

# Equações Algébricas e Transcendentes

Marcone Jamilson Freitas Souza, Departamento de Computação, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, 35400-000 Ouro Preto, MG, Brasil. E-mail: marcone@iceb.ufop.br

## 1 Introdução

O objetivo deste capítulo é o de apresentar métodos numéricos para resolver uma equação  $f(x) = 0$ .

Resolver uma equação  $f(x) = 0$  significa encontrar números  $\xi_i$ , denominados raízes, tais que  $f(\xi_i) = 0$ . Geometricamente, conforme mostra a Figura 1, as raízes representam os pontos de interseção do gráfico de  $f$  com o eixo  $Ox$ .

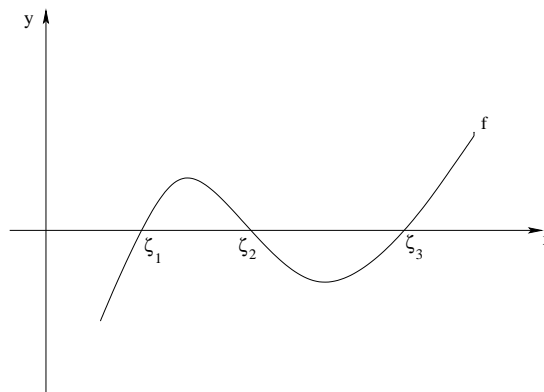


Figura 1: Raízes de uma equação

## 2 Fases na determinação de raízes

A determinação de raízes envolve as seguintes fases:

### 2.1 Fase I - Isolamento

Nesta fase o objetivo é o de determinar um intervalo  $[a, b]$ , o menor possível, que contenha uma única raiz.

Para cumprir este objetivo os métodos que apresentaremos a seguir apoiam-se em dois resultados do Cálculo Diferencial e Integral.

**Teorema de Cauchy-Bolzano** Seja  $f$  uma função contínua em um intervalo  $[a, b]$ . Se  $f(a) \times f(b) < 0$  então existe pelo menos um ponto  $\xi \in [a, b] : f(\xi) = 0$ .

**Resultado 2** Se  $f'$  preservar o sinal em  $[a, b]$  e o Teorema de Cauchy-Bolzano for verificado neste intervalo então a raiz  $\xi$  é única.

Assim, para isolarmos as raízes de uma equação  $f(x) = 0$  comumente utilizamos um dos seguintes procedimentos:

Procedimento I:

Esboçar o gráfico de  $f$ , determinando intervalos  $[x_i, x_{i+1}]$  que contenham uma única raiz.

Este objetivo pode ser cumprido gerando-se uma tabela de pontos  $(x_i, f(x_i))$ , onde os pontos inicial e final, bem como o valor do passo considerado  $(x_{i+1} - x_i)$ , dependerão do problema considerado e da experiência do usuário.

Exemplo: Isolar as raízes de  $f(x) = 2x - \cos x = 0$ .

Inicialmente, geremos uma tabela de pontos  $x_i, f(x_i)$ .

$x_i$	$f(x_i)$
$\vdots$	$\vdots$
-2	-3.58
-1	-2.54
0	-1
1	1.46
2	4.42
$\vdots$	$\vdots$

Como  $f(0) \times f(1) < 0 \implies \xi \in [0, 1]$ . Sendo  $f'(x) = 2x + \sin x > 0 \forall x \implies \xi$  é única.

Procedimento II:

Decompor a função  $f$ , se possível, na forma  $f = g - h$ , onde os gráficos de  $g$  e  $h$  sejam conhecidos e mais simples. Neste caso, os pontos de interseção dos gráficos de  $g$  e  $h$  representam as raízes de  $f(x) = 0$ .

Com efeito, sejam  $x_i$  os pontos de interseção dos gráficos de  $g$  e  $h$ . Logo:

$$g(x_i) = h(x_i) \implies g(x_i) - h(x_i) = 0 \quad (2.1)$$

Como  $f(x) = (g - h)(x) = g(x) - h(x) \forall x$  então:

$$g(x_i) - h(x_i) = f(x_i) \quad (2.2)$$

Sendo  $g(x_i) - h(x_i) = 0$  (equação 2.1), resulta pela equação 2.2 que  $f(x_i) = 0$ , isto é, os valores  $x_i$  são as raízes de  $f(x) = 0$ .

Exemplo: Isolar as raízes de  $f(x) = 2x - \cos x$ .

Inicialmente, façamos a decomposição da função  $f$  dada:

$$f(x) = 0 \iff 2x - \cos(x) = 0 \iff \underbrace{2x}_{g(x)} = \underbrace{\cos x}_{h(x)}$$

Esboçemos, a seguir, os gráficos das funções  $g(x) = 2x$  e  $h(x) = \cos x$ .

A partir da visualização gráfica e tendo em vista que  $f(0) \times f(\pi/2) = -\pi < 0$ , concluímos que existe uma raiz  $\xi \in [0, \pi/2]$ .

Exercícios

Isolar as raízes das seguintes equações:

- (a)  $f(x) = x^3 - 9x + 3 = 0$   
 (b)  $f(x) = x + \ln x = 0$   
 (c)  $f(x) = x \ln x - 1 = 0$   
 (d)  $f(x) = x^3 + 2 + 10^x = 0$   
 (e)  $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$   
 (f)  $f(x) = x^5 + 3x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12 = 0$

**2.2 Fase II - Refinamento**

Uma vez isolada uma raiz em um intervalo  $[a, b]$ , procura-se, nesta fase, considerar uma aproximação para a raiz e “melhorá-la” sucessivamente até se obter uma aproximação com a precisão requerida.

**3 Critérios de parada**

Dizemos que  $x_k$  é uma “boa” aproximação para a raiz  $\xi$  de uma equação  $f(x) = 0$  se os critérios abaixo forem satisfeitos:

- (i)  $|f(x_k)| < \varepsilon$   
 (ii)  $|x_k - \xi| < \varepsilon$

onde  $\varepsilon$  é a precisão (tolerância) admitida.

