Cálculo Numérico, Notas de aula, 2018.
© Departamento de Computação, Universidade Federal de Ouro Preto.

Sistemas Lineares

Marcone Jamilson Freitas Souza, Departamento de Computação, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, 35400-000 Ouro Preto, MG, Brasil. Homepage: http://www.decom.ufop.br/prof/marcone, E-mail: marcone@ufop.edu.br

1 Introdução

Propõe-se, neste capítulo, apresentar métodos numéricos para resolver sistemas lineares postos na forma:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. \tag{1.1}$$

ou, equivalentemente:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.2}$$

isto é, resolveremos sistemas lineares nos quais o número de equações é igual ao de incógnitas.

Na forma matricial, um sistema linear é representado por $Ax = b$, em que:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Matriz dos coeficientes}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Vetor das variáveis (ou incógnitas)}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Vetor dos termos independentes}$$

É comum também representar o sistema $Ax = b$ pela sua matriz aumentada, isto é, por:

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \longrightarrow \text{Matriz aumentada do sistema}$$

Definição: Denomina-se vetor solução (ou simplesmente solução) de uma sistema $Ax = b$, e denota-se por $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n]^t$, ao vetor das variáveis que contém os elementos $\bar{x}_j$, $j = 1, \cdots, n$, que satisfazem a todas as equações do sistema.

2 Classificação de um sistema com relação ao número de soluções

Com relação ao número de soluções, um sistema linear pode ser classificado em:

(a) Compatível e determinado: Quando houver uma única solução;
(b) Compatível e indeterminado: Quando houver uma infinidade de soluções;
(c) Incompatível: Quando o sistema não admitir solução;

3 Sistemas Triangulares

3.1 Sistema Triangular Superior

Denomina-se sistema triangular superior a todo sistema $Ax = b$ em que $a_{ij} = 0 \ \ \forall j < i$, ou seja, a sistemas da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\quad a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.3}$$

Tais sistemas são resolvidos por substituições retroativas, por meio de equações da forma:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \qquad \forall i = n, \ldots, 1 \tag{3.4}$$

3.1.1 Discussão da solução

1. Se $a_{ii} \neq 0 \ \ \forall i \Longrightarrow$ Sistema compatível e determinado;
2. Se $a_{ii} = 0$ para algum i há dois casos a analisar:
   (a) Se $b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \Longrightarrow$ Sistema compatível e indeterminado
   (b) Se $b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j \neq 0 \Longrightarrow$ Sistema incompatível

3.1.2 Algoritmo

Apresentamos, pela Figura 1, o pseudocódigo do procedimento que resolve um sistema triangular superior por intermédio de substituições retroativas. Supõe-se neste procedimento que $a_{ii} \neq 0 \ \ \forall i$, isto é, que os elementos diagonais da matriz dos coeficientes do sistema são todos não-nulos.

procedimento *SubstituicaoRetroativa(n,A,b,x)*;
1 $x_n \leftarrow b_n/a_{nn}$;
2 para i de $n-1$ até 1 passo -1 faça
3 $\quad SOMA \leftarrow 0$;
4 $\quad$ para j de $i+1$ até n faça
5 $\quad\quad SOMA \leftarrow SOMA + a_{ij} \times x_j$;
6 $\quad$ fim-para;
7 $\quad x_i \leftarrow (b_i - SOMA)/a_{ii}$;
8 fim-para;
9 Retorne x; { Retorne o vetor solução }
fim *SubstituicaoRetroativa*;

Figura 1: Algoritmo para resolver sistemas triangulares superiores

3.2 Sistema Triangular Inferior

Denomina-se sistema triangular inferior a todo sistema $Ax = b$ em que $a_{ij} = 0 \ \forall j > i$, ou seja, a sistemas da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & & & & & & & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & & & & & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases} \tag{3.5}$$

Tais sistemas são resolvidos por substituições progressivas através de equações da forma:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \qquad \forall i = 1, \ldots, n \tag{3.6}$$

3.2.1 Discussão da Solução

1. Se $a_{ii} \neq 0 \ \forall i \Longrightarrow$ Sistema compatível e determinado;

2. Se $a_{ii} = 0$ para algum i há dois casos a considerar:

   (a) Se $b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j = 0 \Longrightarrow$ Sistema compatível e indeterminado

   (b) Se $b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j \neq 0 \Longrightarrow$ Sistema incompatível

