Busca Tabu

Marcone Jamilson Freitas Souza
Universidade Federal de Ouro Preto
www.decom.ufop.br/prof/marcone

Sumário

- Introdução
- Fundamentação
- Algoritmo básico
- Implementação da lista tabu
- Tamanho da lista tabu
- Análise da vizinhança
- Critérios de aspiração
- Memória de longo prazo
- Oscilação estratégica

Introdução

- Proposta por Glover (1986) e Hansen (1986)
- Metaheurística de busca local
- Se apoia em estruturas de memória para guiar uma heurística de busca local além da otimalidade local

Introdução

- Metaheurística poderosa
- Resolução eficiente de vários problemas combinatórios, destacando-se:
  - Roteirização (Gendreau et al., 2006; Cordeau et al., 2002; Gendreau et al., 1999)
  - Sequenciamento (Allahverdi *et al.*, 2008)
  - Programação de horários (Santos *et al.*, 2005; Souza *et al.*, 2004)

Introdução

- Ingredientes típicos:
  - Busca Tabu básica:
    - Geração da solução inicial;
    - Critério de escolha de vizinho;
    - Definição das regras de proibição: memória de curto prazo;
    - Critério de aspiração;
  - Definição de uma memória de longo prazo: intensificação x diversificação
  - Reconexão por Caminhos
  - Aplicação da oscilação estratégica

Fundamentação: Problema da Mochila

- Há um conjunto de n itens e uma mochila de capacidade b
- A cada item está associado um peso w_j e um valor de retorno p_j
- Objetivo: alocar os itens à mochila de forma que se tenha o maior valor de retorno, respeitando-se a capacidade da mochila

Problema da Mochila

- Formulação PLI:

$$\max \sum_{j=1}^{n} p_j s_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j s_j \leq b$$

$$s_j \in \{0,1\} \; \forall j = 1, \cdots, n$$

- s_j = 1 se o item j for alocado à mochila e 0, caso contrário.

Problema da Mochila

- Estratégia de exploração do espaço de busca:
  - Soluções factíveis
  - Soluções infactíveis

$$f(s) = \sum_{j=1}^{n} p_j s_j - \rho \times \max\{0, \sum_{j=1}^{n} w_j s_j - b\}$$

- ρ = penalidade por excesso de carga

Problema da Mochila

- Representação de uma solução:
  - Vetor $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, em que $s_j \in \{0,1\}$
- Solução inicial:
  - Gulosa: alocar os itens mais valiosos por unidade de peso
  - Aleatória
- Movimento *m*: inverter o valor de um bit
  - Valor 0 muda para 1
  - Valor 1 muda para 0
- $N(s) = \{s' : s' \leftarrow s \oplus m\}$
- $\rho = \sum p_j$

Problema da Mochila

- Exemplo: seja mochila de capacidade $b = 32$

Item	1	2	3	4	5	6	7	8
w_j	4	15	7	9	8	10	9	11
p_j	2	2	3	4	6	5	8	7

- $s^0 = (1, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad 0)$
- $\rho = \sum p_j = 37$
- $f(s^0) = 19$

Problema da Mochila

Tabela 1.1: Instância do Problema da Mochila 0-1

Item j	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso w_j	4	15	7	9	8	10	9	11
Retorno p_j	2	2	3	4	6	5	8	7

$$s^0 = (1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0)^t$$

$f(s^0) = 19$

# viz.	$s' \in N(s^0)$	$peso(s')$	$f(s')$
1	$(\mathbf{0}0010110)^t$	28	17
2	$(1\mathbf{1}010110)^t$	47	-534
3	$(10\mathbf{1}10110)^t$	39	-237
4	$(100\mathbf{0}0110)^t$	23	15
5	$(1001\mathbf{1}110)^t$	40	-271
6	$(10010\mathbf{0}10)^t$	22	14
7	$(1001010\mathbf{0})^t$	23	11
8	$(1001011\mathbf{1})^t$	43	-381

Problema da Mochila

Tabela 1.1: Instância do Problema da Mochila 0-1

Item j	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso w_j	4	15	7	9	8	10	9	11
Retorno p_j	2	2	3	4	6	5	8	7

$$s^0 = (1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0)^t$$

$f(s^0) = 19$

# viz.	$s' \in N(s^0)$	$peso(s')$	$f(s')$
1	$(\boxed{0}0010110)^t$	28	17
2	$(1\boxed{1}010110)^t$	47	-534
3	$(10\boxed{1}10110)^t$	39	-237
4	$(100\boxed{0}0110)^t$	23	15
5	$(1001\boxed{1}110)^t$	40	-271
6	$(10010\boxed{0}10)^t$	22	14
7	$(10010\boxed{1}0)^t$	23	11
8	$(1001011\boxed{1})^t$	43	-381

Esta solução é um ótimo local, pois não há uma solução vizinha com melhor função de avaliação

Problema da Mochila

Tabela 1.1: Instância do Problema da Mochila 0-1

Item j	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso w_j	4	15	7	9	8	10	9	11
Retorno p_j	2	2	3	4	6	5	8	7

$$s^0 = (1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0)^t$$

$f(s^0) = 19$

# viz.	$s' \in N(s^0)$	$peso(s')$	$f(s')$
1	$(\mathbf{0}0010110)^t$	28	17
2	$(1\mathbf{1}010110)^t$	47	-534
3	$(10\mathbf{1}10110)^t$	39	-237
4	$(100\mathbf{0}0110)^t$	23	15
5	$(1001\mathbf{1}110)^t$	40	-271
6	$(10010\mathbf{0}10)^t$	22	14
7	$(1001010\mathbf{0})^t$	23	11
8	$(1001011\mathbf{1})^t$	43	-381

Esta solução é um ótimo local, pois não há uma solução vizinha com melhor função de avaliação

Ideia: Mover para o melhor vizinho, ainda que de piora.

Problema da Mochila

Tabela 1.1: Instância do Problema da Mochila 0-1

Item j	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso w_j	4	15	7	9	8	10	9	11
Retorno p_j	2	2	3	4	6	5	8	7

$s^1 = (00010110)^t$

$f(s^1) = 17$

#	$s' \in N(s^1)$	$peso(s')$	$f(s')$
1	$(\boxed{1}0010110)^t$	32	19
2	$(0\boxed{1}010110)^t$	43	-388
3	$(00\boxed{1}10110)^t$	35	-91
4	$(000\boxed{0}0110)^t$	19	13
5	$(0001\boxed{1}110)^t$	36	-125
6	$(00010\boxed{0}10)^t$	18	12
7	$(000101\boxed{0}0)^t$	19	9
8	$(0001011\boxed{1})^t$	39	-235

Observe que o vizinho #1, isto é, s^0, tem a melhor avaliação na vizinhança de s^1.

Problema da Mochila

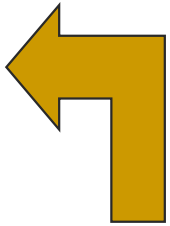
Tabela 1.1: Instância do Problema da Mochila 0-1

Item j	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso w_j	4	15	7	9	8	10	9	11
Retorno p_j	2	2	3	4	6	5	8	7

$s^1 = (00010110)^t$

$f(s^1) = 17$

#	$s' \in N(s^1)$	$peso(s')$	$f(s')$
1	$(10010110)^t$	32	19
2	$(01010110)^t$	43	-388
3	$(00110110)^t$	35	-91
4	$(00000110)^t$	19	13
5	$(00011110)^t$	36	-125
6	$(00010010)^t$	18	12
7	$(00010100)^t$	19	9
8	$(00010111)^t$	39	-235



Retorna-se a uma solução já gerada anteriormente!

Problema da Mochila

Tabela 1.1: Instância do Problema da Mochila 0-1

Item j	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso w_j	4	15	7	9	8	10	9	11
Retorno p_j	2	2	3	4	6	5	8	7

$s^1 = (00010110)^t$

$f(s^1) = 17$

Tabu:

#	$s' \in N(s^1)$	$peso(s')$	$f(s')$
1	$(10010110)^t$	32	19
2	$(01010110)^t$	43	-388
3	$(00110110)^t$	35	-91
4	$(00000110)^t$	19	13
5	$(00011110)^t$	36	-125
6	$(00010010)^t$	18	12
7	$(00010100)^t$	19	9
8	$(00010111)^t$	39	-235

Ideia: Criar uma Lista T das soluções já geradas (Lista Tabu).