Observamos que estes dois critérios não são equivalentes. De fato:

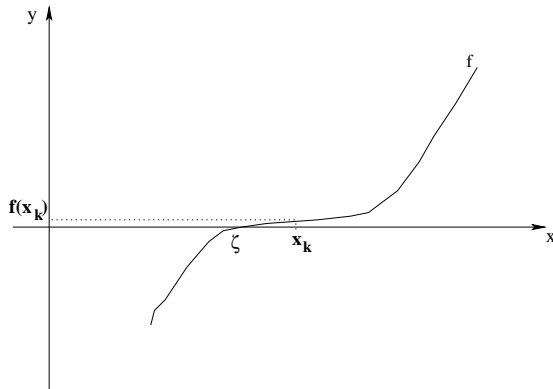


Figura 2: Caso (a)

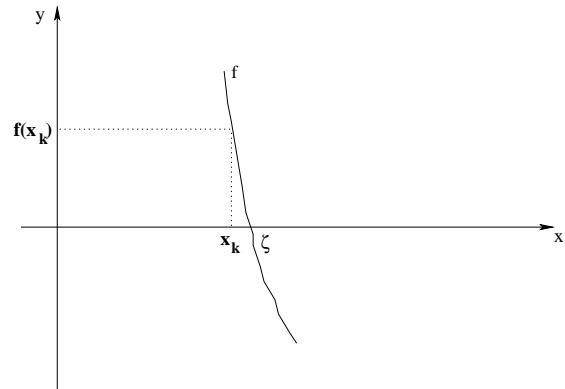


Figura 3: Caso (b)

No caso (a) temos  $|f(x_k)| < \varepsilon$  mas com  $|x_k - \xi| \gg \varepsilon$ . No caso (b), ao contrário, temos  $|x_k - \xi| < \varepsilon$  mas com  $|f(x_k)| \gg \varepsilon$ .

Desta forma, faz-se necessário impor os dois critérios. Por outro lado, como um determinado método pode não convergir em uma dada aplicação, é comum impor-se, também, um número máximo de iterações.

A questão que surge é: Como avaliar o critério de parada (ii) se não se conhece  $\xi$ ?

Para resolver esta questão a idéia é reduzir o intervalo  $[a, b]$  que contém a raiz  $\xi$  até que sua amplitude seja inferior à precisão requerida, isto é, até que  $b - a < \varepsilon$ .

Assim, sendo  $b - a < \varepsilon \implies \forall x_k \in [a, b]$  tem-se  $|x_k - \xi| < b - a < \varepsilon$ . Logo,  $|x_k - \xi| < \varepsilon$  e qualquer  $x_k \in [a, b]$  é uma boa aproximação para a raiz  $\xi$ .

## 4 Método da Bisseção

### 4.1 Introdução

A idéia do Método da Bisseção é reduzir o intervalo  $[a, b]$  que contém a raiz  $\xi$  dividindo-o ao meio a cada iteração.

### 4.2 Algoritmo

Apresentamos pela Figura 4 o pseudo-código do procedimento Bisseção.

```

procedimento Bissecao( $a, b, \varepsilon, ITERMAX, x$ );
1   $k \leftarrow 0$ ;
2   $x \leftarrow (a + b)/2$ ;
3  enquanto ( $(b - a \geq \varepsilon$  ou  $f(x) \geq \varepsilon$ ) e  $k \leq ITERMAX$ ) faça
4    se  $(f(a) \times f(x) < 0)$ 
5      então  $b \leftarrow x$ 
6      senão  $a \leftarrow x$ ;
7     $x \leftarrow (a + b)/2$ ;
8     $k \leftarrow k + 1$ ;
9  fim-enquanto;
10 se  $(k \leq ITERMAX)$ 
11   então Retorne  $x$  como aproximação para a raiz;
12   senão Imprima: Não foi obtida uma aproximação com a precisão
13         requerida em  $k$  iterações;
fim Bissecao;

```

Figura 4: Algoritmo do Método da Bisseção

### 4.3 Estimativa do número de iterações

Estimemos o número de iterações necessárias para obter uma aproximação  $x_k$  com uma precisão  $\varepsilon$  estabelecida a priori, utilizando-se o critério (ii) da seção 3,  $|x_k - \xi| < \varepsilon$ , como único critério de parada.

$$b_0 - a_0 = b - a$$

$$b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2 = (b - a)/2$$

$$b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)/2 = (b_0 - a_0)/4 = (b - a)/2^2$$

$\vdots$

$$b_k - a_k = (b - a)/2^k$$

Impondo  $b_k - a_k < \varepsilon$ , vem:

$$\frac{b-a}{2^k} < \varepsilon \implies \frac{b-a}{\varepsilon} < 2^k \implies 2^k > \frac{b-a}{\varepsilon} \implies \ln 2^k > \ln \frac{b-a}{\varepsilon} \implies k \ln 2 > \ln \frac{b-a}{\varepsilon}$$

Assim, o número mínimo de iterações necessárias para se calcular uma aproximação para a raiz de uma equação com precisão  $\varepsilon$  pode ser determinado pela expressão:

$$k > \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} \quad (4.3)$$

#### 4.4 Exemplo 1

Determinar o número de iterações necessárias para calcular a raiz de  $f(x) = 2x - \cos x = 0$  no intervalo  $[0, 1]$  com precisão  $\varepsilon < 0,01$ , utilizando-se  $|x_k - \xi| < \varepsilon$  como critério de parada.

Solução

Para o exemplo considerado temos:  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$ . Aplicando o resultado 4.3, vem:

$$k > \frac{\ln\frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2} = \frac{\ln\frac{1-0}{0,01}}{\ln 2} = 6,64$$

Como o número  $k$  de iterações é um número inteiro, resulta que  $k = 7$ .