3.2.2 Algoritmo

O pseudocódigo do procedimento para resolver um sistema triangular inferior por meio de substituições progressivas é mostrado na Figura 2. Supõe-se neste procedimento que $a_{ii} \neq 0 \ \forall i$.

```
procedimento SubstituicaoProgressiva(n,A,b,x);
1  para i de 1 até n faça
2      SOMA ← 0;
3      para j de 1 até i − 1 faça
4          SOMA ← SOMA + a_ij × x_j;
5      fim-para;
6      x_i ← (b_i − SOMA)/a_ii;
7  fim-para;
8  Retorne x;     { Retorne o vetor solução }
fim SubstituicaoProgressiva;
```

Figura 2: Algoritmo para resolver sistemas triangulares inferiores

4 Métodos Numéricos

Os métodos numéricos destinados a resolver sistemas lineares são divididos em dois grupos: os métodos diretos e os métodos iterativos.

5 Métodos Diretos

São métodos que produzem a solução exata de um sistema, a menos de erros de arredondamento, depois de um número finito de operações aritméticas.

Com esses métodos é possível determinar, a priori, o tempo máximo gasto para resolver um sistema, uma vez que sua complexidade é conhecida.

A clássica Regra de Cramer, ensinada no ensino médio, é um método direto. Entretanto, pode-se mostrar que o número máximo de operações aritméticas envolvidas na resolução de um sistema $n \times n$ por este método é $(n+1)(n!n-1)+n$. Assim, um computador que efetua uma operação aritmética em 10^{-8} segundos gastaria cerca de 36 dias para resolver um sistema de ordem $n = 15$. A complexidade exponencial desse algoritmo inviabiliza sua utilização em casos práticos.

O estudo de métodos mais eficientes torna-se, portanto, necessário, uma vez que, em geral, os casos práticos exigem a resolução de sistemas lineares de porte mais elevado.

Apresentaremos, a seguir, métodos mais eficientes, cuja complexidade é polinomial, para resolver sistemas lineares. Antes, porém, introduziremos uma base teórica necessária à apresentação de tais métodos.

Transformações elementares: Denominam-se *transformações elementares* as seguintes operações efetuadas sobre as equações (ou linhas da matriz aumentada) de um sistema linear:

1. Trocar duas equações:
   $L_i \leftarrow L_j$;
   $L_j \leftarrow L_i$;
2. Multiplicar uma equação por uma constante não-nula:
   $L_j \leftarrow c \times L_j$; $\quad c \in \mathbb{R},\ c \neq 0$
3. Adicionar a uma equação um múltiplo de uma outra equação:
   $L_j \leftarrow L_j + c \times L_i$; $\quad c \in \mathbb{R}$

Sistemas equivalentes: Dois sistemas $Ax = b$ e $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$ se dizem *equivalentes* se a solução de um for também solução do outro.

Teorema: Seja $Ax = b$ um sistema linear. Aplicando-se somente transformações elementares sobre as equações de $Ax = b$, obtemos um novo sistema $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$, sendo que $Ax = b$ e $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$ são equivalentes.

5.1 Método de Gauss

O método de Gauss consiste em operar transformações elementares sobre as equações de um sistema $Ax = b$ até que, depois de $n-1$ passos, se obtenha um sistema triangular superior, $Ux = c$, equivalente ao sistema dado, sistema esse que é resolvido por substituições retroativas.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]}_{Ax=b} \xrightarrow{\text{Transf. Elem.}} \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right]}_{Ux=c}$$

5.1.1 Descrição do Método

Para descrevermos o método, consideraremos o sistema linear 4×4 abaixo.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 7x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 14,308 \\ 3x_1 & + & 11x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & 25,744 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 8x_3 & + & 2x_4 & = & -3,872 \\ 10x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 36,334 \end{array}\right. \tag{5.7}$$

A resolução deste sistema pelo método de Gauss envolve duas fases distintas. A primeira, chamada de fase de eliminação, consiste em transformar o sistema dado em um sistema triangular superior. A segunda, chamada de fase de substituição, consiste em resolver o sistema triangular superior através de substituições retroativas.

Para aplicar a primeira fase, utilizemos o quadro abaixo, onde cada grupo de linhas representa um passo (ou estágio) da obtenção do sistema triangular superior. Trabalharemos com 3 dígitos com arredondamento na apresentação em ponto flutuante.