Lista Tabu de soluções

- É inviável armazenar uma lista de todas as soluções geradas
  - Solução: Armazenar apenas as últimas |T| soluções geradas
  - Uma lista de tamanho |T| impede ciclos de até |T| iterações
  - Esta estratégia está coerente com o fato de que na história da busca não influenciam na ciclagem soluções geradas em um passado distante

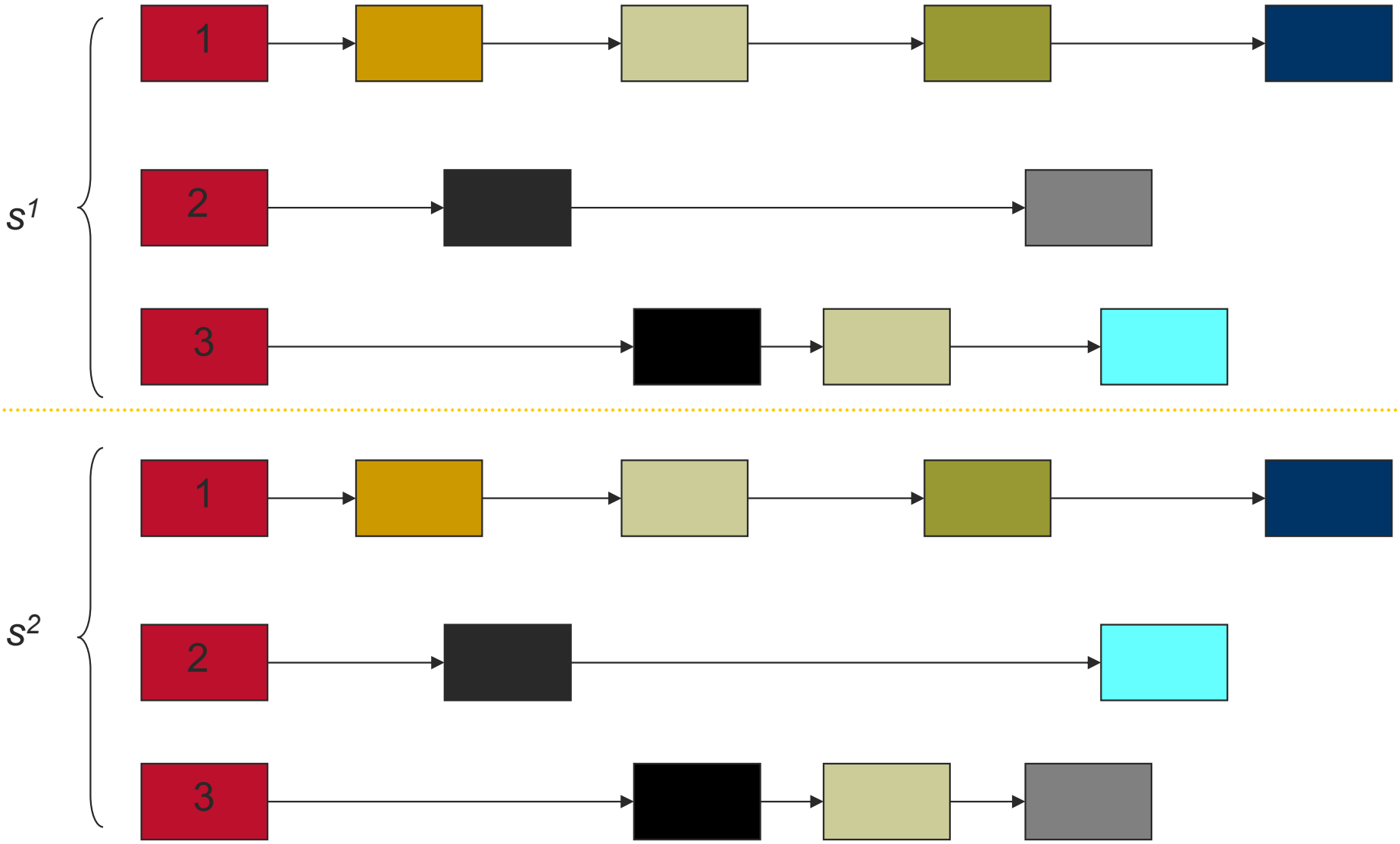
Lista Tabu de soluções

- Em muitos problemas, requer-se:
  - muita memória para armazenar uma lista tabu de soluções,
  - alto custo computacional para verificar se uma solução é ou não tabu.

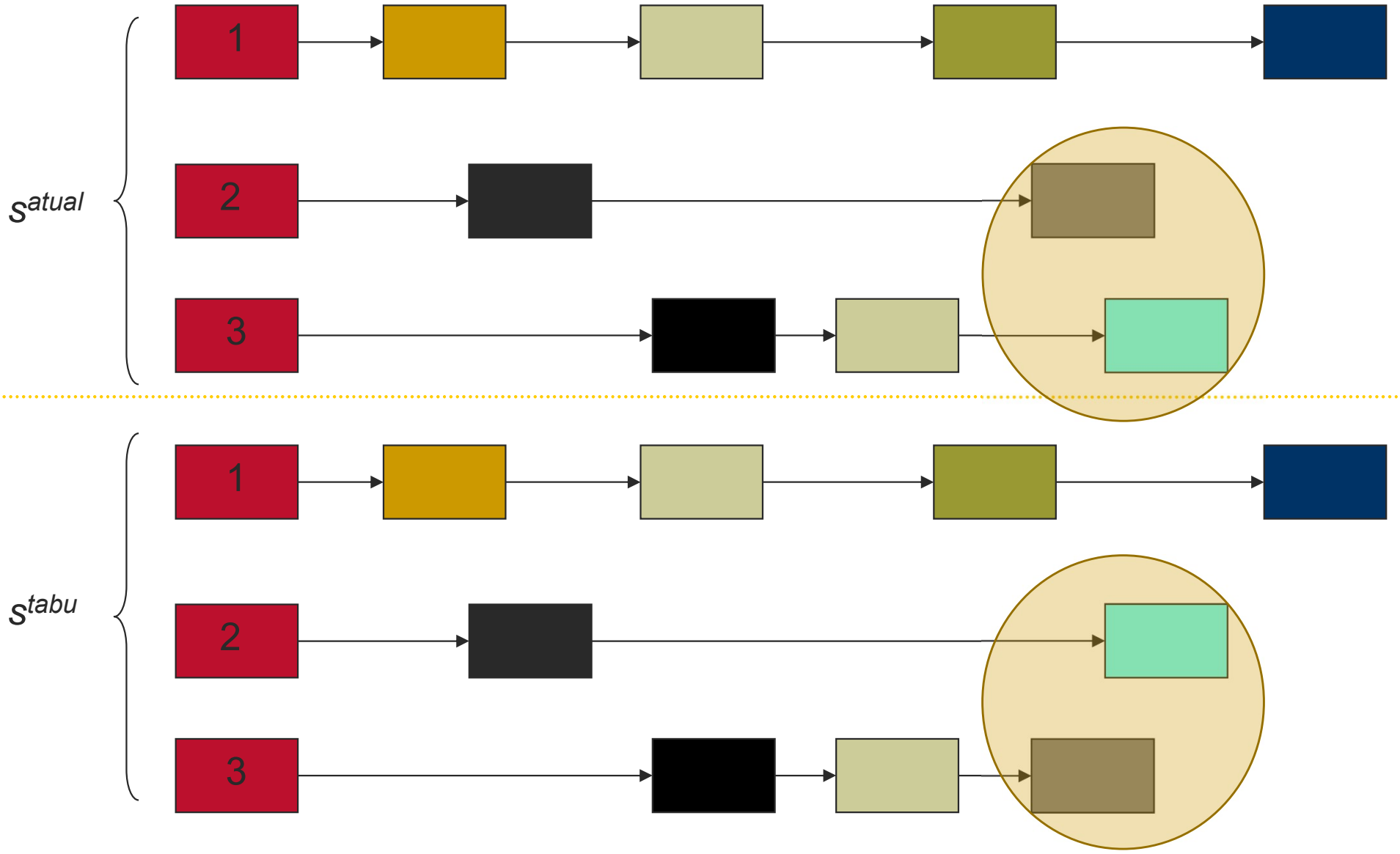
Lista Tabu de soluções

- Como faço para verificar se uma solução já foi gerada?
- Seja um problema de programação de tripulações
- Suponha que a solução s^{atual} é a solução atual e s^{tabu} é a única solução tabu gerada até então. Portanto, a lista tabu T é formada apenas por s^{tabu} , isto é, $T = \{s^{tabu}\}$

Programação de tripulações



Programação de tripulações



Lista Tabu baseada em atributos de soluções/movimentos

- **Ideia**: Ao invés de armazenar toda a solução, guardar apenas alguma característica (atributo) da solução / movimento e uma regra de proibição (ativação tabu do atributo) para impedir o retorno a uma solução já gerada
- Atributos selecionados são denominados tabu-ativos
- Soluções que contêm elementos tabu-ativos tornam-se tabu
- Movimento tabu: movimento que leva a uma solução tabu

Lista Tabu de soluções

- As duas soluções não são iguais
- Elas diferem entre si apenas com relação à troca de duas tarefas
- s^{atual} não é tabu, mas a verificação deste fato pode consumir um tempo alto

Lista Tabu baseada em atributos de soluções/movimentos

- Exemplo: problemas de permutação.
- Seja s = (2, 6, 1, 5, 4, 3)
- Atributos: um elemento e sua posição
- Movimentos:
  - Troca de posição entre dois elementos
    - s = (2, 6, 1, 3, 4, 5)
  - Inserção de um elemento em outra posição
    - s = (2, 6, 1, 4, 3, 5)

Lista Tabu baseada em atributos de soluções/movimentos

- Seja a troca da tarefa s_i da posição i com a tarefa s_j da posição j
- Seja s = (2, 6, 1, 5, 4, 3) a solução que será alterada pela troca de seus elementos da quarta e sexta posições, respectivamente, isto é, $s_4 = 5$ com $s_6 = 3$
- Regras de ativação tabu para movimentos de troca e inserção:
  1) Impedir qualquer movimento que resulte em uma permutação em que s_i ocupe a posição i e s_j ocupe a posição j:
     - Considerando s_i =5 e s_j =3 então é proibido que:
     - a tarefa 5, da quarta posição i = 4, ocupe a sexta posição (j = 6) **e**
     - a tarefa 3, da sexta posição (j = 6), ocupe a quarta posição (i = 4)

  2) Impedir qualquer movimento que resulte em uma permutação em que s_i ocupe a posição i **ou** s_j ocupe a posição j:
     - Considerando s_i =5 e s_j =3 então é proibido que:
     - a tarefa 5, da quarta posição, ocupe a sexta posição **ou**
     - a tarefa 3, da sexta posição, ocupe a quarta posição

Lista Tabu baseada em atributos de soluções/movimentos

- Seja s = (2, 6, 1, 5, 4, 3)
- Regras de ativação tabu para movimentos de troca e inserção:

3) Impedir s_i de retornar a *i:*
   - Proibir que a tarefa s_i =5 retorne à quarta posição $i = 4$
4) Impedir s_i de se mover para a posição k, sendo $k \leq i$:
   - Proibir que a tarefa s_i =5 mova para uma posição inferior ou igual à quarta
5) Impedir s_i de se mover para a posição k, sendo $k \leq j$:
   - Proibir que a tarefa s_i =5 mova para qualquer posição inferior ou igual à sexta. No caso, qualquer movimentação da tarefa 5 estaria proibida, já que a sexta posição é a última.
6) Impedir s_i de se mover:
   - Proibir a tarefa s_i =5 de se mover.
7) Impedir s_i e s_j de trocarem de posição:
   - Proibir a tarefa s_i =5 de trocar com qualquer outra, bem como a tarefa s_j=3 com qualquer outra
8) Impedir s_i e s_j de se moverem:
   - Proibir a tarefa s_i = 5 de se mover para qualquer posição, bem como a tarefa s_j =3.

