3^a Lista de Exercícios de Métodos Numéricos e Estatísticos

Obs.: Entregar dia / /2004.

(1) Equilibrar a reação química:
$K_2Cr_2O_7 + FeSO_4 + HCl \rightarrow KCl + CrCl_3 + FeCl_3 + Fe_2(SO_4)_3 + H_2O$

Sugestão: Atribua coeficientes x_i às substâncias que aparecem na equação. Como pela Lei de Lavoisier, em uma reação química a soma das massas dos reagentes é igual à soma das massas dos produtos resultantes, então iguale a quantidade de cada elemento químico que aparece no lado esquerdo da equação à quantidade desse mesmo elemento que aparece no lado direito da equação. Esse procedimento, feito para cada elemento químico, resultará em um sistema de equações lineares, onde as incógnitas são os coeficientes estequiométricos x_i da reação química. No caso de haver mais incógnitas do que equações, atribui-se um valor qualquer a uma delas. Caso a solução do sistema seja fracionária, multiplique-a pelo determinante do sistema. Isto fará com que todas as soluções sejam inteiras.

(2) Dado o sistema linear $Ax = b$ abaixo, pede-se:

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -10 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(a) Determinar a matriz de iteração de Jacobi e seu raio espectral.
(b) Determinar a matriz de iteração de Gauss-Seidel e seu raio espectral.
(c) Podemos resolver o sistema dado pelo Método de Jacobi? Justifique.
(d) Podemos resolver o sistema dado pelo Método de Gauss-Seidel? Justifique.
(e) Nesse exemplo, qual dos dois métodos iterativos convergirá mais rapidamente para a solução do sistema? Justifique.

(3) Determinar, por qualquer método numérico, o vetor solução do sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} (1+i)x_1 + ix_2 + x_3 = 1 + 4i \\ -x_1 - 2ix_2 + (1+2i)x_3 = -1 - 2i \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 - i \end{cases}$$

(4) Verificar se o sistema abaixo é mal condicionado:

$$\begin{cases} 3,81x_1 + 0,25x_2 + 1,28x_3 + 0,80x_4 = 4,21 \\ 2,25x_1 + 1,32x_2 + 5,08x_3 + 0,49x_4 = 6,97 \\ 5,31x_1 + 6,78x_2 + 0,98x_3 + 1,04x_4 = 2,38 \\ 9,89x_1 + 2,45x_2 + 3,35x_3 + 2,28x_4 = 10,98 \end{cases}$$

(5) Para os itens a seguir, considere o seguinte sistema linear $Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 50 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(a) Mostrar que o sistema pode ser resolvido por um método iterativo.

(b) Resolvê-lo pelo Método de Gauss-Seidel com precisão $\varepsilon < 10^{-2}$, em um máximo de 5 iterações.

(c) Resolvê-lo pelo Método da Decomposição LU, com pivotação parcial. Mostrar a matriz triangular inferior L, a triangular superior U e a matriz de permutação P. Avaliar o resíduo produzido.

(d) Calcular o determinante da matriz dos coeficientes como subproduto do Método da Decomposição LU com pivotação parcial.

(6) Seja o diagrama de circuito dado pela Figura 1:

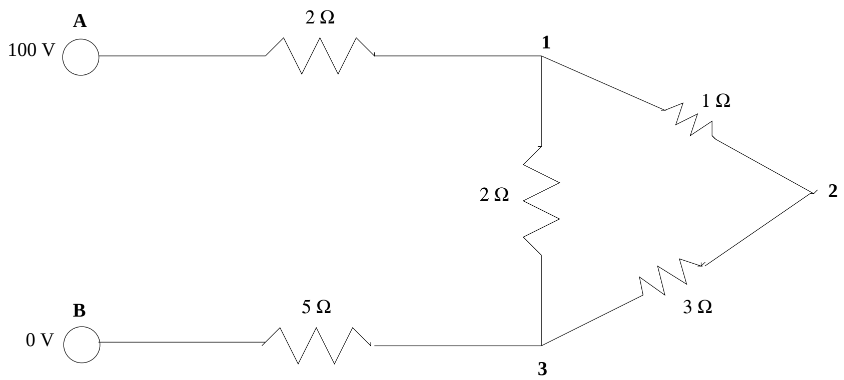

Figura 1: Diagrama de circuito de uma rede elétrica

Pela Lei de Ohm, a corrente que flui do nó p para o nó q de uma rede elétrica é calculada com base na fórmula $I_{pq} = \frac{V_p - V_q}{R_{pq}}$, com I em ampères e R em Ohms, sendo V_p e V_q as voltagens nos nós p e q, respectivamente, e R_{pq} a resistência no arco pq.

Pela Lei de Kirchoff, a soma das correntes que chegam a cada nó é nula; assim, as equações que relacionam as voltagens podem ser obtidas.

Para o diagrama de circuito considerado, pede-se:

(a) Obter as equações dos nós 1, 2 e 3;

(b) Resolver o sistema formado pelas equações do item anterior por qualquer método numérico a fim de se obter as voltagens em cada nó do circuito.

(7) A tabela a seguir fornece o número de habitantes do Brasil (em milhões) desde 1872.

Ano	1872	1890	1900	1920	1940	1950	1960	1970	1980
Habitantes	9.9	14.3	17.4	30.6	41.2	51.9	70.9	93.1	130

Faça o diagrama de dispersão e determine a curva que melhor se ajusta aos pontos tabelados. A partir da curva obtida, estime o número de habitantes no Brasil em 1985.

(8) A tabela a seguir mostra a tensão t (ton.cm^{-2}) em uma barra de aço, para diferentes níveis de deformação d (adimensional):

i	$d \times 10^3$	t (ton.cm^{-2})
1	0.15	0.586
2	0.52	1.253
3	0.76	1.946
4	1.01	2.394
5	1.12	2.716
6	1.42	3.136
7	1.52	3.591
8	1.66	3.885
9	1.86	4.291
10	2.08	4.725
11	2.27	5.047
12	2.56	5.383
13	2.86	5.845
14	3.19	6.223

(a) Faça o diagrama de dispersão dos pontos desta tabela

(b) Calcule o módulo de Young desta barra, sabendo que a relação entre a deformação d e a tensão t é dada por $t = E.d + t_0$, sendo E o módulo de Young e t_0 a pré-tensão.

(c) Verifique se o ajuste linear foi bom.