Tabela 1: Fase de eliminação

Linha	Multiplicadores	Coeficientes das incógnitas				Termos Ind.	Transformações Elementares
$L_1^{(0)}$		7	4	-2	1	14,308	
$L_2^{(0)}$	$m_{21} = -3/7 = -0,429$	3	11	4	-5	25,744	
$L_3^{(0)}$	$m_{31} = 2/7 = 0,286$	-2	3	8	2	-3,872	
$L_4^{(0)}$	$m_{41} = -10/7 = -1,429$	10	-5	1	-3	36,334	
$L_2^{(1)}$		0	9,284	4,858	-5,429	19,606	$L_2^{(1)} \leftarrow -0,429 \times L_1^{(0)} + L_2^{(0)}$
$L_3^{(1)}$	$m_{32} = -4,144/9,284 = -0,446$	0	4,144	7,428	2,286	0,220	$L_3^{(1)} \leftarrow 0,286 \times L_1^{(0)} + L_3^{(0)}$
$L_4^{(1)}$	$m_{42} = 10,716/9,284 = 1,154$	0	-10,716	3,858	-4,429	15,888	$L_4^{(1)} \leftarrow -1,429 \times L_1^{(0)} + L_4^{(0)}$
$L_3^{(2)}$		0	0	5,261	4,707	-8,524	$L_3^{(2)} \leftarrow -0,446 \times L_2^{(1)} + L_3^{(1)}$
$L_4^{(2)}$	$m_{43} = -9,464/5,261 = -1,799$	0	0	9,464	-10,694	38,513	$L_4^{(2)} \leftarrow 1,154 \times L_2^{(1)} + L_4^{(1)}$
$L_4^{(3)}$		0	0	0	-19,162	53,848	$L_4^{(3)} \leftarrow -1,799 \times L_3^{(2)} + L_4^{(2)}$

Detalhemos a Tabela 1. Nela constam 3 passos:
Passo $k = 1$:
pivô: $a_{11}^{(0)} = 7$
Linha pivotal: $L_1^{(0)}$
Objetivo: zerar os elementos abaixo do pivô $a_{11}^{(0)}$.
Ao final do primeiro passo obtemos o sistema $A^1x = b^1$ equivalente ao sistema dado, em que:

$$[A^{(1)} \mid b^{(1)}] = \left[\begin{array}{rrrrcr} 7 & 4 & -2 & 1 & | & 14,308 \\ 0 & 9,284 & 4,858 & -5,429 & | & 19,606 \\ 0 & 4,144 & 7,428 & 2,286 & | & 0,220 \\ 0 & -10,716 & 3,858 & -4,429 & | & 15,888 \end{array}\right]$$

Passo $k = 2$:
pivô: $a_{22}^{(1)} = 9,284$
Linha pivotal: $L_2^{(1)}$
Objetivo: zerar os elementos abaixo do pivô $a_{22}^{(1)}$.
Ao final do segundo passo obtemos o sistema $A^{(2)}x = b^{(2)}$ equivalente ao sistema dado, isto é:

$$[A^{(2)} \mid b^{(2)}] = \left[\begin{array}{rrrrcr} 7 & 4 & -2 & 1 & | & 14,308 \\ 0 & 9,284 & 4,858 & -5,429 & | & 19,606 \\ 0 & 0 & 5,261 & 4,707 & | & -8,524 \\ 0 & 0 & 9,464 & -10,694 & | & 38,513 \end{array}\right]$$

Passo $k = 3$:
pivô: $a_{33}^{(2)} = 5,261$
Linha pivotal: $L_3^{(2)}$
Objetivo: zerar os elementos abaixo do pivô $a_{33}^{(2)}$.
Ao final do terceiro passo obtemos o sistema $A^{(3)}x = b^{(3)}$ equivalente ao sistema dado:

$$[A^{(3)} \mid b^{(3)}] = \left[\begin{array}{rrrrcr} 7 & 4 & -2 & 1 & | & 14,308 \\ 0 & 9,284 & 4,858 & -5,429 & | & 19,606 \\ 0 & 0 & 5,261 & 4,707 & | & -8,524 \\ 0 & 0 & 0 & -19,162 & | & 53,848 \end{array}\right]$$