Problema de Alocação de Aulas a Salas

H\S	1	2	3
1	A		
2			D
3		C	D
4	B	C	

s

H\S	1	2	3
1	A		
2			D
3		C	D
4		C	B

s'

- Conjunto de salas; Conjunto de horários
- Cada célula s(i,j) representa a turma que tem aula no horário *i* e sala *j*

Movimento de realocação: Transferir uma aula de uma sala para outra que esteja vazia

Problema de Alocação de Aulas a Salas

H\S	1	2	3
1	A		
2			D
3		C	D
4	B	C	

s

H\S	1	2	3
1	A		
2		D	
3		D	C
4	B		C

s'

- Conjunto de salas; Conjunto de horários
- Cada célula s(i,j) representa a turma que tem aula no horário *i* e sala *j*

Movimento de troca: Trocar as aulas de duas turmas realizadas em salas distintas

Problema de Alocação de Aulas a Salas

H\S	1	2	3
1	A		
2			D
3		C	D
4	B	C	

s

H\S	1	2	3
1	A		
2		D	
3		D	C
4	B		C

s'

- Atributos: aula (definida pelo seu horário i de início) e sua sala j de realização
  - Pares (i_1, j_1) e (i_2, j_2)
- Algumas regras de proibição:
  - Impedir a troca das aulas envolvendo as salas j_1 e j_2, iniciadas no horário $i = \min\{i_1, i_2\}$
  - Impedir que a aula da sala j_1 iniciada no horário i_1 seja mudada para a sala j_2
  - Impedir que a aula da sala j_1 com início no horário i_1 seja mudada
  - Idem, uma das regras anteriores, associadas ao valor da função objetivo antes do movimento.

Critérios de aspiração

- Uma lista tabu baseada em atributos de movimentos/soluções é restritiva:
  - Impede-se não somente o retorno a uma solução já gerada anteriormente, mas também a outras soluções ainda não visitadas

Critérios de aspiração

H\S	1	2	3
1	A		
2			D
3		C	D
4	B	C	

s^0

H\S	1	2	3
1	A		
2			D
3		C	D
4		C	B

s^1

T = {}

T={<4,3,1>}

Movimento = Transferir uma aula de uma sala para outra que esteja vazia

Movimento tabu = <Horário de início, Sala nova, Sala original>

Critérios de aspiração

H\S	1	2	3
1	A		
2	D		
3	D	C	
4		C	B

s^2

H\S	1	2	3
1	A		
2	D		
3	D	C	
4	B	C	

s^3

T = {<4,3,1>, 2,1,3>}

Fazendo-se o movimento tabu <4,3,1> geramos $s^3 \neq s^0$

Critérios de aspiração

- **Ideia**: Retirar a regra de proibição (retirar o *status* tabu de um movimento) sob certas condições.
- Exemplo: retirar a regra de proibição se for gerada uma solução melhor que a melhor solução gerada até então (Critério de aspiração por objetivo global)

Algoritmo básico de Busca Tabu

Algorithm 1 Busca Tabu

1: **Entrada:** $f(.), N(.), A(.), |V|, |T|, s$
2: **Saída:** $s^\star$
3: $s^\star \leftarrow s$ {Melhor solução encontrada até então}
4: $Iter \leftarrow 0$ {Contador do número de iterações}
5: $MelhorIter \leftarrow 0$ {Iteração mais recente que forneceu $s^\star$}
6: $T \leftarrow \emptyset$ {Lista Tabu}
7: Inicialize a função de aspiração A
8: **while** Critério de parada não satisfeito **do**
9: $Iter \leftarrow Iter + 1$
10: Seja $s' \leftarrow s \oplus m$ o melhor elemento de $V \subseteq N(s)$ tal que o movimento m não seja tabu ($m \notin T$) ou s' atenda a condição de aspiração ($f(s') < A(f(s))$)
11: Atualize a lista tabu T
12: $s \leftarrow s'$
13: **if** $f(s) < f(s^\star)$ **then**
14: $s^\star \leftarrow s$
15: $MelhorIter \leftarrow Iter$
16: **end if**
17: Atualize a função de aspiração A
18: **end while**
19: Retorne $s^\star$

Problema da Mochila

- Voltando ao Problema da Mochila …
- Solução $s = (s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_j, \ldots, s_n)$, em que $s_i \in \{0, 1\}$
- Movimento: inverter o valor de um bit
- Atributo: posição de um item
- Regra de ativação: impedir a inversão do valor do bit da posição modificada
- Representação da Lista Tabu:
  - T = {<posição modificada>}
- Seja |T| = 2

Problema da Mochila

Tabela 1.1: Instância do Problema da Mochila 0-1

Item j	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso w_j	4	15	7	9	8	10	9	11
Retorno p_j	2	2	3	4	6	5	8	7

$s^0 = (1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0)^t$

$f(s^0) = 19$

# viz.	$s' \in N(s^0)$	$peso(s')$	$f(s')$
1	$(\mathbf{0}0010110)^t$	28	17
2	$(1\mathbf{1}010110)^t$	47	-534
3	$(10\mathbf{1}10110)^t$	39	-237
4	$(100\mathbf{0}0110)^t$	23	15
5	$(1001\mathbf{1}110)^t$	40	-271
6	$(10010\mathbf{0}10)^t$	22	14
7	$(1001010\mathbf{0})^t$	23	11
8	$(1001011\mathbf{1})^t$	43	-381

O melhor vizinho da solução s^0 é o vizinho #1, que teve o bit da posição #1 alterado.

Problema da Mochila

Tabela 1.1: Instância do Problema da Mochila 0-1

Item j	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso w_j	4	15	7	9	8	10	9	11
Retorno p_j	2	2	3	4	6	5	8	7

$$s^0 = (1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0)^t$$

$f(s^0) = 19$

# viz.	$s' \in N(s^0)$	$peso(s')$	$f(s')$
1	$(\mathbf{0}0010110)^t$	28	17
2	$(1\mathbf{1}010110)^t$	47	-534
3	$(10\mathbf{1}10110)^t$	39	-237
4	$(100\mathbf{0}0110)^t$	23	15
5	$(1001\mathbf{1}110)^t$	40	-271
6	$(10010\mathbf{0}10)^t$	22	14
7	$(1001010\mathbf{0})^t$	23	11
8	$(1001011\mathbf{1})^t$	43	-381

O atributo #1 é, então, adicionado à lista tabu, passando a estar tabu-ativo.

$$T = \{\langle 1 \rangle\}$$

Problema da Mochila

Tabela 1.1: Instância do Problema da Mochila 0-1

Item j	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso w_j	4	15	7	9	8	10	9	11
Retorno p_j	2	2	3	4	6	5	8	7

$s^1 = (00010110)^t$

$f(s^1) = 17$

Tabu:

#	$s' \in N(s^1)$	$peso(s')$	$f(s')$
1	$(10010110)^t$	32	19
2	$(01010110)^t$	43	-388
3	$(00110110)^t$	35	-91
4	$(00000110)^t$	19	13
5	$(00011110)^t$	36	-125
6	$(00010010)^t$	18	12
7	$(00010100)^t$	19	9
8	$(00010111)^t$	39	-235

Mover para o melhor vizinho da solução s^0, isto é, para s^1.

Nesta nova solução, seu vizinho #1 é tabu porque ele tem um atributo tabu-ativo (a posição #1 está na lista tabu)

$$T = \{\langle 1 \rangle\}$$

Problema da Mochila

Tabela 1.1: Instância do Problema da Mochila 0-1

Item j	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso w_j	4	15	7	9	8	10	9	11
Retorno p_j	2	2	3	4	6	5	8	7

$s^1 = (00010110)^t$

$f(s^1) = 17$

Tabu:

#	$s' \in N(s^1)$	$peso(s')$	$f(s')$
1	$(10010110)^t$	32	19
2	$(01010110)^t$	43	-388
3	$(00110110)^t$	35	-91
4	$(00000110)^t$	19	13
5	$(00011110)^t$	36	-125
6	$(00010010)^t$	18	12
7	$(00010100)^t$	19	9
8	$(00010111)^t$	39	-235

O melhor vizinho não-tabu da solução atual s^1 é o vizinho #4, no qual a posição #4 foi modificada, então esse atributo é adicionado à lista tabu.