#### 4.5 Exemplo 2

Determinar com precisão  $\varepsilon < 0,01$  e com um máximo de 10 iterações, a raiz da equação  $f(x) = 2x - \cos x = 0$ .

Solução:

(a) Isolamento da raiz:

Já foi visto que  $\xi \in [0, 1]$ .

(a) Refinamento da solução:

$k$	$a$	$b$	$x_k$	$f(x_k)$	$b - a$	Conclusão
0	0	1	0.500	0.122	1	$\xi \in [0.000, 0.500]$
1	0	0.500	0.250	-0.469	0.500	$\xi \in [0.250, 0.500]$
2	0.250	0.500	0.375	-0.181	0.250	$\xi \in [0.375, 0.500]$
3	0.375	0.500	0.438	-0.031	0.125	$\xi \in [0.438, 0.500]$
4	0.438	0.500	0.469	0.045	0.063	$\xi \in [0.438, 0.469]$
5	0.438	0.469	0.453	0.007	0.031	$\xi \in [0.438, 0.453]$
6	0.438	0.453	0.445	-0.012	0.016	$\xi \in [0.445, 0.453]$
7	0.445	0.453	0.449	-0.002	0.008	Pare! pois $b - a < \varepsilon$ e $ f(x_k)  < \varepsilon$

Na iteração 7, tanto a amplitude do intervalo  $[a, b]$  quanto a imagem, em módulo, de  $x_7$  são menores que a precisão requerida, isto é,  $b - a = 0.453 - 0.445 = 0.008 < \varepsilon = 0.01$  e  $|f(x_7)| = 0.008 < \varepsilon = 0.01$ . Desta forma, dizemos que  $x_7 = 0.449$  é uma aproximação para a raiz  $\xi$  da equação  $f(x) = 2x - \cos x = 0$  com uma precisão  $\varepsilon < 0.01$ .

##### 4.5.1 Vantagens e Desvantagens do Método da Bisseção

A maior vantagem do Método da Bisseção é que, para sua convergência, não há exigências com relação ao comportamento do gráfico de  $f$  no intervalo  $[a, b]$ .

Entretanto, ele não é eficiente devido à sua convergência lenta. Pode ser observado que  $f(x)$  não decresce monotonicamente. Isto decorre do fato de que na escolha de uma aproximação  $x = \frac{a+b}{2}$  não se leva em consideração os valores da função nos extremos do intervalo. No pior caso, a raiz  $\xi$  está próxima a um extremo.

O Método da Bisseção é mais usado para reduzir o intervalo antes de usar um outro método de convergência mais rápida.

## 5 Método da Falsa Posição

### 5.1 Introdução

Seja  $f$  uma função contínua em um intervalo  $[a, b]$  tal que  $f(a) \times f(b) < 0$ .

A idéia deste método é a de tomar como aproximação  $x$  para a raiz  $\xi$  no intervalo  $[a, b]$  a média ponderada entre os extremos  $a$  e  $b$  com pesos  $|f(b)|$  e  $|f(a)|$ , respectivamente. Isto é:

$$x = \frac{a \times |f(b)| + b \times |f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} \quad (5.4)$$

Desta forma,  $x$  estará mais próximo do extremo cuja imagem for menor.

Como  $f(a)$  e  $f(b)$  têm valores de sinais contrários, então temos dois casos a considerar:

(i)  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$

Neste caso,  $|f(a)| = -f(a)$  e  $|f(b)| = f(b)$ . Logo:

$$x = \frac{a \times |f(b)| + b \times |f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} = \frac{a \times f(b) - b \times f(a)}{f(b) - f(a)}$$

(ii)  $f(a) > 0$  e  $f(b) < 0$

Neste caso,  $|f(a)| = f(a)$  e  $|f(b)| = -f(b)$ . Logo:

$$x = \frac{a \times |f(b)| + b \times |f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} = \frac{-a \times f(b) + b \times f(a)}{-f(b) + f(a)} = \frac{a \times f(b) - b \times f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Observamos que em ambos os casos tem-se, portanto:

$$x = \frac{a \times f(b) - b \times f(a)}{f(b) - f(a)} \quad (5.5)$$

Neste método, as aproximações são geradas conforme a expressão 5.5 garantindo-se, a cada iteração, que elas estejam no intervalo  $[a, b]$  cujos extremos tenham valores de sinais contrários.

### 5.2 Interpretação geométrica

O número  $x$  dado pela fórmula 5.5 representa o ponto de interseção da reta que passa pelos pontos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$  com o eixo  $Ox$ .

De fato, a equação da reta que passa pelos pontos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$  é:

$$\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo este determinante, obtemos:

$$xf(a) + bf(x) + af(b) - bf(a) - af(x) - xf(b) = 0$$

$$x(f(a) - f(b)) + (b - a)f(x) + af(b) - bf(a) = 0$$

$$x = \frac{(b-a)f(x) + bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)}$$

No ponto de interseção dessa reta com o eixo  $Ox$  tem-se  $f(x)=0$ . Logo:

$$x = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)}$$

Multiplicando numerador e denominador por  $-1$  resulta a expressão:

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Observamos que o Método da Falsa Posição procura gerar, a cada iteração, uma aproximação  $x_k$  para a raiz  $\xi$  cuja imagem seja a menor possível, isto é, uma aproximação tal que  $|f(x_k)| < \varepsilon$ , sem se preocupar com a diminuição da amplitude  $(b - a)$  do intervalo  $[a, b]$  que contém a raiz.

A Figura 5 ilustra como funciona o método.