Portanto, ao final de 3 passos, o sistema $Ax = b$, expresso por (5.7), foi transformado no seguinte sistema triangular superior $A^3x = b^3$, equivalente ao sistema original:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 7x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 14,308 \\ & & 9,284x_2 & + & 4,858x_3 & - & 5,429x_4 & = & 19,606 \\ & & & & 5,261x_3 & + & 4,707x_4 & = & -8,524 \\ & & & & & - & 19,162x_4 & = & 53,848 \end{array}\right. \tag{5.8}$$

Terminada a fase de eliminação, passamos, agora, à fase de substituição, resolvendo o sistema anterior por meio das seguintes substituições retroativas:
$x_4 = \frac{-53,848}{19,162} = -2,810$
$x_3 = \frac{-8,524-4,707\times(-2,810)}{5,261} = 0,894$
$x_2 = \frac{19,606+5,429\times(-2,810)-4,858\times 0,894}{9,284} = 0,001$
$x_1 = \frac{14,308-4\times 0,001+2\times 0,894+2,810}{7} = 2,700$

Portanto, a solução do sistema é:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 2,700 \\ 0,001 \\ 0,894 \\ -2,810 \end{bmatrix}$$

5.1.2 Avaliação do Resíduo/Erro

O erro ε produzido por uma solução $\bar{x}$ do sistema $Ax = b$ pode ser avaliado pela Equação (5.9):

$$\varepsilon = \max_{1 \le i \le n} |r_i| \tag{5.9}$$

sendo r_i a i-ésima componente do vetor resíduo R, dado pela Equação (5.10):

$$R = b - A\bar{x} \tag{5.10}$$

Para o exemplo considerado, o vetor resíduo é:

$$R = b - A\bar{x} = \begin{bmatrix} 14,308 \\ 25,744 \\ -3,872 \\ 36,334 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & 11 & 4 & -5 \\ -2 & 3 & 8 & 2 \\ 10 & -5 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,700 \\ 0,001 \\ 0,894 \\ -2,810 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,002 \\ 0,007 \\ -0,007 \\ 0,015 \end{bmatrix}$$

Assim, o erro ε cometido vale:

$$\varepsilon = \max_{1 \le i \le n} |r_i| = \max_{1 \le i \le 4} \{|0,002|, |0,007|, |-0,007|, |0,015|\} = 0,015$$

5.1.3 Algoritmo

Apresentamos, a seguir, o pseudocódigo do procedimento relativo à fase de eliminação do método de Gauss. À ele se segue o procedimento de substituição retroativa descrito à página 3. Esse algoritmo supõe que os elementos diagonais (a_{kk}) são não-nulos. Na hipótese de existir algum $a_{kk} = 0$, esse elemento deve ser colocado em outra posição fora da diagonal principal, por intermédio de operações de troca de linhas e/ou colunas.

```
procedimento Eliminacao(n,A,b);
1  para k de 1 até n − 1 faça
2      para i de k + 1 até n faça
3          m ← −a_ik/a_kk;
4          para j de k + 1 até n faça
5              a_ij ← a_ij + m × a_kj;
6          fim-para;
7          b_i ← b_i + m × b_k;
8      fim-para;
9  fim-para;
10 Retorne A e b;      { Retorne a matriz aumentada modificada }
fim Eliminacao;
```

Figura 3: Algoritmo da fase de eliminação do método de Gauss

Tabela 2: Complexidade de pior caso do Método de Gauss

Fase	**Divisões**	**Multiplicações**	**Adições**	**Total**
1	$n-1$	$n(n-1)$	$n(n-1)$	
2	$n-2$	$(n-1)(n-2)$	$(n-1)(n-2)$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$n-1$	1	(2).(1)	(2).(1)	
Eliminação	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$	$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$	$\frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$
	n	$0+1+\cdots+(n-1)$	$0+1+\cdots+(n-1)$	
Substituição	n	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	n^2
TOTAL	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$	$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$	$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$	$\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$

5.1.4 Complexidade

Para avaliar o número máximo de operações aritméticas envolvidas na resolução de um sistema $n \times n$ pelo método de Gauss, mostra-se, pela Tabela 2, a complexidade de pior caso das fases de eliminação e substituição.