T = {<1>} ∪ {<4>}

$T = \{\langle 1\rangle, \langle 4\rangle\}$

Problema da Mochila

Tabela 1.1: Instância do Problema da Mochila 0-1

Item j	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso w_j	4	15	7	9	8	10	9	11
Retorno p_j	2	2	3	4	6	5	8	7

$$s^2 = (00000110)$$

$f(s^2) = 13$

	#	$s' \in N(s^2)$	$peso(s')$	$f(s')$
Tabu:	1	$(10000110)^t$	23	15
	2	$(01000110)^t$	34	-59
	3	$(00100110)^t$	26	16
Tabu:	4	$(00010110)^t$	28	17
	5	$(00001110)^t$	27	19
	6	$(00000010)^t$	9	8
	7	$(00000100)^t$	10	5
	8	$(00000111)^t$	30	20

Mover para o melhor vizinho não-tabu da solução s^1, isto é, para s^2.

Os vizinhos #1 e #4 de s^2 são tabus porque eles contêm atributos tabu-ativos (posições 1 e 4).

$$T = \{\langle 1 \rangle, \langle 4 \rangle\}$$

Problema da Mochila

Tabela 1.1: Instância do Problema da Mochila 0-1

Item j	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso w_j	4	15	7	9	8	10	9	11
Retorno p_j	2	2	3	4	6	5	8	7

$$s^2 = (00000110)$$

$f(s^2) = 13$

	#	$s' \in N(s^2)$	$peso(s')$	$f(s')$
Tabu:	1	$(10000110)^t$	23	15
	2	$(01000110)^t$	34	-59
	3	$(00100110)^t$	26	16
Tabu:	4	$(00010110)^t$	28	17
	5	$(00001110)^t$	27	19
	6	$(00000010)^t$	9	8
	7	$(00000100)^t$	10	5
	8	$(00000111)^t$	30	20

Melhor vizinho não-tabu da solução atual = vizinho #8 (gerado pela alteração da posição #8). Esse atributo é adicionado à lista tabu.

Como |T|=2, então pela estratégia FIFO, o atributo tabu-ativo 1 deixa de ser ativo e entra o atributo 8 ao final da lista tabu.

T = {<1>,<4>} \ {<1>} ∪ {<8>}

$$T = \{\langle 4\rangle, \langle 8\rangle\}$$

Problema da Mochila

Tabela 1.1: Instância do Problema da Mochila 0-1

Item j	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso w_j	4	15	7	9	8	10	9	11
Retorno p_j	2	2	3	4	6	5	8	7

$s^3 = (00000111)$

$f(s^3) = 20$

	#	$s' \in N(s^3)$	$peso(s')$	$f(s')$
	1	$(10000111)^t$	34	-52
	2	$(01000111)^t$	45	-459
	3	$(00100111)^t$	37	-162
Tabu:	4	$(00010111)^t$	39	-235
	5	$(00001111)^t$	38	-196
	6	$(00000011)^t$	20	15
	7	$(00000101)^t$	21	12
Tabu:	8	$(00000110)^t$	19	13

Mover para o melhor vizinho não-tabu da solução s^2, i.e, para s^3.

Os vizinhos #4 e #8 de s^3 são tabus

O vizinho #6 (não-tabu) é o melhor. O atributo 6 entra e sai o 4 da lista

T = {<4>,<8>} \ {<4>} ∪ {<6>}

$$T = \{\langle 8\rangle, \langle 6\rangle\}$$

Problema da Mochila

Tabela 1.1: Instância do Problema da Mochila 0-1

Item j	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso w_j	4	15	7	9	8	10	9	11
Retorno p_j	2	2	3	4	6	5	8	7

$s^4 = (00000011)$

$f(s^4) = 15$

#	$s' \in N(s^4)$	$peso(s')$	$f(s')$
1	$(10000011)^t$	24	17
2	$(01000011)^t$	35	-94
3	$(00100011)^t$	27	18
4	$(00010011)^t$	29	19
5	$(00001011)^t$	28	21
6	$(00000111)^t$	30	20
7	$(00000001)^t$	11	7
8	$(00000010)^t$	9	8

Tabu:

Tabu:

Mover para o melhor vizinho não-tabu da solução s^3, i.e., para s^4.

Os vizinhos #6 e #8 de s^4 são tabus

O vizinho #5 (não-tabu) é o melhor. O atributo 5 entra e sai o 8 da lista

T = {<8>,<6>} \ {<8>} ∪ {<5>}

$$T = \{\langle 6\rangle, \langle 5\rangle\}$$

Problema da Mochila

Tabela 1.1: Instância do Problema da Mochila 0-1

Item j	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso w_j	4	15	7	9	8	10	9	11
Retorno p_j	2	2	3	4	6	5	8	7

$s^5 = (00001011)$

$f(s^5) = 21$

	#	$s' \in N(s^5)$	$peso(s')$	$f(s')$
	1	$(1000\,1011)^t$	32	23
	2	$(0100\,1011)^t$	43	-384
	3	$(0010\,1011)^t$	35	-87
	4	$(0001\,1011)^t$	37	-160
Tabu:	5	$(0000\,0011)^t$	20	15
Tabu:	6	$(0000\,1111)^t$	38	-196
	7	$(0000\,1001)^t$	19	13
	8	$(0000\,1010)^t$	17	14

Mover para o melhor vizinho não-tabu da solução s^4, i.e, para s^5.

Os vizinhos #5 e #6 de s^5 são tabus

O vizinho #1 (não-tabu) é o melhor. O atributo 1 entra e sai o 6 da lista

T = {<6>,<5>} \ {<6>} ∪ {<1>}

$$T = \{\langle 5\rangle, \langle 1\rangle\}$$

Problema da Mochila

Tabela 1.1: Instância do Problema da Mochila 0-1

Item j	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso w_j	4	15	7	9	8	10	9	11
Retorno p_j	2	2	3	4	6	5	8	7

$s^6 = (10001011)$

$f(s^6) = 23$

	#	$s' \in N(s^6)$	$peso(s')$	$f(s')$
Tabu:	1	$(00001011)^t$	28	21
	2	$(11001011)^t$	47	-530
	3	$(10101011)^t$	39	-233
	4	$(10011011)^t$	41	-306
Tabu:	5	$(10000011)^t$	24	17
	6	$(10001111)^t$	42	-342
	7	$(10001001)^t$	23	15
	8	$(10001010)^t$	21	16

Mover para o melhor vizinho não-tabu da solução s^5, i.e, para s^6.

Os vizinhos #1 e #5 de s^6 são tabus

O vizinho #8 (não-tabu) é o melhor. O atributo 8 entra e sai o 5 da lista

T = {<5>,<1>} \ {<5>} ∪ {<8>}

$T = \{\langle 1\rangle, \langle 8\rangle\}$

Problema da Mochila

Tabela 1.1: Instância do Problema da Mochila 0-1

Item j	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso w_j	4	15	7	9	8	10	9	11
Retorno p_j	2	2	3	4	6	5	8	7

$$s^7 = (10001010)$$

$f(s^7) = 16$

	#	$s' \in N(s^7)$	$peso(s')$	$f(s')$
Tabu:	1	$(00001010)^t$	17	14
	2	$(11001010)^t$	36	-130
	3	$(10101010)^t$	28	19
	4	$(10011010)^t$	30	20
	5	$(10000010)^t$	13	10
	6	$(10001110)^t$	31	21
	7	$(10001000)^t$	12	8
Tabu:	8	$(10001011)^t$	32	23

Mover para o melhor vizinho não-tabu da solução s^6, i.e, para s^7.

Os vizinhos #1 e #8 de s^7 são tabus

O vizinho #6 (não-tabu) é o melhor. O atributo 6 entra e sai o 1 da lista

T = {<1>,<8>} \ {<1>} ∪ {<6>}

$$T = \{\langle 8\rangle, \langle 6\rangle\}$$

Problema da Mochila

Tabela 1.1: Instância do Problema da Mochila 0-1

Item j	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso w_j	4	15	7	9	8	10	9	11
Retorno p_j	2	2	3	4	6	5	8	7

$s^8 = (10001110)$

$f(s^8) = 21$

	#	$s' \in N(s^8)$	$peso(s')$	$f(s')$
	1	$(00001110)^t$	27	19
	2	$(11001110)^t$	46	-495
	3	$(10101110)^t$	38	-198
	4	$(10011110)^t$	40	-271
	5	$(10000110)^t$	23	15
Tabu:	6	$(10001010)^t$	21	16
	7	$(10001100)^t$	22	13
Tabu:	8	$(10001111)^t$	42	-342

Mover para o melhor vizinho não-tabu da solução s^7, i.e, para s^8.

Os vizinhos #6 e #8 de s^8 são tabus

O vizinho #1 (não-tabu) é o melhor. O atributo 6 entra e sai o 1 da lista

T = {<8>,<6>} \ {<8>} ∪ {<1>}

$T = \{\langle 6\rangle, \langle 1\rangle\}$

Problema da Mochila

Tabela 1.1: Instância do Problema da Mochila 0-1

Item j	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso w_j	4	15	7	9	8	10	9	11
Retorno p_j	2	2	3	4	6	5	8	7

$s^9 = (00001110)$

$f(s^9) = 19$

	#	$s' \in N(s^9)$	$peso(s')$	$f(s')$
Tabu:	1	$(10001110)^t$	31	21
	2	$(01001110)^t$	42	-349
	3	$(00101110)^t$	34	-52
	4	$(00011110)^t$	36	-125
	5	$(00000110)^t$	19	13
Tabu:	6	$(00001010)^t$	17	14
	7	$(00001100)^t$	18	11
	8	$(00001111)^t$	38	-196

Mover para o melhor vizinho não-tabu da solução s^8, i.e, para s^9.