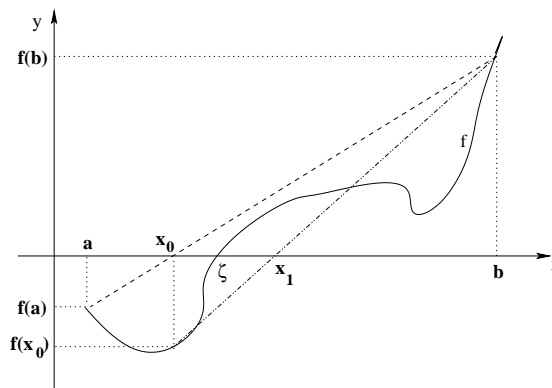


Figura 5: Interpretação geométrica do Método da Falsa Posição

### 5.3 Convergência

**Teorema 1** Seja  $f$  contínua em um intervalo  $[a, b]$  tal que  $f(a) \times f(b) < 0$ . Se, além disso:

- (i)  $f'$  preservar o sinal e não se anular em  $[a, b]$ ;
- (ii)  $m = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ ;
- (iii)  $M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ ;

$$\text{Então: } |x_k - \xi| < \frac{M-m}{m} |x_k - x_{k-1}|$$

Desta forma, se fizermos  $|x_k - x_{k-1}| < \frac{\varepsilon}{\frac{M-m}{m}}$  obteremos  $|x_k - \xi| < \varepsilon$ , isto é, o critério (ii) da seção 3 pode ser satisfeito impondo-se  $|x_k - x_{k-1}| < \frac{\varepsilon}{\frac{M-m}{m}}$ .

Entretanto, como na prática o cálculo dos limitantes inferior e superior da derivada primeira de  $f$  no intervalo  $[a, b]$  não é uma tarefa das mais simples (assim como verificar a satisfação ao item (i) do Teorema 1), é comum impor-se apenas que  $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$  seja utilizado como critério substituto do mecanismo de parada (ii) da seção 3. Observamos, entretanto, que com essa imposição, nem sempre o Teorema 1 será atendido. Assim, não haverá garantia de que a solução  $x_k$  difira da raiz  $\xi$  de  $\varepsilon$ .

**Teorema 2** Se  $f$  é uma função contínua em um intervalo  $[a, b]$  e  $f(a) \times f(b) < 0$  então o Método da Falsa Posição converge.

Observamos que se  $f''$  preservar o sinal em  $[a, b]$ , um dos extremos se manterá fixo durante o processo iterativo. Há 4 casos a analisar: (1)  $f''(x) > 0 \ \forall x \in [a, b]$ ,  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ ; (2)  $f''(x) < 0 \ \forall x \in [a, b]$ ,  $f(a) > 0$  e  $f(b) < 0$ ; (3)  $f''(x) > 0 \ \forall x \in [a, b]$ ,  $f(a) > 0$  e  $f(b) < 0$  e (4)  $f''(x) < 0 \ \forall x \in [a, b]$ ,  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ . Nos dois primeiros casos, o extremo direito  $b$  do intervalo será fixo, enquanto que nos dois últimos casos, o ponto fixo será o extremo esquerdo  $a$ .

## 5.4 Algoritmo

Apresentamos pela Figura 6 o pseudo-código do procedimento Falsa Posição. Este procedimento considera os critérios  $|f(x_k)| < \varepsilon$  e  $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$  como mecanismos de parada.

```

procedimento FalsaPosicao( $a, b, \varepsilon, ITERMAX, x$ );
1   $k \leftarrow 0$ ;
2   $x_{\text{ant}} \leftarrow a$ ;
3   $x \leftarrow \frac{a \times f(b) - b \times f(a)}{f(b) - f(a)}$ ;
4  enquanto ( $(|x - x_{\text{ant}}| \geq \varepsilon$  ou  $|f(x)| \geq \varepsilon$ ) e  $k \leq ITERMAX$ ) faça
5    se ( $f(a) \times f(x) < 0$ )
6      então  $b \leftarrow x$ 
7      senão  $a \leftarrow x$ ;
8     $x_{\text{ant}} \leftarrow x$ ;
9     $x \leftarrow \frac{a \times f(b) - b \times f(a)}{f(b) - f(a)}$ ;
10    $k \leftarrow k + 1$ ;
11 fim-enquanto;
12 se ( $k \leq ITERMAX$ )
13   então Retorne  $x$  como aproximação para a raiz;
14   senão Imprima: Não foi obtida uma aproximação com a precisão
15           requerida em  $k$  iterações;
fim FalsaPosicao;

```

Figura 6: Algoritmo do Método da Falsa Posição

## 5.5 Exemplo

Determinar, com erro  $\varepsilon < 0,01$ , a raiz da equação  $f(x) = 2x - \cos x = 0$  no intervalo  $[0, 1]$ .

Solução:

Gerando as aproximações  $x_k$  segundo a expressão 5.6, obteremos a seguinte tabela:

$k$	$a$	$b$	$x_k$	$f(x_k)$	$ x_k - x_{k-1} $	Conclusão
0	0	1	-	-0.105	0.407	$\xi \in [0.407, 1.000]$
1	0.407	1.000	0.447	-0.009	0.040	$\xi \in [0.447, 1.000]$
2	0.447	1.000	0.450	-0.001	0.003	Pare! pois $ f(x_2)  < 0.01$ e $ x_2 - x_1  < \varepsilon$

Logo,  $x_2 = 0.450$  é uma aproximação para a raiz  $\xi$  da equação  $f(x) = 2x - \cos x = 0$  com uma precisão  $\varepsilon < 0.01$ .



## 5.6 Vantagens e Desvantagens do Método da Falsa Posição

A grande vantagem do Método da Falsa Posição é que ela é uma técnica robusta, que converge independentemente da forma do gráfico de  $f$  no intervalo  $[a, b]$ .

Entretanto, quando a convergência para a raiz só se faz a partir de um extremo do intervalo  $[a, b]$  e a imagem desse ponto fixo tem um valor muito elevado, a convergência é lenta. Este fato pode ser verificado analisando-se mais cuidadosamente a fórmula 5.5.