Na Tabela 2 são usados os seguintes resultados, dados pelas Equações (5.11) e (5.12):

$$\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N-1)}{2} \tag{5.11}$$

$$\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \tag{5.12}$$

Como se observa, o método de Gauss tem complexidade polinomial $O(n^3)$. Um computador que faz uma operação aritmética em 10^{-8} segundos gastaria $0,0000257$ segundos para resolver um sistema 15×15 (Um tempo infinitamente inferior àquele gasto pela Regra de Cramer, conforme dito à página 4).

5.1.5 Observações Finais

No método de Gauss, os multiplicadores do passo k da fase de eliminação são calculados pela expressão:

$$m_{ik}^{(k)} = -\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \qquad \forall i = k+1, \cdots, n \tag{5.13}$$

Observe que o pivô do k-ésimo passo da fase de eliminação é sempre $a_{kk}^{(k-1)}$, isto é, o elemento diagonal da matriz $A^{(k-1)}$ do sistema transformado $A^{(k-1)}x = b^{(k-1)}$ obtido no passo anterior.

Desvantagens do método de Gauss:

(i) Não pode ser aplicado quando o pivô for nulo ($a_{kk} = 0$);

(ii) Os erros de arredondamento cometidos durante um passo da obtenção do sistema triangular se propagam para os passos seguintes, podendo comprometer a validade da solução obtida.

Para contornar o problema (i) e minimizar o problema (ii), a ideia é usar uma estratégia de pivoteamento, conforme a seguir se descreve.

5.2 O Método de Gauss com Pivotação Parcial

Esta estratégia de pivoteamento consiste em:

(i) No início da etapa k da etapa de eliminação, escolher para pivô o maior elemento, em módulo, dentre os coeficientes:

$$a_{ik}^{(k-1)}; \quad i = k, k+1, \cdots, n$$

(ii) Trocar as linhas k e i se necessário

Exemplo: Resolver o sistema a seguir, avaliando o erro cometido em cada caso:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 0,0002x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 6 \end{array} \right. \tag{5.14}$$

(a) Pelo método de Gauss

(b) Pelo método de Gauss com pivotação parcial

Resolução do item (a):

A Tabela 3 apresenta a fase de eliminação do Método de Gauss aplicado ao sistema linear 5.14.

Tabela 3: Fase de eliminação do Método de Gauss do sistema (5.14)

Linha	**Multiplicadores**	**Coeficientes das incógnitas**		**Termos Ind.**	**Transformações Elementares**
$L_1^{(0)}$		$0,002$	2	5	
$L_2^{(0)}$	$m_{21} = -2/0,002 = -10^4$	2	2	6	
$L_2^{(1)}$		0	-19998	-49994	$L_2^{(1)} \leftarrow -10000 \times L_1^{(0)} + L_2^{(0)}$

Tendo triangularizado a matriz dos coeficientes do sistema (5.14), passemos à fase de resolução do sistema triangular (5.15), o qual é equivalente ao sistema dado:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 0,0002x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \\ & & -19998x_2 & = & -49994 \end{array} \right. \tag{5.15}$$

cuja solução é:

$$\bar{x} = \left[\begin{array}{r} 0,0001 \\ 2,4999 \end{array} \right]$$

Avaliemos o resíduo R e o erro ε produzido por esta solução.

$$R = b - A\bar{x} = \left[\begin{array}{r} 5 \\ 6 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{r} 4,9998 \\ 5 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{r} 0,0002 \\ 1 \end{array} \right]$$

$$\varepsilon = \max_{1 \leq i \leq n} |r_i| = \max_{1 \leq i \leq 2} \{|0,002|, |1|\} = 1$$

Resolução do item (b):

A Tabela 4 apresenta a fase de eliminação do Método de Gauss, com pivotação parcial, aplicado ao sistema linear (5.14).

Tabela 4: Fase de eliminação do Método de Gauss c/ pivotação aplicado ao sistema (5.14)

Linha	Multiplicadores	Coeficientes das incógnitas		Termos Ind.	Transformações Elementares
$L_1^{(0)}$		0,0002	2	5	
$L_2^{(0)}$		2	2	6	
$L_1^{(0)'}$		2	2	6	$L_1^{(0)'} \leftarrow L_2^{(0)}$
$L_2^{(0)'}$	$m_{21} = -0,0002/2 = -0,0001$	0,0002	2	5	$L_2^{(0)'} \leftarrow L_1^{(0)}$
$L_2^{(1)}$		0	1,9998	4,9994	$L_2^{(1)} \leftarrow -0,0001 \times L_1^{(0)'} + L_2^{(0)'}$