Os vizinhos #1 e #6 de s^9 são tabus

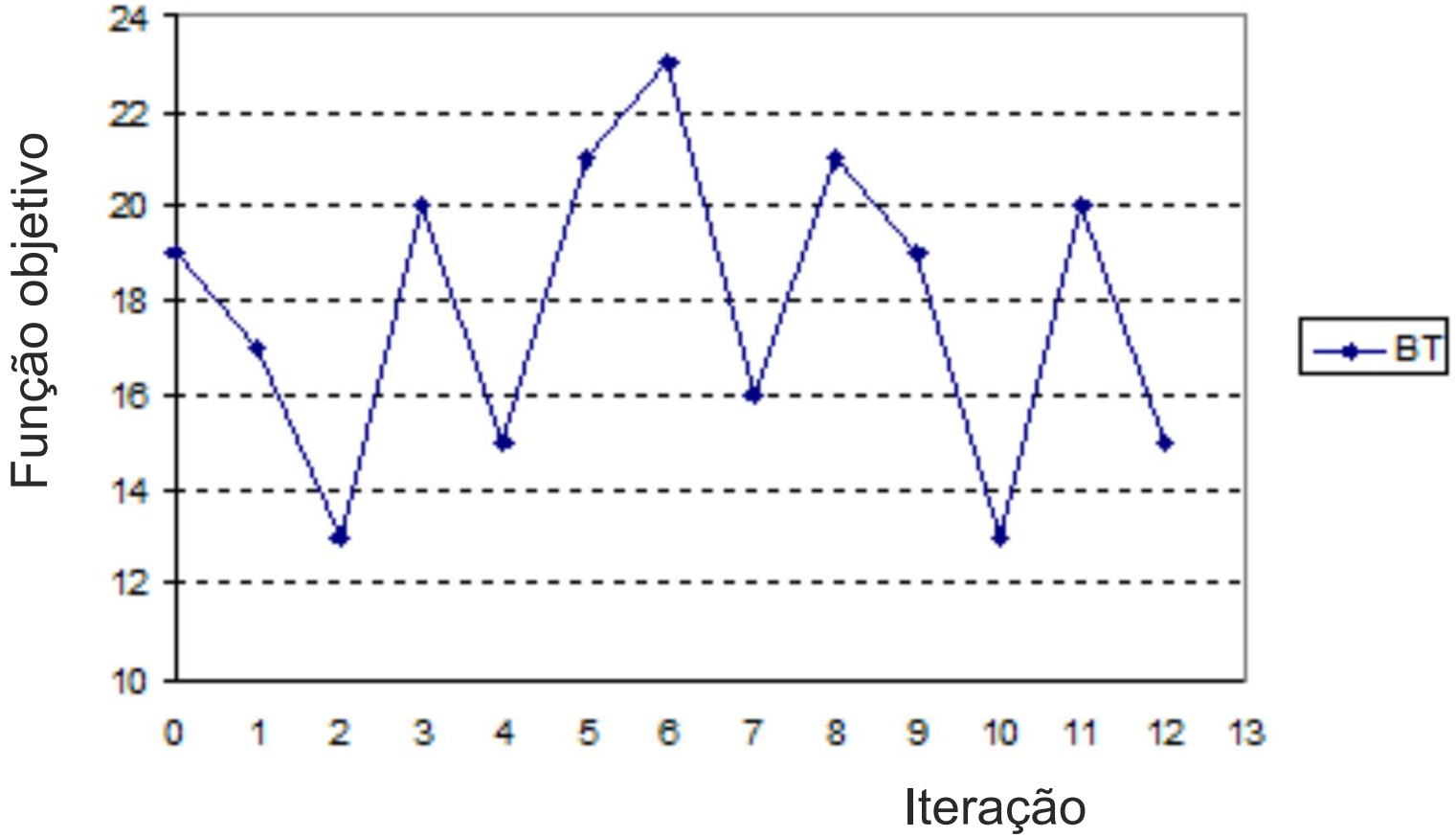
O vizinho #5 (não-tabu) é o melhor. O atributo 5 entra e sai o 1 da lista

T = {<6>,<1>} \ {<6>} ∪ {<5>}

$T = \{\langle 1 \rangle, \langle 5 \rangle\}$

Problema da Mochila

Evolução do valor da função objetivo ao longo das iterações



Implementação da Lista Tabu

- Verificar se um movimento é ou não tabu pode ser dispendioso
- No PM, T = $\{<j_1>,<j_2>,\ldots,<j_{|T|}>\}$
- Considerando vetor de *n* posições e |T| elementos na lista tabu:
  - Pior caso: O(*n*.|T|) avaliações, por iteração

Implementação da Lista Tabu

- **Ideia**: Substituir a lista T por um vetor de *n* posições, em que cada posição *j* armazene a iteração até a qual o atributo está ativo
- T: vetor de prazo tabu (*tabu tenure*)
- Ex.: Na primeira iteração do PM (iter=1), considerando DuraçãoTabu=2, então:
  - T={<1>} é substituída por T=(3,0,0,0,0,0,0,0), sendo:
  - 3 = iter + DuraçãoTabu = 1 + 2
- Significado: O movimento de inverter o bit da primeira posição está tabu-ativo até a iteração 3. Após a terceira iteração, o movimento deixa de ser tabu.

Implementação da Lista Tabu

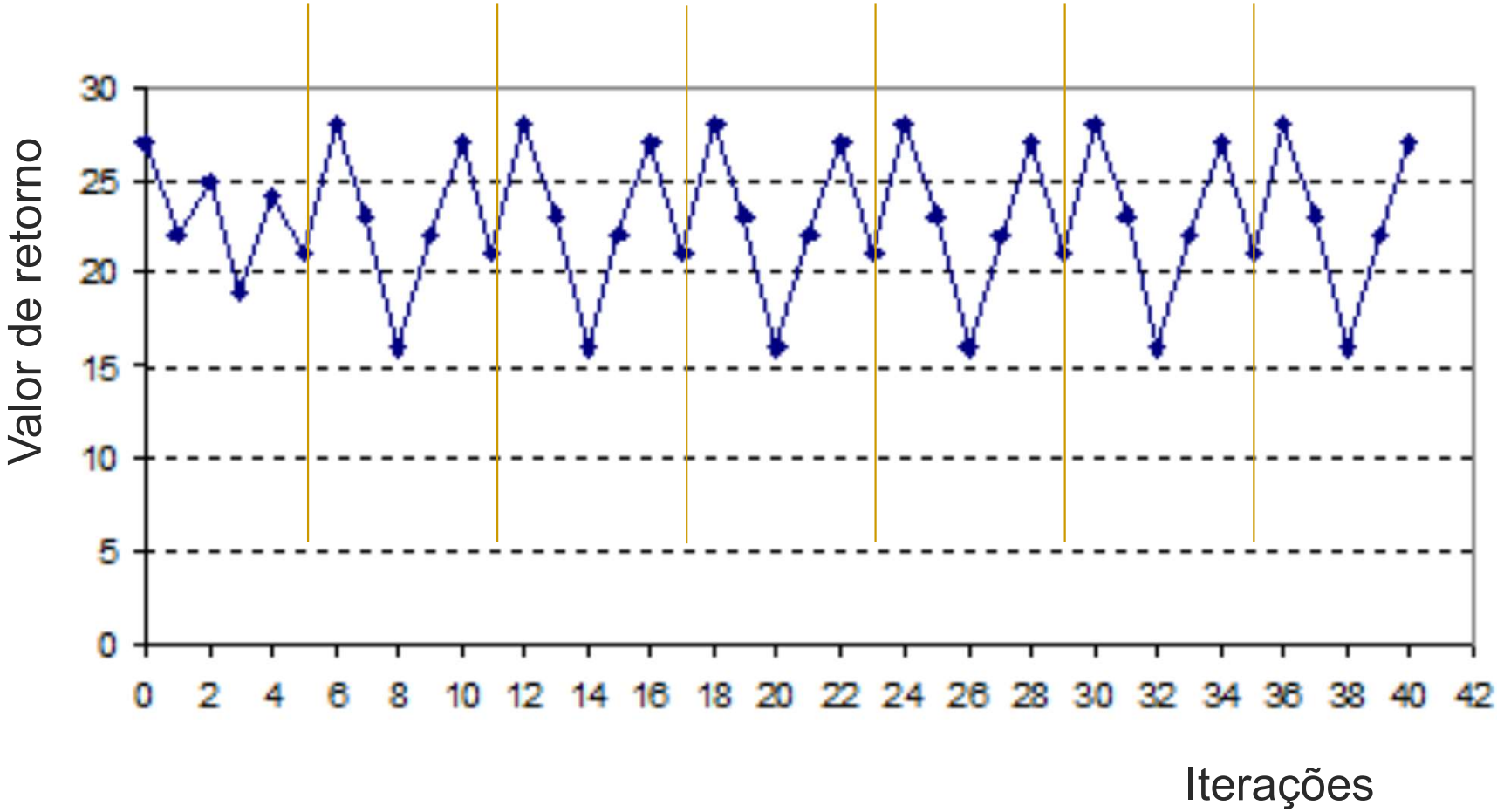
- Com um vetor T de prazo tabu, a verificação se um movimento é tabu ou não é bastante simples.
- Seja *iter* a iteração atual. Então o movimento de inverter o valor do bit da posição *j* é tabu se tivermos: $T(j) \geq iter$
- Ex.: Dado T = (3,0,8,5,9,10,7,11) e *iter* = 10, então são tabus os movimentos envolvendo as posições 6 e 8.
- Complexidade de verificação se um movimento está ou não na “lista”:
  - O(1)

Tamanho da lista

- O tamanho da lista ou a duração tabu do atributo tabu-ativo indica a quantidade máxima de iterações em que cada movimento deve permanece tabu para cumprir seu papel de impedir o retorno a uma solução já visitada anteriormente.
- A duração tabu depende:
  - Do tipo de atributo considerado:
    - Regras de ativação mais restritivas têm duração menor
  - Do tamanho da instância
    - Quanto maior o tamanho, maior a lista (crescimento não-linear)
  - Do estágio da busca
    - Em problemas de programação de horários, vale a pena aumentar o tamanho da lista quando a busca se encontra numa região com soluções de igual valor da função objetivo

Tamanho da lista

- Duração tabu muito pequena:
  - Pode causar ciclagem.