Suponhamos que o ponto fixo seja  $b$ . Neste caso, coloquemos a fórmula 5.5 em um outro formato, que mostre a parcela de acréscimo dado ao extremo esquerdo  $a$ , que nesta situação é variável. Para tanto, adicionemos ao seu numerador as parcelas  $-a \times f(a)$  e  $a \times f(a)$ . Logo:

$$x = \frac{a \times f(b) - b \times f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{a \times f(b) - b \times f(a) - a \times f(a) + a \times f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{a[f(b) - f(a)] - (b - a)f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Assim:

$$x = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a) \quad (5.6)$$

Analisemos essa última fórmula. Sendo, por hipótese,  $b$  fixo e  $f(b)$  elevado, a expressão  $-\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$ , que representa o acréscimo, será pequena, acarretando convergência tão mais lenta quanto maior for o valor de  $f(b)$ . Para o caso de se considerar  $a$  como ponto fixo, faz-se necessário colocar a fórmula 5.6 em outro formato equivalente (que pode ser obtido a partir da fórmula 5.5, somando-se e subtraindo a parcela  $bf(b)$  ao seu numerador), a saber:  $x = b - \frac{f(b)}{f(b) - f(a)}(b - a)$ .

Para evitar que um extremo fique fixo durante o processo iterativo (situação que ocorre quando  $f(x_k) \times f(x_{k-1}) > 0$ ), a idéia é substituir a reta que passa pelos pontos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$  por uma de inclinação menor. Por exemplo, se em duas iterações consecutivas tivermos  $f(x_k) \times f(x_{k-1}) > 0$  e o extremo fixo for  $b$ , então substituímos  $f(b)$  da fórmula 5.6 por  $f(b)/2$ .

## 6 Método de Newton-Raphson

### 6.1 Introdução

Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$  tal que:

- (i)  $f(a) \times f(b) < 0$
- (ii) Existe uma única raiz  $\xi \in [a, b]$
- (iii)  $f'$  e  $f''$  preservam o sinal e não se anulam em  $[a, b]$

Um exemplo de uma função satisfazendo as condições acima é o da figura 7 abaixo:

A idéia do Método de Newton-Raphson é a de aproximar um arco da curva por uma reta tangente traçada a partir de um ponto da curva.

Seja  $x_0 \in [a, b]$  uma aproximação inicial para a raiz. A tangente de  $\alpha$  na figura 7 é:

$$\tan(\alpha) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$$

De onde resulta que:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

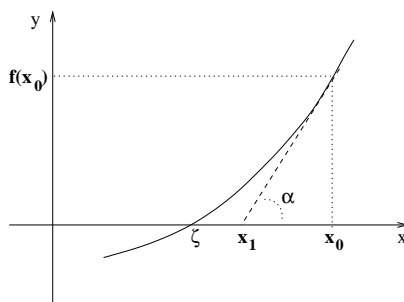


Figura 7: Interpretação geométrica do Método de Newton-Raphson

De forma análoga obtemos  $x_2$ , que representa a interseção da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x_1, f(x_1))$  com o eixo dos  $x$ :

$$\tan(\beta) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} = f'(x_1)$$

Isto é:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Genericamente:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (6.7)$$

## 6.2 Escolha da aproximação inicial

**Teorema** Se  $f(a) \times f(b) < 0$  e  $f'$  e  $f''$  forem não nulas e preservarem o sinal em  $[a, b]$ , então partindo-se de uma aproximação inicial  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $f(x_0) \times f''(x_0) > 0$  é possível gerar, pelo Método de Newton, uma sequência de aproximações  $x_k$  que convirja para a raiz  $\xi$  de  $f(x) = 0$ .

## 6.3 Exemplo

Determinar pelo Método de Newton-Raphson, com precisão  $\varepsilon < 0,01$  em um máximo de 10 iterações, a raiz da equação  $f(x) = 2x - \cos x = 0$ .

(a) Isolamento

Já foi visto que  $\xi \in [0, 1]$ .

(b) Determinação de  $x_0$ :

$$f'(x) = 2 + \operatorname{sen} x \implies f'(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$f''(x) = \cos x \implies f''(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

Sendo  $f(0) = -1$ ,  $f(1) = 1.46$  e  $f''(x) > 0$  então podemos tomar como aproximação inicial  $x_0 = 1$ , pois  $f(1)f''(1) > 0$ .

(c) Refinamento:

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$ x_k - x_{k-1} $	Conclusão
0	1	1.460	2.841	-	
1	0.486	0.088	2.467	0.514	
2	0.450	0.001	2.435	0.036	
3	0.450	0.000	2.435	0.000	Pare! pois $ f(x_3)  < 0.01$ e $ x_3 - x_2  < \varepsilon$

Logo,  $x_3 = 0.450$  é uma aproximação para a raiz  $\xi$  da equação  $f(x) = 2x - \cos x = 0$  com uma precisão  $\varepsilon < 0.01$ .

## 6.4 Algoritmo

Apresentamos pela Figura 8 o pseudo-código do procedimento Newton-Raphson. Este procedimento considera os critérios  $|f(x_k)| < \varepsilon$  e  $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$  como mecanismos de parada.

```

procedimento Newton-Raphson( $\varepsilon, ITERMAX, x$ );
1   $k \leftarrow 0$ ;
2   $\delta \leftarrow \infty$ ;
3  enquanto ( $|\delta| \geq \varepsilon$  ou  $|f(x)| \geq \varepsilon$ ) e  $k \leq ITERMAX$  faça
4     $\delta \leftarrow -\frac{f(x)}{f'(x)}$ ;
5     $x \leftarrow x + \delta$ ;
6     $k \leftarrow k + 1$ ;
7  fim-enquanto;
8  se ( $k \leq ITERMAX$ )
9    então Retorne  $x$  como aproximação para a raiz;
10  senão Imprima: Não foi obtida uma aproximação com a precisão
11        requerida em  $k$  iterações;
fim Newton-Raphson;

```

Figura 8: Algoritmo do Método de Newton-Raphson

## 6.5 Vantagens e desvantagens do Método de Newton

O Método de Newton-Raphson tem convergência muito boa (quadrática). Entretanto, apresenta as seguintes desvantagens:

- (i) Exige o cálculo e a análise do sinal de  $f'$  e  $f''$
- (ii) Se  $f'(x_{k-1})$  for muito elevado a convergência será lenta
- (iii) Se  $f'(x_{k-1})$  for próximo de zero pode ocorrer *overflow*

Para contornar o item (i), o qual é necessário para a escolha da aproximação inicial, é comum apenas calcular-se o valor da função e o de sua derivada segunda nos extremos  $a$  e  $b$ , considerando para  $x_0$  o extremo que satisfazer a condição  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ . Para tanto, é importante que o intervalo  $[a, b]$  considerado seja suficientemente pequeno, de forma a minimizar a possibilidade de variação de sinal de  $f'$  e  $f''$ .