Finalizada a triangularização da matriz dos coeficientes do sistema (5.14), passemos à fase de resolução do sistema triangular (5.16), equivalente ao sistema dado:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 6 \\ 1,9998x_2 = 4,9994 \end{cases} \tag{5.16}$$

cuja solução é:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0,5001 \\ 2,4999 \end{bmatrix}$$

O resíduo R e o erro ε produzido por esta solução são apresentados a seguir.

$$R = b - A\bar{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4,9999 \\ 6,0018 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0001 \\ -0,0018 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \max_{1 \le i \le n} |r_i| = \max_{1 \le i \le 2} \{|0,001|, |-0,0018|\} = 0,0018$$

Tais resultados mostram, claramente, a melhora obtida com a técnica de pivotação.

Observamos, finalmente, que a escolha do maior elemento em módulo entre os candidatos a pivô faz com que os multiplicadores, em módulo, estejam entre zero e um, o que minimiza a ampliação dos erros de arredondamento.

Apresentamos, pela Figura 4, à página 11, o pseudocódigo do procedimento de Gauss com pivoteamento parcial para resolver sistemas lineares. Neste procedimento, $\bar{A}$ é a matriz aumentada do sistema, isto é, $\bar{A} = [A \mid b]$.

5.3 O Método de Gauss com Pivotação Completa

Nesta estratégia, no início do passo k da fase de eliminação é escolhido para pivô o elemento de maior módulo dentre aqueles que ainda atuam no processo de eliminação, isto é:

$$\text{Pivô} = a_{rs}^{(k-1)} = \max_{\forall\, i,j \ge k} |a_{ij}^{(k-1)}|;$$

Assim, após localizado o maior elemento em módulo da matriz sob transformação, é necessário passá-lo para a posição a_{kk}. Para tanto, são feitas, se necessário, uma troca de linhas e uma troca de colunas a cada passo k. Esta estratégia, entretanto, não é muito empregada, pois envolve uma comparação extensa entre os elementos $a_{ij}^{(k-1)}$, $i, j \ge k$ e troca de linhas e colunas para posicionar o pivô. Todo este processo acarreta um esforço computacional bem maior que a estratégia de pivoteamento parcial e nem sempre resulta em ganho significativo na qualidade da solução produzida.

```
procedimento GaussPivoteamentoParcial(n, Ā, x);
1  para k de 1 até n − 1 faça
2      w ← |a_kk|;
3      r ← k;
4      para i de k até n faça
5          se |a_ik| > w então
6              w ← |a_ik|;
7              r ← i;
8          fim-se;
9      fim-para;
10     para j de k até n + 1 faça
11         aux ← a_kj;
12         a_kj ← a_rj;
13         a_rj ← aux;
14     fim-para;
15     para i de k + 1 até n faça
16         m_ik ← −a_ik/a_kk;
17         para j de k + 1 até n + 1 faça
18             a_ij ← a_ij + m_ik × a_kj;
19         fim-para;
20     fim-para;
21 fim-para;
22 x_n ← a_{n,n+1}/a_nn;
23 para i de n − 1 até 1 passo −1 faça
24     SOMA ← 0;
25     para j de i + 1 até n faça
26         SOMA ← SOMA + a_ij × x_j;
27     fim-para;
28     x_i ← (a_{i,n+1} − SOMA)/a_ii;
29 fim-para;
30 Retorne x;      { Retorne o vetor solução }
fim GaussPivoteamentoParcial(n,Ā,x);
```

Figura 4: Algoritmo do Método de Gauss com Pivoteamento Parcial

5.4 O Método da Decomposição LU

5.4.1 Introdução

Em muitas situações, é desejável resolver vários sistemas lineares nos quais a matriz dos coeficientes é a mesma. Nesses casos, é indicado resolver o sistema linear $Ax = b$ por uma técnica de decomposição da matriz A. Dentre as técnicas de decomposição mais utilizadas, destacamos a da decomposição LU.