Tamanho da lista

- Duração tabu muito grande:
  - Pode provocar deterioração na qualidade das soluções finais
- A duração tabu pode ser:
  - **Fixa**: a duração não muda durante a busca
  - **Dinâmica**: a duração é definida em um intervalo $[t_{min}, t_{max}]$

Tamanho da lista

- A duração tabu dinâmica pode ser:
  - Aleatória: a duração é selecionada no intervalo $[t_{min}, t_{max}]$
    - Mantém-se fixa a cada $\alpha \times t_{max}$ iterações ou
    - Sorteia-se uma nova duração a cada iteração
  - Sistemática: depende do problema.
    - Exemplo: aumentar e diminuir alternadamente a duração dentro do intervalo
    - $t_{min} = 6$; $t_{max} = 11$
    - Sequência: {6, 9, 8, 11, 7, 10}

Tamanho da lista

- Duração tabu ‘mágica’: 7
- Duração tabu dependente da instância:
  - Osman (1993): PRV; *n* consumidores, *v* veículos
  - $|T| = 8 + (0{,}078 - 0{,}067 \times \rho) \times (n \times v)$
  - $\rho = \sum(\text{demandas consumidores})/(\text{cap. veículos})$
  - $|T| = \max\{7, -40 + 0{,}6 \times \ln(n \times v)$
  - Três possibilidades para a duração:
    - $t_{min} = 0{,}9 \times |T|$
    - $|T|$
    - $T_{max} = 1{,}1 \times |T|$
  - A duração t escolhida é mantida fixa por $2 \times t$ iterações

Tamanho da lista

- Vantagem de variar a duração tabu ao longo da busca:
  - Corrigir o erro porventura existente no dimensionamento empírico desse tempo.
  - Havendo ciclagem com uma duração |T|, então variando-a, haverá alteração na quantidade de movimentos tabus e, assim, diferentes soluções poderão ser geradas.
  - Com essa possibilidade de mudança na trajetória da busca no espaço de soluções, a ocorrência de ciclagem fica reduzida

Tamanho da lista

- A duração tabu depende do atributo e da regra de proibição.
- No PM, considerando que:
  - A cada iteração uma posição é tornada tabu-ativa;
  - Ao final de *n*-1 iterações há apenas um movimento possível.
  - Assim, o limitante superior para a duração tabu de um movimento é *n*-1.

Tamanho da lista

- Em um problema de sequenciamento de *n* tarefas:
  - uma regra que proíbe uma tarefa *i* de ser movida em um movimento de troca
  - reduz para *n*-1 o número de tarefas que podem ser trocadas após sua primeira aplicação.
- Considerando a proibição de uma tarefa a cada iteração, e que para realização do movimento de troca há necessidade de pelo menos duas tarefas liberadas,
  - a última troca possível se realizará na iteração *n*-1.
- Desta forma, *n*-1 é o limitante superior para a duração desta regra de proibição.

Tamanho da lista

- Estudo de limitantes para o problema de sequenciamento de *n* tarefas (Ronconi e Armentano, 2009):

Movimento	Atributo	Regra	Limitante inferior	Limitante superior
Inserção	i	i não pode ser movida	$n/4$	$n/2$
	i	i não pode ser escolhido para inserção	$n/2$	n
	$i, s(i)$	i não pode retornar à posição $s(i)$	$4n$	$5n$
Troca	i, j	i e j não podem ser movidas	$n/4$	$n/2$
	i	i não pode ser movida	$n/2$	$n-1$
	mi	i não pode ser movida para posições $k \leq s(i)$	$n/2$	$3n/2$

Análise da vizinhança

- Em muitos problemas: custoso avaliar a vizinhança completa
- Lista de candidatos:
  - Avaliar apenas soluções que satisfaçam a determinados critérios

Análise da vizinhança

- Programação de tarefas para minimizar o atraso total
- Tarefas: 1, 2, …, n
- Dados:
  - p_j = tempo de processamento da tarefa *j*
  - d_j = data de entrega da tarefa *j*
- Variável de decisão
  - C_j = instante de término de processamento da tarefa *j*
- Função objetivo:

$$\min t = \sum_{j=1}^{n} \max\{0, C_j - d_j\}$$

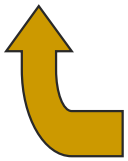
Análise da vizinhança

- Programação de tarefas em uma máquina para minimizar o atraso total
  - Movimento: trocar duas tarefas de posição
  - Tamanho da vizinhança: n(n-1)/2
  - Complexidade da melhor troca: $O(n^2)$
  - Valor do movimento: $f(s') - f(s)$
- Exemplo: 6 tarefas
  - Datas de entrega: (9, 12, 15, 8, 20, 22)
  - Tempos de processamento: (6, 4, 8, 2, 10, 3)
  - Sequência inicial: s = (1, 2, 3, 4, 5, 6) $\Rightarrow$ t = 36
  - Lista de candidatos: $|d_i - d_j| \leq 3$

Análise da vizinhança

Tarefas		t	Valor do movimento	$\lvert d_i - d_j \rvert$	
i	j				
1	2	37	1	3	*
1	3	42	6	6	
1	4	32	-4	1	*
1	5	57	21	11	
1	6	40	4	13	
2	3	39	3	3	*
2	4	30	-6	4	
2	5	56	20	8	
2	6	43	7	10	
3	4	30	-6	7	
3	5	40	4	5	
3	6	30	-6	7	
4	5	44	8	12	
4	6	39	3	14	
5	6	29	-7	2	*

Melhor troca



Análise da vizinhança

- Programação de tarefas para minimizar o atraso total
  - Tamanho da vizinhança completa: 15
  - Tamanho da vizinhança com Lista de candidatos:
    - 4
    - Contém a melhor troca (5, 6)
- Outras estratégias para redução da vizinhança:
  - Primeira melhora
  - Percentual da vizinhança:
    - Em programação de tripulações, trabalhar a cada iteração somente com x% de tripulantes
    - Em alocação de aulas a salas, trabalhar em uma iteração com a segunda-feira; na outra, com a terça e assim por diante

Outros critérios de aspiração

- Critério de aspiração por objetivo regional:
  - Um movimento tabu perde seu status quando for gerada uma solução melhor que a melhor encontrada na região atual de busca.
  - Forma de se delimitar a região atual de busca: registrar a melhor solução encontrada em um passado recente e utilizar o valor dessa solução como critério para aspiração.
  - Por exemplo, considerando um problema de minimização e supondo $f(s^*_R)$ a melhor solução encontrada nas últimas *ContIterRegiao* iterações, então um movimento tabu que guia a uma solução s' tal que $f(s') < f(s^*_R)$ pode ser realizado.
  - Nesta estratégia de aspiração, *ContIterRegiao* é um parâmetro.

Outros critérios de aspiração

- Critério de aspiração *default*:
  - Se todos os movimentos possíveis são tabus e não é possível aplicar outro critério de aspiração, então o movimento mais antigo perde sua condição tabu.
  - Implementação baseada em tempo de permanência na lista, como o do Problema da Mochila:
    - se T(i) $\geq$ *iter*, para todo i, em que *iter* representa a iteração atual,
    - então a inversão do bit da posição k tal que:
      - T(k) = min {T(i) para todo i} pode ser realizada
    - Em outras palavras, se todos os movimentos estão proibidos, então o movimento tabu há mais tempo na "lista" é realizado.

Memória de Longo Prazo

- Uma memória de curto prazo não é suficiente para evitar que a busca fique presa em certas regiões do espaço de soluções.
- A memória de longo prazo pode ser usada com dois objetivos:
  - encorajar o processo de busca a explorar regiões ainda não visitadas: estratégia de diversificação
  - estimular a geração de soluções que contenham atributos encontrados nas soluções já visitadas que sejam historicamente bons: estratégia de intensificação

Memória de Longo Prazo

- Diversificação com memória × reinicialização
- Vantagem da diversificação com memória:
  - Diminui-se o risco de voltar a visitar uma mesma região do espaço de soluções,
    - ⇒ situação que poderia ocorrer se fosse feita uma simples reinicialização

Memória de Longo Prazo

- Tipos de memória de longo prazo:
  - Frequência de transição: computam-se atributos que mudam de uma solução para outra
  - Frequência de residência: computam-se os atributos que são frequentes nas soluções visitadas para usá-los como:
    - estratégia de intensificação (estimulando-os a comporem a solução corrente) e/ou como
    - estratégia para diversificar a busca (neste caso, penalizando-os para desestimular seu uso).