## 7 Estudo Especial das Equações Algébricas

Equações algébricas são todas as equações que podem ser colocadas na forma:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (7.8)$$

onde  $a_i \in \mathcal{R} \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$

**Teorema Fundamental da Álgebra**  $P_n(x) = 0$  tem  $n$  raízes  $\xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$  reais ou complexas.

### 7.1 Valor de um polinômio em um ponto

#### 7.1.1 Forma tradicional

Dado um polinômio  $P_2(x) = 3x^2 - 5x + 6$ , se desejarmos calcular seu valor em um dado ponto, por exemplo, para  $x = 1$ , normalmente o fazemos da seguinte forma:

$$P_2(1) = 3 \times 1^2 - 5 \times 1 + 6$$

Observamos que essa forma tem complexidade quadrática ( $O(n^2)$ ), conforme se mostra na tabela 1 a seguir.

Tabela 1: Complexidade da forma tradicional de se avaliar um polinômio

Polinômio	Grau	Adições	Multiplicações	Total
$P_1(x) = a_1 x + a_0$	1	1	1	2
$P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	2	2	3 (1+2)	5
$P_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	3	3	6 (1+2+3)	9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$	$n$	$n$	$1 + 2 + \cdots + n$	$\frac{n^2+3n}{2}$

#### 7.1.2 Regra de Horner

Uma forma de reduzir a complexidade envolvida na avaliação de um polinômio em um ponto é usar a Regra de Horner, que usa uma sequência de parênteses aninhados.

Tabela 2: Complexidade da Regra de Horner

Polinômio	Grau	Adições	Multiplicações	Total
$P_1(x) = a_1 x + a_0$	1	1	1	2
$P_2(x) = (a_2 x + a_1)x + a_0$	2	2	2	4
$P_3(x) = ((a_3 x + a_2)x + a_1)x + a_0$	3	3	3	6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_n(x) = (\cdots (a_n x + a_{n-1})x + \cdots + a_1)x + a_0$	$n$	$n$	$n$	$2n$

Como se pode observar da tabela 2, a complexidade envolvida na avaliação de um polinômio em um ponto por esta regra é linear ( $O(n)$ ).

Exemplo: Calcular  $P(5)$  nos seguintes casos:

(a)  $P(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 1$

(b)  $P(x) = x^5 + 2x^3 + 5x^2 - 6$

Solução:

(a)  $P(x) = ((4x + 2)x - 1)x + 1 \implies P(5) = ((4 \times 2 + 2) \times 2 - 1) \times 2 + 1 = 546$

(b)  $P(x) = (((x + 0)x + 2)x + 5)x + 0)x - 6 \implies$

$$P(5) = (((5 + 0) \times 5 + 2) \times 5 + 5) \times 5 + 0) \times 5 - 6 = 3494$$

Na Figura 9 ilustra-se o pseudocódigo do procedimento Horner. Os parâmetros de entrada deste procedimento são o grau  $n$  do polinômio, seu vetor  $a$  de coeficientes, o ponto  $x$  para o qual se deseja calcular o valor do polinômio. A saída é a variável  $P$ , que acumula o valor do polinômio no ponto  $x$ .

**procedimento** *Horner*( $n, a, P, x$ );

1  $P \leftarrow a_n$ ;

2 para  $i = n$  até 1 passo  $-1$  faça

3  $P \leftarrow P \times x + a_{i-1}$ ;

4 fim-enquanto;

5 Retorne  $P$ ;

**fim** *Horner*;

Figura 9: Procedimento de Horner

## 7.2 Limite das Raízes Reais

### 7.2.1 Limite Superior das Raízes Positivas (LSRP)

**Teorema de Lagrange** Seja a equação algébrica

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \text{ com } a_n > 0, a_0 \neq 0$$

e  $k = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{i : a_i < 0\}$ . Então para limite superior das raízes positivas de  $P_n(x) = 0$ , caso existam, pode-se tomar o número:

$$L = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}} \quad (7.9)$$

$$\text{onde } B = \max_{\substack{a_i < 0 \\ 0 \leq i \leq n-1}} |a_i|$$

Desse teorema concluímos que se  $\xi^+$  é a maior das raízes positivas de  $P_n(x) = 0$ , então:

$$\xi^+ \leq L$$

Exemplo 1: Determinar o limite superior das raízes positivas da equação  $P(x) = x^5 + 3x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12 = 0$ .

Solução:

$$n = 5, a_n = 1, a_0 = -12 \neq 0,$$

$$\begin{aligned}
k &= \max_{0 \leq i \leq 4} \{i : a_i < 0\} = \max_{0 \leq i \leq 4} \{3, 2, 1\} = 3 \\
B &= \max_{\substack{a_i < 0 \\ 0 \leq i \leq n-1}} |a_i| = \max_{\substack{a_i < 0 \\ 0 \leq i \leq 4}} \{|-9|, |-1|, |-12|\} = 12 \\
L &= 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}} = 1 + \sqrt[2]{\frac{12}{1}} = 1 + 3.36 = 4.46 \\
\text{Logo, } \xi^+ &\leq 4.46
\end{aligned}$$

### 7.2.2 Limite Inferior das Raízes Positivas (LIRP)

Sejam  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  as raízes de  $P_n(x) = 0$ . Logo:

$$P(x) = a_n(x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_n) = 0$$

Para determinarmos o limite inferior das raízes positivas de  $P_n(x) = 0$ , basta substituímos  $x$  por  $\frac{1}{x}$  em  $P_n(x) = 0$  e aplicarmos o Teorema de Lagrange à equação resultante. O inverso do limite obtido será, então, o limite inferior das raízes de  $P_n(x) = 0$ .

