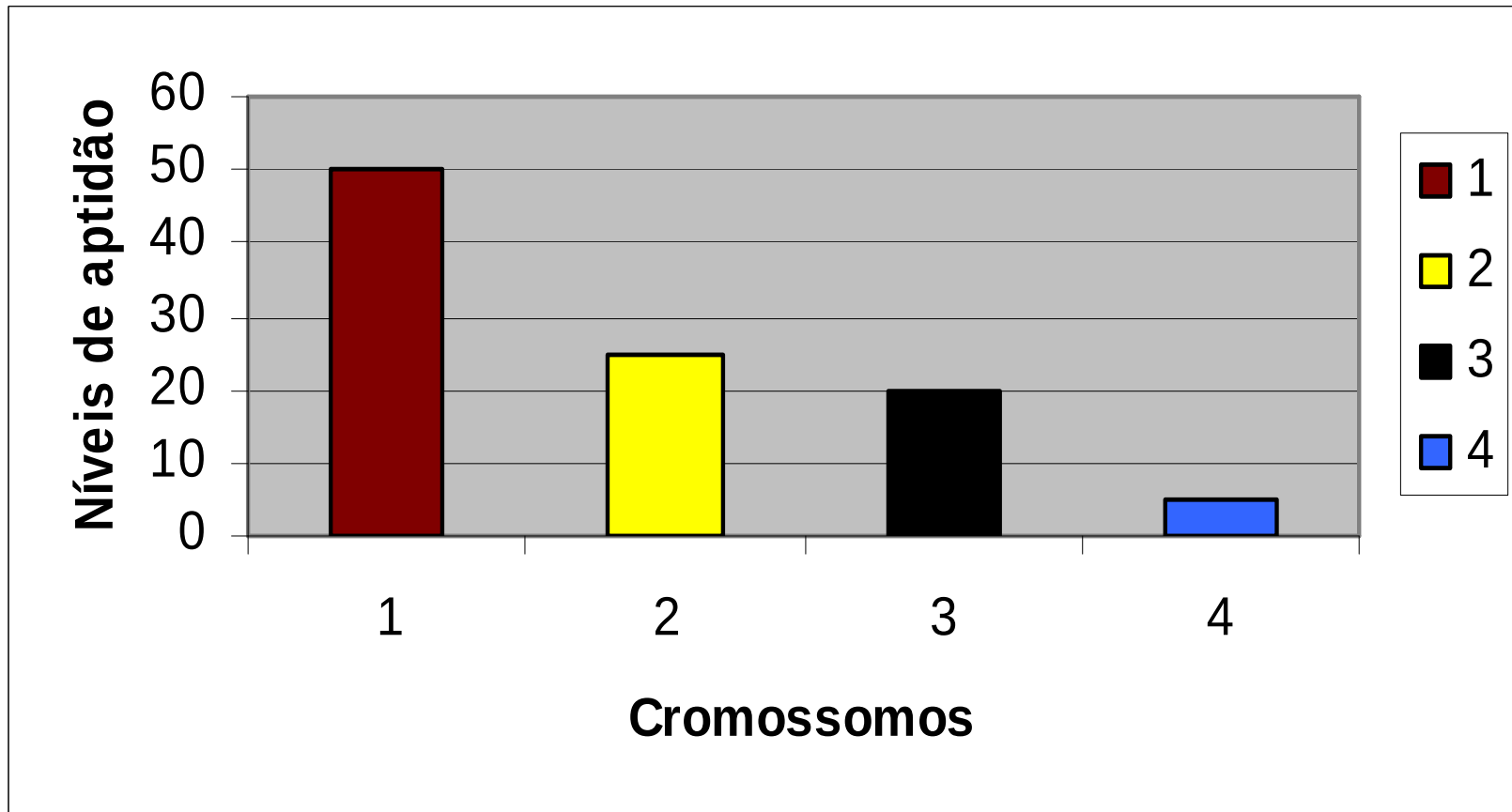
- $p_1 = (6 \ 3 \ 8 \mid 2 \ 4 \ 1 \mid 5 \ 7 \ 9)$
- $p_2 = (1 \ 2 \ 7 \mid 4 \ 6 \ 5 \mid 8 \ 9 \ 3)$
- $f_1 = (x \ x \ x \mid 2 \ 4 \ 1 \mid x \ x \ x)$
- Ordem de visita de  $p_2 = \{\cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{3}, \cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{7}, \cancel{4}, \cancel{6}, 5\}$
- $f_1 = (7 \ 6 \ 5 \mid 2 \ 4 \ 1 \mid 8 \ 9 \ 3)$

# Sobrevivência / morte de cromossomos



- Como selecionamos os cromossomos que devem sobreviver?
- Sobrevivem os que possuem os melhores níveis de aptidão?
- É importante permitir também a sobrevivência de cromossomos menos aptos, do contrário o método ficaria preso em ótimos locais
- Elitismo

# Seleção de cromossomos sobreviventes





# Roleta russa:

mecanismo para selecionar os cromossomos sobreviventes