Memória de Longo Prazo

- Aplicação: Problema Generalizado de Atribuição (PGA):
  - Considere *n* tarefas J = {1,2,…,*n*} a serem executadas
  - Existem *m* agentes I = {1,2,…,m} para executar as tarefas
  - A atribuição do agente *i* à tarefa *j,* tem um custo c_{ij} e demanda a_{ij} unidades de recurso do agente *i*
  - Cada agente possui um limite b_i de recursos disponíveis
  - Cada tarefa pode ser atribuida a apenas um agente;
  - Objetivo: determinar o custo mínimo de alocação dos agentes;

Memória de Longo Prazo

- Formulação matemática do (PGA):

$$\min \quad z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s. a:} \quad \sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \qquad \forall\, j \in J$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_{ij} \leq b_i \qquad \forall\, i \in I$$

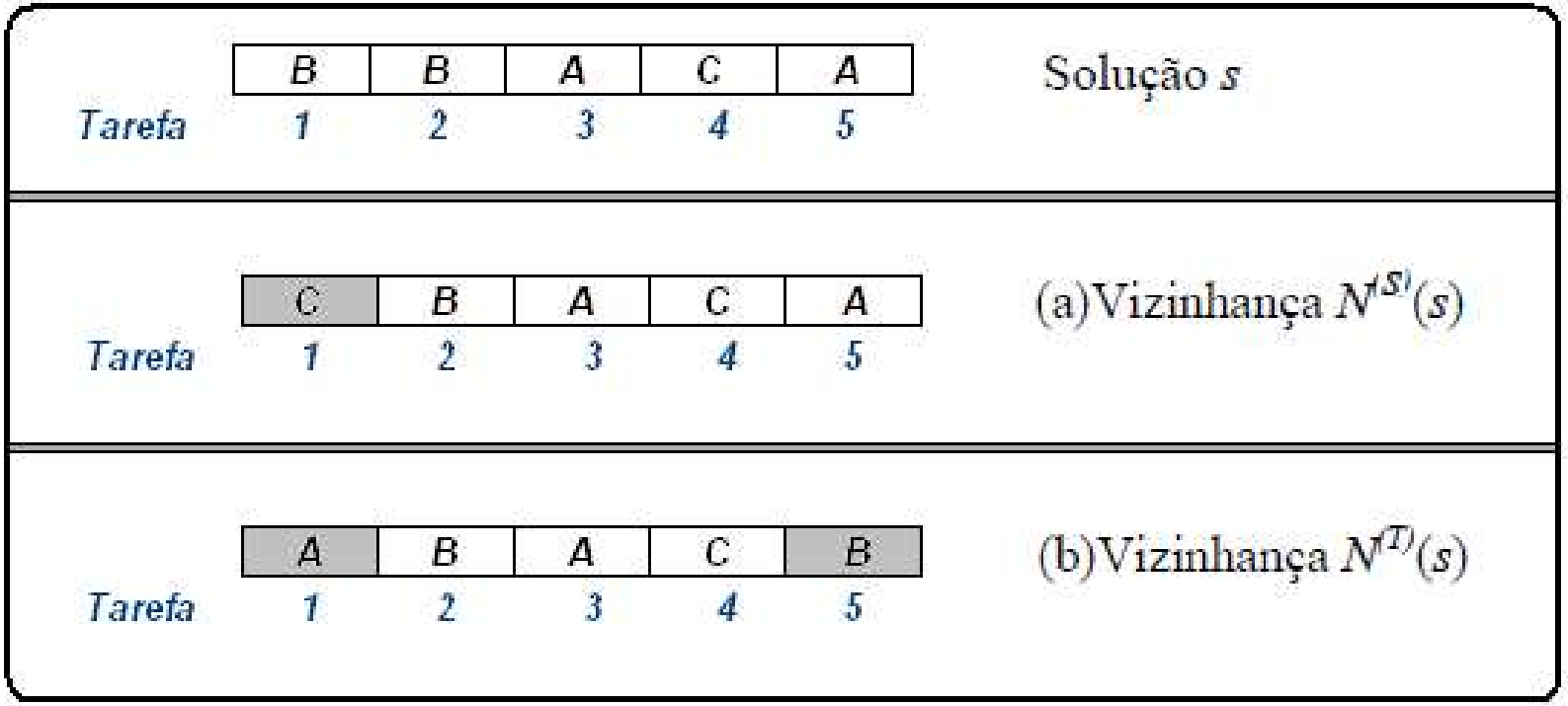
$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall\, i \in I, j \in J$$

Memória de Longo Prazo

- Aplicação: Problema Generalizado de Atribuição (PGA):
  - Representação de uma solução:
    - Vetor de *n* posições
    - s = (s_1, s_2, …, s_j, …, s_n)
    - Em cada posição *j* armazena-se o agente $i=s_j$ responsável pela execução da tarefa *j*, isto é:
      - $s_j = i \Leftrightarrow x_{ij} = 1$
  - Exemplo: Sejam 5 tarefas J = {1, 2, 3, 4, 5} e 3 agentes I = {A, B, C}
    - *s* = (B, B, A, C, A)

Memória de Longo Prazo

- Estruturas de vizinhança para o PGA:
  - Movimentos de substituição: $N^{(S)}(s)$
  - Movimentos de troca: $N^{(T)}(s)$



Memória de Longo Prazo

- Se a tarefa *j* de um agente i_1 é atribuída ao agente i_2,
  - então o par (i_1, *j*) torna-se tabu.
- Função de avaliação para o PGA:
  - Baseada em penalidade

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \rho \times \sum_{i=1}^{m} \max\left\{0, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} - b_i\right\}$$

  - ρ: fator de penalidade associada à violação da capacidade dos agentes

Memória de Longo Prazo

- Memória baseada em frequência de residência
- Matriz *fr* de *m* linhas e *n* colunas
- *fr*(*i*,*j*) = número de vezes que a tarefa *j* ficou alocada ao agente *i*, considerando o total de soluções visitadas até então

Algoritmo BT-PGA de Diáz e Fernández (2006)

Algorithm 3 BT-PGA

1: **Entrada:** s_0, l
2: **Saída:** $s^\star$
3: $T \leftarrow 0$; $fr; \leftarrow 0$; $s^* \leftarrow s_0$; $k \leftarrow 0$;
4: Gere solução inicial s_0;
5: Aplique *MemoriaCurtoPrazo*(k, s^k, $s^\star$, T, fr, Δ);
6: **for all** $iter = 1$ até l **do**
7: { Fase de intensificação }
8: $s^* \leftarrow s^k$;
9: **for all** tarefa j de s^* **do**
10: **if** $fr(s^\star_j, j) > 0,85 \times k$ **then**
11: Fixe a tarefa j ao agente i, isto é, faça $x_{s^\star_j, j} \leftarrow 1$;
12: **end if**
13: **end for**
14: Aplique *MemoriaCurtoPrazo*(k,s^k);
15: { Fase de diversificação }
16: Libere todas as atribuições;
17: Aplique *MemoriaCurtoPrazo*(k, s^k, $s^\star$, T, fr, Δ) por poucas iterações usando $\Delta + fr$ como matriz de custo;
18: Recupere a matriz de custo Δ original;
19: Aplique *MemoriaCurtoPrazo*(k, s^k, $s^\star$, T, fr, Δ);
20: **end for**

Algoritmo BT-PGA de Diáz e Fernández (2006)

Algorithm 4 `MemoriaCurtoPrazo`$(k, s^k, s^\star, T, fr, \Delta)$

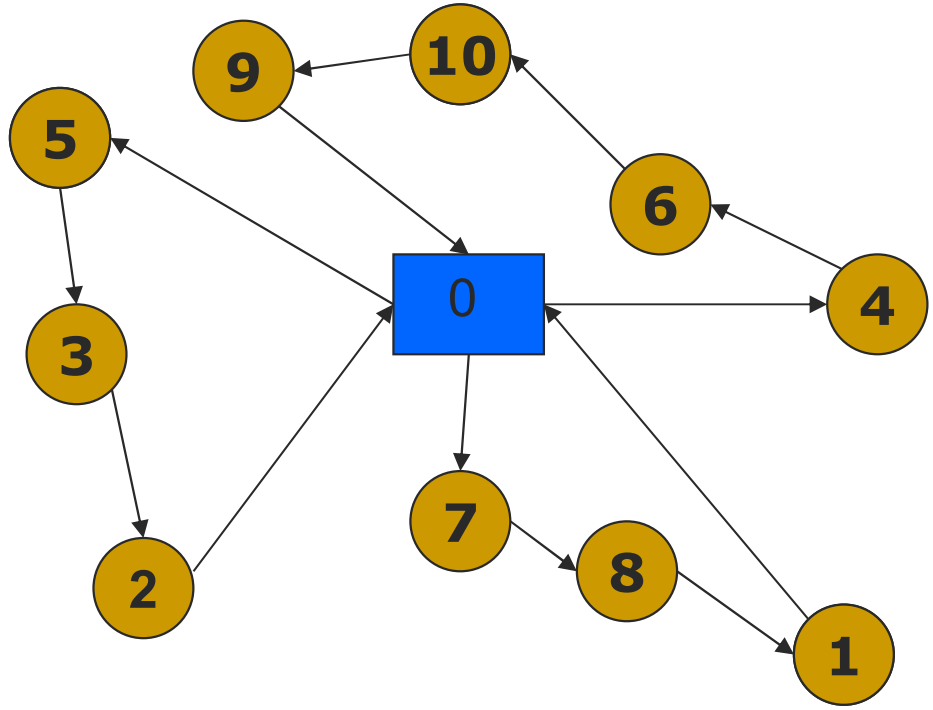
1: **while** Critério de parada não atingido **do**
2: Selecione um vizinho $s^{k+1} \in N(s^k)$;
3: **if** $custo(s^{k+1}) < custo(s^\star)$ **then**
4: $s^\star \leftarrow s^{k+1}$;
5: **end if**
6: Atualize a memória de curto prazo T;
7: Atualize a memória de longo prazo fr;
8: $k \leftarrow k + 1$;
9: **end while**