Mais especificamente, seja a equação auxiliar  $P_1(x) = x^n P(\frac{1}{x}) = 0$ .

Tendo em vista que  $P_1(x) = a_n(\frac{1}{x} - \xi_1)(\frac{1}{x} - \xi_2) \cdots (\frac{1}{x} - \xi_n) = 0$ , tem-se que as raízes de  $P_1(x) = 0$  são:  $\frac{1}{\xi_1}, \frac{1}{\xi_2}, \dots, \frac{1}{\xi_n}$ .

Seja  $\frac{1}{\xi^+}$  a maior das raízes positivas de  $P_1(x) = 0$  e  $L_1$  o limite superior das raízes positivas de  $P_1(x) = 0$ . Então  $\frac{1}{\xi^+} \leq L_1$ . Isto é:  $\xi^+ \geq \frac{1}{L_1}$ .

Portanto,  $\frac{1}{L_1}$  é o limite inferior das raízes positivas de  $P_n(x) = 0$ .

Exemplo 2: Determinar o limite inferior das raízes positivas de  $P(x) = x^5 + 3x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12 = 0$ .

Solução:

$$P_1(x) = x^5 P\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\left(\frac{1}{x}\right)^5 + 3\left(\frac{1}{x}\right)^4 - 9\left(\frac{1}{x}\right)^3 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 20\left(\frac{1}{x}\right) - 12\right] = 0$$

$$\therefore P_1(x) = 1 + 3x - 9x^2 - x^3 + 20x^4 - 12x^5 = 0.$$

Como  $a_n < 0$ , devemos multiplicar a equação auxiliar por  $-1$ . Desta forma, obtemos:

$$P_1(x) = 12x^5 - 20x^4 + x^3 + 9x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Nesta equação temos:  $n = 5$ ,  $a_n = 12$ ,

$$B = \max\{|-20|, |-3|, |-1|\} = 20,$$

$$k = \max\{4, 1, 0\} = 4.$$

$$\text{Assim, } L_1 = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}} = 1 + \sqrt[5-4]{\frac{20}{12}} = 1 + \sqrt[1]{1.67} = 2.67$$

Portanto,  $\frac{1}{L_1} = \frac{1}{2.67} = 0.37$  é o LIRP de  $P(x) = 0$ , isto é,  $\xi^+ \geq 0.37$ .

Obs.: Dos exemplos 1 e 2 concluímos que  $0.37 \leq \xi^+ \leq 4.46$

### 7.2.3 Limite Inferior das Raízes Negativas (LIRN)

Sejam  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  as raízes de  $P(x) = 0$ . Se tomarmos como equação auxiliar  $P_2(x) = P(-x) = 0$ , teremos como raízes de  $P_2(x) = 0$ :  $-\xi_1, -\xi_2, \dots, -\xi_n$ .

Seja  $-\xi^-$ ,  $\xi^- < 0$ , a maior das raízes positivas de  $P_2(x) = 0$  e  $L_2$  o limite superior das raízes positivas de  $P_2(x) = 0$ .

Então:  $-\xi^- \leq L_2 \implies \xi^- \geq -L_2$ , isto é,  $-L_2$  é o limite inferior das raízes negativas de  $P(x) = 0$ .

Exemplo 3: Determinar o LIRN da equação algébrica  $x^5 + 3x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12 = 0$ .

Solução:

$$P_2(x) = P(-x) = (-x)^5 + 3(-x)^4 - 9(-x)^3 - (-x)^2 + 20(-x) - 12 = 0$$

$$\therefore P_2(x) = -x^5 + 3x^4 + 9x^3 - x^2 - 20x - 12 = 0$$

Para que possamos aplicar o Teorema de Lagrange devemos multiplicar a equação anterior por  $-1$ , uma vez que  $a_n = a_5 = -1 < 0$ . Desta forma:

$$P_2(x) = x^5 - 3x^4 - 9x^3 + x^2 + 20x + 12 = 0$$

Nesta equação temos:  $n = 5$ ,  $a_n = 1$ ,

$$B = \max\{|-3|, |-9|\} = 9,$$

$$k = \max\{4, 3\} = 4.$$

$$\text{Assim, } L_2 = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}} = 1 + \sqrt[5-4]{\frac{9}{1}} = 1 + \sqrt[1]{9} = 10$$

Portanto,  $\xi^- \geq -10$ .

### 7.2.4 Limite Superior das Raízes Negativas (LSRN)

De forma análoga aos casos anteriores, seja a equação auxiliar:

$$P_3(x) = x^n P\left(\frac{-1}{x}\right) = 0$$

Seja  $-\frac{1}{\xi^-}$ ,  $\xi^- < 0$ , a maior das raízes positivas de  $P_3(x) = 0$  e  $L_3$  o limite superior das raízes positivas de  $P_3(x) = 0$ .

$$\text{Logo: } -\frac{1}{\xi^-} \leq L_3 \xrightarrow{\xi^- \leq 0} -1 \geq \xi^- L_3 \xrightarrow{L_3 > 0} -\frac{1}{L_3} \geq \xi^- \implies \xi^- \leq -\frac{1}{L_3}.$$

Isto é,  $-\frac{1}{L_3}$  é o limite superior das raízes negativas de  $P(x) = 0$ .

