Metaheurísticas

- Procedimentos destinados a encontrar uma boa solução, eventualmente a ótima, consistindo na aplicação, em cada passo, de uma heurística subordinada, a qual tem que ser modelada para cada problema específico
- Têm caráter geral (aplicam-se a quaisquer tipos de problemas)
- São capazes de escapar de ótimos locais
- Diferenciam-se entre si basicamente pelas seguintes características:
 - critério de escolha de uma solução inicial
 - definição da vizinhança $N(s)$ de uma solução s
 - critério de seleção de uma solução vizinha dentro de $N(s)$
 - critério de término

Recozimento Simulado (*Simulated Annealing*)

- Proposto por Kirkpatrick et al. (1983)
- Simula o processo de recozimento de materiais
- Resfriamento rápido conduz à formação de cristais (produtos com imperfeições)
- Resfriamento lento conduz a produtos mais puros (sem imperfeições)
- Admite soluções de piora para escapar de ótimos locais
- As soluções de piora são aceitas com uma certa probabilidade, a qual depende de um parâmetro, chamado de temperatura
- A temperatura regula a probabilidade de se aceitar movimentos de piora

Recozimento Simulado (*Simulated Annealing*)

- No início do processo, a temperatura é elevada e a taxa de aceitação de soluções de piora é maior
- Atingido o equilíbrio térmico, a temperatura é gradativamente diminuída
- A taxa de aceitação de movimentos de piora é, portanto, diminuída com o decorrer das iterações
- No final do processo praticamente não se aceita movimentos de piora e o procedimento se comporta como o método da descida/subida
- O final do processo se dá quando a temperatura se aproxima de zero e nenhuma solução de piora é mais aceita, situação que evidencia o encontro de um ótimo local

Recozimento Simulado (*Simulated Annealing*)

- Probabilidade de aceitação de um movimento calculada segundo a fórmula (para um problema de minimização):

$$P(\text{aceitacao}) = e^{-\Delta/T}$$

onde Δ = variação de custo e T = temperatura

- Temperatura $\uparrow \Rightarrow$ probabilidade de aceitação $\uparrow$
- Temperatura $\downarrow \Rightarrow$ probabilidade de aceitação $\downarrow$

Recozimento Simulado (*Simulated Annealing*)

```
procedimento  $SA(f(\cdot), N(\cdot), \alpha, SAmax, T_0, s)$   
1  $s^* \leftarrow s$ ; {Melhor solução obtida até então}  
2  $IterT \leftarrow 0$ ; {Número de iterações na temperatura T}  
3  $T \leftarrow T_0$ ; {Temperatura corrente}  
4 enquanto ( $T > 0$ ) faça  
5     enquanto ( $IterT < SAmax$ ) faça  
6          $IterT \leftarrow IterT + 1$ ;  
7         Gere um vizinho qualquer  $s' \in N(s)$ ;  
8          $\Delta = f(s') - f(s)$ ;  
9         se ( $\Delta < 0$ )  
10            então  
11                 $s \leftarrow s'$ ;  
12                se ( $f(s') < f(s^*)$ ) então  $s^* \leftarrow s'$ ;  
13            senão  
14                Tome  $x \in [0, 1]$ ;  
15                se ( $x < e^{-\Delta/T}$ ) então  $s \leftarrow s'$ ;  
16            fim-se;  
17        fim-enquanto;  
18         $T \leftarrow \alpha \times T$ ;  
19         $IterT \leftarrow 0$ ;  
20 fim-enquanto;  
21  $s \leftarrow s^*$ ;  
22 Retorne  $s$ ;  
fim  $SA$ ;
```

Recozimento Simulado (*Simulated Annealing*)

Formas de fazer o resfriamento:

1. Geométrico:

$$T_k = \alpha T_{k-1} \quad \forall k \geq 1 \quad (1)$$

onde T_k representa a temperatura na iteração k do método, isto é, na k -ésima vez em que há alteração no valor da temperatura e α uma constante tal que $0 < \alpha < 1$.

2.

$$T_k = \frac{T_{k-1}}{1 + \gamma \sqrt{T_{k-1}}} \quad \forall k \geq 1 \quad (2)$$

onde T_k representa a temperatura na iteração k do método e γ uma constante tal que $0 < \gamma < 1$.

3.

$$T_k = \begin{cases} \beta T_{k-1} & \text{se } k = 1 \\ \frac{T_{k-1}}{1 + \gamma T_{k-1}} & \text{se } k \geq 2 \end{cases} \quad (3)$$

onde $\gamma = \frac{T_0 - T_{k-1}}{(k-1)T_0 T_{k-1}}$, sendo T_0 a temperatura inicial, T_k a temperatura na k -ésima iteração e β um parâmetro para corrigir a imperfeição do resfriamento ($0 < \beta < 1$).

Recozimento Simulado (*Simulated Annealing*)

Prescrições para calcular a temperatura inicial:

1. Pela média dos custos das soluções vizinhas:
 - Gerar uma solução inicial qualquer
 - Gerar um certo número de vizinhos
 - Para cada vizinho, calcular o respectivo custo
 - Retornar como temperatura a média de custo das soluções vizinhas
2. Por simulação
 - Gerar uma solução inicial qualquer
 - Partir de uma temperatura inicial baixa
 - Contar quantos vizinhos são aceitos em SA_{max} iterações nessa temperatura
 - Se o número de vizinhos aceitos for alto (por exemplo, 95%) retornar a temperatura corrente como a temperatura inicial para o método
 - Caso contrário, aumentar a temperatura (por exemplo, em 10%) e repetir o processo

```

procedimento TemperaturaInicial( $\beta, \gamma, SAmax, T_0, s$ )
1   $T \leftarrow T_0$ ;           {Temperatura corrente}
2   $Continua \leftarrow TRUE$ ;
3  enquanto ( $Continua$ ) faça
4       $Aceitos \leftarrow 0$ ; {Vizinhos aceitos na temp. T}
5      para  $IterT = 1$  até  $SAmax$  faça
6          Gere um vizinho qualquer  $s' \in N(s)$ ;
7           $\Delta = f(s') - f(s)$ ;
8          se ( $\Delta < 0$ )
9              então
10                  $Aceitos \leftarrow Aceitos + 1$ ;
11             senão
12                 Tome  $x \in [0, 1]$ ;
13                 se ( $x < e^{-\Delta/T}$ ) então  $Aceitos ++$ ;
14             fim-se;
15         fim-para;
16         se ( $Aceitos \geq \gamma \times SAmax$ )
17             então  $Continua \leftarrow FALSE$ ;
18             senão  $T \leftarrow \beta \times T$ ;
19         fim-se;
20 fim-enquanto;
21 Retorne  $T$ ;
fim TemperaturaInicial;

```

Recozimento Simulado (*Simulated Annealing*)

Considerações gerais:

1. O número máximo de iterações em uma dada temperatura é calculado com base na dimensão do problema abordado
2. Temperatura de congelamento do sistema: quando a temperatura final chegar a, por exemplo, $T = 0,001$ ou quando a taxa de aceitação de movimentos cair abaixo de um valor predeterminado
3. Os parâmetros mais adequados para uma dada aplicação só podem ser estabelecidos por experimentação