Oscilação estratégica

- Ideia: Variar as penalizações atribuídas às soluções inviáveis geradas durante o processo de busca, ora aumentando-as, ora diminuindo-as
- Ao aumentar a penalização de movimentos que conduzem a soluções infactíveis, estimula-se a busca a entrar na região de soluções factíveis.
- Ao contrário, quando tal penalização é reduzida ou mesmo anulada, estimula-se a caminhar no espaço de soluções infactíveis.
- Portanto, o uso desta estratégia permite à busca alternar entre soluções factíveis e infactíveis, daí o nome ``oscilação''

Oscilação estratégica

- Em Gendreau *et al*. (1994), os autores tratam o Problema de Roteamento de Veículos penalizando o excesso de carga encontrado em uma solução:
- $f_1(x)$: sobrecarga dos veículos
- ρ: penalidade
- $\rho \leftarrow \alpha \times \rho$



$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} d_{ij} x_{ij} + \rho \times f_1(x)$$

Oscilação estratégica

- O fator α varia de acordo com o seguinte esquema:
  - No início da busca $\alpha \leftarrow 1$.
  - A cada *k* iterações sem melhora:
    - se todas as *k* soluções visitadas são factíveis então $\alpha \leftarrow \alpha / \gamma$;
    - se todas as *k* soluções visitadas são infactíveis então $\alpha \leftarrow \alpha \times \gamma$;
    - se algumas soluções são factíveis e algumas outras são infactíveis, então α permanece inalterado.
- $\gamma = 2$, $k = 10$, $\alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$;
- Durante a oscilação estratégica, a busca é guiada por uma função auxiliar *g* em lugar da função de avaliação original *f*

Oscilação estratégica

- Em Shaefer (1996), foi tratado um problema de programação de horários em escolas por BT.
- Há várias fontes de inviabilidade. Para cada uma delas aplica-se um fator α_i que varia de acordo com o seguinte esquema:
  - No início da busca $\alpha_i \leftarrow 1$.
  - A cada k iterações sem melhora:
    - se todas as k soluções visitadas são factíveis com relação à infactibilidade *i* então $\alpha_i \leftarrow \alpha_i / \gamma$;
    - se todas as k soluções visitadas são infactíveis com relação à infactibilidade *i* então $\alpha_i \leftarrow \alpha_i \times \gamma$;
    - se algumas soluções são factíveis e algumas outras são infactíveis, então α_i permanece inalterado.
- $\gamma \in [1{,}8; 2]$, k = 10, $\alpha_i \in [\alpha_i^{min}, \alpha_i^{max}]$;
- $\alpha_i^{min} = 1$; $\alpha_i^{max} \in \{1, 3, 10\}$

Oscilação estratégica

- Em Díaz e Fernández (2006), a oscilação estratégica foi incorporada ao algoritmo BT para resolver o PGA. A penalidade ρ por ocorrer uma solução inviável é atualizada como segue:

$$\rho \leftarrow \rho \times \alpha^{(ninv/(niter-1)-1)}$$

- *ninv* = número de soluções inviáveis geradas nas últimas *niter* iterações
- $\rho \in [\alpha^{-1} \times \rho, \alpha^{1/(niter\ -1)} \times \rho]$
- ρ aumenta de valor somente quando todas as soluções são inviáveis
- No início: $\alpha = 1$; $\rho = 1$;
- Após ser encontrada uma solução viável: $\alpha = 2$;
- Quando a melhor solução não é alterada há 100 iterações, $\alpha \leftarrow \alpha + 0{,}005$ a cada 10 iterações até que uma nova melhor solução seja encontrada (neste caso, α é reiniciado com valor 2);
- $\alpha \in [2, 3]$;

Referências

Allahverdi, A., Ng, C. T., Cheng, T. C. E. and Kovalyov, M. Y. (2008). A survey of scheduling problems with setup times or costs, *European Journal of Operational Research* **187**: 985–1032.

Archetti, C., Speranza, M. G. and Hertz, A. (2006). A tabu search algorithm for the split delivery vehicle routing problem, *Transportation Science* **40**: 64–73.

Battiti, R. (1996). Reactive search: Toward self-tuning heuristics, *in* V. Rayward-Smith, I. Osman, C. Reeves and G. Smith (eds), *Modern Heuristic Search Methods*, John Wiley & Sons, New York, chapter 4, pp. 61–83.

Battiti, R. and Tecchiolli, G. (1994). The reactive tabu search, *ORSA Journal of Computing* **6**: 126–140.

Buscher, U. and Shen, L. (2009). An integrated tabu search algorithm for the lot streaming problem in job shops, *European Journal of Operational Research* **199**: 385–399.

Cordeau, J. F., Gendreau, M., Laporte, G., Potvin, J. Y. and Semet, F. (2002). A guide to vehicle routing problem, *Journal of the Operational Research Society* **53**: 512–522.

de Werra, D. and Hertz, A. (1989). Tabu search techniques: A tutorial and an application to neural networks, *OR Spektrum* **11**: 131–141.

Referências

Díaz, J. A. and Fernández (2001). A tabu search heuristic for the generalized assignment problem, *European Journal of Operational Research* **132**: 22–38.

França, P. M. (2009). Busca tabu. Disponível em http://www.densis.fee.unicamp.br/ franca/EA043/Transpa-Cap-4a.pdf.

Gendreau, M. (2002). Recent advances in tabu search, *in* C. C. Ribeiro and P. Hansen (eds), *Essays and Surveys in Metaheuristics*, Kluwer Academic Publishers, pp. 369–377.

Gendreau, M. (2003). An introduction to tabu search, *in* F. Glover and G. A. Kochenberger (eds), *Handbook of Metaheuristics*, Kluwer Academic Publishers, chapter 2, pp. 37–54.

Gendreau, M., Guertin, F., Potvin, J.-Y. and Taillard, E. D. (1999). Parallel tabu search for real-time vehicle routing and dispatching, *Transportation Science* **33**: 381–390.

Gendreau, M., Hertz, A. and Laporte, G. (1994). A tabu search heuristic for the vehicle routing problem, *Management Science* **40**: 1276–1290.

Gendreau, M., Laporte, G. and Séguin, R. (1996). A tabu search heuristic for the vehicle routing problem with stochastic demands and customers, *Operations Research* **44**: 469–477.

Referências

Gendreau, M., Soriano, P. and Salvail, L. (1993). Solving the maximum clique problem using a tabu search approach, *in* F. Glover, M. Laguna and E. Taillard (eds), *Tabu Search*, Vol. 41 of *Annals of Operations Research*, J. C. Baltzer AG, pp. 385–403.

Glover, F. (1977). Heuristics for integer programming using surrogate constraints, *Decision Sciences* **8**: 156–166.

Glover, F. (1986). Future paths for integer programming and links to artificial intelligence, *Computers and Operations Research* **5**: 553–549.

Glover, F. and Laguna, M. (1997). *Tabu Search*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Glover, F., Taillard, E. and de Werra, D. (1993). A user's guide to tabu search, *in* P. L. Hammer (ed.), *Tabu Search*, Vol. 41 of *Annals of Operations Research*, Baltzer Science Publishers, Amsterdan, pp. 3–28.

Hansen, P. (1986). The steepest ascent mildest descent heuristic for combinatorial programming, *Congress on Numerical Methods in Combinatorial Optimization*, Capri, Italy.

Hertz, A. and de Werra, D. (1990). The tabu search metaheuristic: how we used it, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* **1**: 111–121.

Referências

Laguna, M. (1994). A guide to implement tabu search, *Investigación Operativa* **4**: 5–25.

Osman, I. H. (1993). The vehicle routing problem, *in* F. Glover, M. Laguna and E. Taillard (eds), *Tabu Search*, Vol. 41 of *Annals of Operations Research*, J. C. Baltzer AG, pp. 421–451.

Ronconi, D. and Armentano, V. (2009). Busca tabu para a minimização do tempo total de atraso no problema de flowshop, *Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento* **1**: 50–62.

Santos, H. G., Ochi, L. S. and Souza, M. J. F. (2005). A tabu search heuristic with efficient diversification strategies for the class/teacher timetabling problem, *ACM Journal of Experimental Algorithmics* **10**: art–2.09. 15 p.

Souza, M. J. F. (2000). *Programação de horários em escolas: uma aproximação por metaheurísticas*, Tese de doutorado, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Souza, M. J. F., Ochi, L. S. and Maculan, N. (2004). A grasp-tabu search algorithm for solving school timetabling problems, *in* M. G. C. Resende and J. P. Souza (eds), *Metaheuristics: Computer Decision-Making*, Vol. 1153, Kluwer Academic Publishers, pp. 659–672.

Referências

Wan, G. and Yen, B. P. C. (2002). Tabu search for single machine scheduling with distinct due windows and weighted earliness/tardiness penalties, *European Journal of Operational Research* **142**: 271–281.

Yagiura, M., Glover, F. and Ibaraki, T. (2006). A path relinking approach with ejection chains for the generalized assignment problem, *European Journal of Operational Research* **169**: 548–569.

Contato

- marcone@ufop.edu.br
- http://www.decom.ufop.br/prof/marcone