Exemplo 4: Determinar o LSRN da equação algébrica  $x^5 + 3x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12 = 0$ .

Solução:

$$P_3(x) = x^5 P\left(-\frac{1}{x}\right) = \left[\left(-\frac{1}{x}\right)^5 + 3\left(-\frac{1}{x}\right)^4 - 9\left(-\frac{1}{x}\right)^3 - \left(-\frac{1}{x}\right)^2 + 20\left(-\frac{1}{x}\right) - 12\right] = 0$$

$$\therefore P_3(x) = -1 + 3x + 9x^2 - x^3 - 20x^4 - 12x^5 = 0.$$

Como  $a_n < 0$ , devemos multiplicar a equação auxiliar por  $-1$ . Desta forma, resulta que:

$$P_3(x) = 12x^5 + 20x^4 + x^3 - 9x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Nesta equação temos:  $n = 5$ ,  $a_n = 12$ ,  $B = 9$ ,  $k = 2$ .

$$\text{Assim, } L_3 = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}} = 1 + \sqrt[5-2]{\frac{9}{12}} = 1 + \sqrt[3]{0.75} = 1.91$$

Portanto,  $-\frac{1}{L_3} = -\frac{1}{1.93} = -0.52$  é o LSRN de  $P(x) = 0$ .

Obs.: Dos exemplos 3 e 4, concluímos que  $-10 \leq \xi^- \leq -0.52$ .

## 7.3 O Número de Raízes Reais

### 7.3.1 Regra de Sinais de Descartes

O número de raízes positivas de uma equação algébrica, denotado por  $n^+$  ou é igual ao número de variações de sinal na sequência dos coeficientes ou é menor que esse número por um inteiro par.

Exemplo 5: Em  $P(x) = +x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0$  há 2 variações de sinal na sequência dos coeficientes. Portanto, há 2 raízes positivas ou nenhuma ( $n^+ = 2$  ou 0).

Para determinarmos o número de raízes negativas de  $P(x) = 0$ , denotado por  $n^-$ , basta trocarmos  $x$  por  $-x$  e calcularmos o número de raízes positivas de  $P(-x) = 0$ , o qual será o número de raízes negativas de  $P(x) = 0$ .

Para o exemplo anterior, em  $P(-x) = (-x)^3 - 4(-x)^2 - (-x) + 6 = -x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$  há uma troca de sinal. Logo,  $n^- = 1$ .

Exemplo 6:  $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$

Solução:

$$n^+ = 2 \text{ ou } 0$$

$$P(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^3 - 7(-x)^2 + 8(-x) + 12 = 0$$

$$\therefore P(-x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$n^- = 2 \text{ ou } 0$$

Exemplo 7:  $P(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 8x + 15 = 0$

Solução:

$$n^+ = 4 \text{ ou } 2 \text{ ou } 0$$

$$P(-x) = (-x)^4 - 8(-x)^3 + 16(-x)^2 - 8(-x) + 15 = 0$$

$$\therefore P(-x) = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 15 = 0$$

$$n^- = 0$$

Exemplo 8:  $P(x) = x^2 + 4x + 4 = 0$

Solução:

$$n^+ = 0$$

$$P(-x) = (-x)^2 + 4(-x) + 4 = 0$$

$$\therefore P(-x) = x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$n^- = 2 \text{ ou } 0$$

### 7.3.2 Regra de Sinais de Sturm

**Sequência de Sturm** Chama-se sequência de Sturm de uma equação algébrica  $P(x) = 0$  à sucessão:  $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$

onde  $p_0(x) = P(x)$ ,  $p_1(x) = P'(x)$  e  $p_k(x)$ ,  $k \geq 2$  é o resto da divisão, com sinal trocado, de  $P_{k-2}(x)$  por  $P_{k-1}(x)$ .

**Teorema de Sturm** Se  $P(a) \neq 0$  e  $P(b) \neq 0$  então o número de raízes reais distintas de  $P(x) = 0$  no intervalo  $a \leq x \leq b$  é exatamente  $N(a) - N(b)$ , onde  $N(a)$  (respectivamente  $N(b)$ ) representa o número de variações de sinal na sequência de Sturm no ponto  $x = a$  (respectivamente  $x = b$ ).

Exemplo 9: Calcular o número de raízes reais distintas no intervalo  $[0, 3]$  da equação  $P(x) = x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ , sabendo-se que a sucessão de Sturm de  $P(x) = 0$  é:

(a)  $p_0(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

(b)  $p_1(x) = 3x^2 + 2x - 1$



(c)  $p_2(x) = \frac{8}{9}x - \frac{10}{9}$

(d)  $p_3(x) = -\frac{99}{16}$

Solução:

$p_0(0) = +1 > 0$

$p_1(0) = -1 < 0$

$p_2(0) = -\frac{10}{9} < 0$

$p_3(0) = -\frac{99}{16} < 0$

$p_0(3) = +34 > 0$

$p_1(3) = +32 > 0$

$p_2(3) = +14/9 > 0$

$p_3(3) = -99/16 < 0$

No ponto  $x = a = 0$  houve uma variação de sinal (de  $p_0(0)$  para  $p_1(0)$ ). Assim  $N(0) = 1$ .

Por outro lado, no ponto  $x = b = 3$  também houve uma variação de sinal (de  $p_2(3)$  para  $p_3(3)$ ). Assim  $N(3) = 1$ .

Do exposto, concluímos que a equação  $x^3 + x^2 - x + 1 = 0$  não possui raízes no intervalo  $[0, 3]$  pois  $N(0) - N(3) = 1 - 1 = 0$ .

Exemplo 10: Dada a equação  $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$ , pede-se:

(a) Determinar os limites das raízes reais

(b) Construir a sequência de Sturm

(c) Determinar o número de raízes reais

(d) Isolar as raízes

Solução:

(a.1) Determinação do LSRP

(a.2) Determinação do LIRP

(a.3) Determinação do LIRN

(a.4) Determinação do LSRN