Por esta técnica, uma matriz A é decomposta como o produto de duas matrizes L e U, sendo L uma matriz triangular inferior e U, uma matriz triangular superior, isto é:

$$A = L.U$$

Desta forma, podemos reescrever o sistema $Ax = b$ na seguinte forma:

$$Ax = (L.U)x = L.(Ux) = b$$

Fazendo-se $Ux = y$ podemos resolver o sistema $Ax = b$ em dois passos: Primeiramente, resolvemos o sistema triangular inferior $Ly = b$, obtendo $\bar{y}$ como solução. Em seguida, com a solução $\bar{y}$ obtida no passo anterior, resolvemos o sistema triangular superior $Ux = \bar{y}$, obtendo $\bar{x}$ como solução. Em outras palavras, decompomos a resolução de um sistema linear na resolução de dois sistemas triangulares: o primeiro, triangular inferior, que se resolve facilmente por substituições progressivas (basta aplicar o Algoritmo da Fig. 2, considerando elementos diagonais unitários) e o segundo, triangular superior, que se resolve por substituições retroativas (Algoritmo da Fig. 1).

Antes de descrevermos o método da decomposição LU com detalhes, apresentaremos alguns conceitos necessários à sua fundamentação.

Definição: Seja A uma matriz quadrada de orden n, não-singular, isto é, $\det(A) \neq 0$. Diz-se que A^{-1} é a inversa de A se $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Teorema 2: Se A e B são matrizes de ordem n, inversíveis, então: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Teorema 3: Se

$$M^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \text{ então:}$$

$$\text{(i) } (M^{(0)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{(ii) } (M^{(1)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

5.4.2 Fatoração LU de uma matriz

Os fatores L e U podem ser obtidos utilizando-se a ideia básica do Método de Gauss. Mostremos como isso pode ser feito fatorando-se uma matriz A genérica de ordem 3.

Tabela 5: Fatoração LU de uma matriz

Linha	**Multiplicadores**	**Coeficientes das incógnitas**			**Transformações Elementares**
$L_1^{(0)}$		$a_{11}^{(0)}$	$a_{12}^{(0)}$	$a_{13}^{(0)}$	
$L_2^{(0)}$	$m_{21} = -a_{21}^{(0)}/a_{11}^{(0)}$	$a_{21}^{(0)}$	$a_{22}^{(0)}$	$a_{23}^{(0)}$	
$L_3^{(0)}$	$m_{31} = -a_{31}^{(0)}/a_{11}^{(0)}$	$a_{31}^{(0)}$	$a_{32}^{(0)}$	$a_{33}^{(0)}$	
$L_2^{(1)}$		0	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$L_2^{(1)} \leftarrow m_{21} \times L_1^{(0)} + L_2^{(0)}$
$L_3^{(1)}$	$m_{32} = -a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$	0	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$L_3^{(1)} \leftarrow m_{31} \times L_1^{(0)} + L_3^{(0)}$
$L_3^{(2)}$		0	0	$a_{33}^{(2)}$	$L_3^{(2)} \leftarrow m_{32} \times L_2^{(1)} + L_3^{(1)}$

Sejam $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $M^{(0)}$ e $M^{(1)}$ matrizes definidas conforme a seguir:

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{2n}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Matriz } A \text{ original}$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Matriz obtida ao final do passo } k = 1$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Matriz obtida ao final do passo } k = 2$$

$$M^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que:

$$\begin{aligned} M^{(0)}A^{(0)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{2n}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ m_{21}a_{11}^{(0)} + a_{21}^{(0)} & m_{21}a_{12}^{(0)} + a_{22}^{(0)} & m_{21}a_{13}^{(0)} + a_{23}^{(0)} \\ m_{31}a_{11}^{(0)} + a_{31}^{(0)} & m_{31}a_{12}^{(0)} + a_{32}^{(0)} & m_{31}a_{13}^{(0)} + a_{33}^{(0)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix} = A^{(1)} \end{aligned}$$

De forma análoga podemos mostrar que $M^{(1)}A^{(1)} = A^{(2)}$

Resumindo, temos:

$A^{(0)} = A$

$A^{(1)} = M^{(0)}A^{(0)}$

$A^{(2)} = M^{(1)} \underbrace{A^{(1)}}_{M^{(0)}A^{(0)}} = M^{(1)}M^{(0)} \underbrace{A^{(0)}}_{A} = M^{(1)}M^{(0)}A$

Logo:

$A^{(2)} = M^{(1)}M^{(0)}A$

Premultiplicando ambos os membros da expressão anterior pela inversa de $M^{(1)}M^{(0)}$, obtemos:

$(M^{(1)}M^{(0)})^{-1}A^{(2)} = \underbrace{(M^{(1)}M^{(0)})^{-1}M^{(1)}M^{(0)}}_{I}A = IA = A$

$$\therefore \quad A = (M^{(1)}M^{(0)})^{-1}A^{(2)} = (M^{(0)})^{-1}(M^{(1)})^{-1}A^{(2)}$$

$$\therefore \quad A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{(M^{(0)})^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}}_{(M^{(0)})^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix}}_{A^{(2)}}$$

$$\therefore \quad A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix}}_{U}$$

Assim, podemos concluir que $A = LU$, sendo:

(i) U é a matriz triangular superior obtida ao final da fase de eliminação do método de Gauss;

(ii) L é uma matriz triangular inferior, cujos elementos da diagonal principal são unitários e abaixo de cada elemento diagonal $l_{kk} = 1$ encontram-se os multiplicadores da etapa k da fase de eliminação com sinal trocado.

5.4.3 O Método da Decomposição LU

Este método, também conhecido como Método de Doolittle, consiste na seguinte sequência de passos:

(i) Obter a fatoração LU da matriz A;

(ii) Fazer $Ux = y$;

(iii) Resolver o sistema triangular inferior $Ly = b$;

(iv) Obtida a solução $\bar{y}$ do sistema $Ly = b$, resolver o sistema triangular superior $Ux = \bar{y}$.

Exemplo: Resolver pelo Método da Decomposição LU o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \tag{5.17}$$

(a) Obtenção da fatoração LU da matriz dos coeficientes:

Tabela 6: Fatoração LU da matriz do sistema (5.17)

Linha	**Multiplicadores**	**Coeficientes das incógnitas**	**Transformações Elementares**
$L_1^{(0)}$		3 2 4	
$L_2^{(0)}$	$m_{21} = -1/3$	1 1 2	
$L_3^{(0)}$	$m_{31} = -4/3$	4 3 -2	
$L_2^{(1)}$		$1/3 \vdots 1/3$ $2/3$	$L_2^{(1)} \leftarrow -(1/3) \times L_1^{(0)} + L_2^{(0)}$
$L_3^{(1)}$	$m_{32} = -(1/3)/(1/3) = -1$	$4/3 \vdots 1/3$ -22/3	$L_3^{(1)} \leftarrow -(4/3) \times L_1^{(0)} + L_3^{(0)}$
$L_3^{(2)}$		$4/3$ $1 \vdots$ -8	$L_3^{(2)} \leftarrow -1 \times L_2^{(1)} + L_3^{(1)}$

Logo:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ \cdots\cdots & & \\ 1/3 \vdots & 1/3 & 2/3 \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ 4/3 & 1 \vdots & -8 \end{bmatrix} \Longrightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

(b) Resolução do sistema $Ly = b$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} y_1 & + & & & = & 1 & \Rightarrow \quad y_1 = 1 \\ (1/3)y_1 & + & y_2 & & = & 2 & \Rightarrow \quad y_2 = 5/3 \\ (4/3)y_1 & + & y_2 & + \quad y_3 & = & 3 & \Rightarrow \quad y_3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\therefore \quad \bar{y} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 5/3 & 0 \end{array}\right]^t$$

(c) Resolução do sistema $Ux = \bar{y}$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 1 & \Rightarrow & x_1 = -3 \\ & & (1/3)x_2 & + & (2/3)x_3 & = & 5/3 & \Rightarrow & x_2 = 5 \\ & & & & -8x_3 & = & 0 & \Rightarrow & x_3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \left[\begin{array}{ccc} -3 & 5 & 0 \end{array}\right]^t$$

A obtenção dos fatores $L = [l_{ij}]$ (com diagonal principal unitária) e $U = [u_{ij}]$ no Método de Doolittle pode ser realizada utilizando as seguintes fórmulas:

$$\begin{array}{lcll} u_{1j} & = & a_{1j} & \forall j = 1, \cdots, n \\ u_{ij} & = & a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} & \forall j = i, \cdots, n; \;\; i \geq 2 \\ l_{i1} & = & \frac{a_{i1}}{u_{11}} & \forall i = 2, \cdots, n \\ l_{ij} & = & \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right) & \forall i = j+1, \cdots, n; \;\; j \geq 2 \end{array}$$

Figura 5: Fórmulas para obtenção dos fatores L e U

5.5 O Método da Decomposição LU com Pivotação Parcial

Para aplicar a estratégia de pivoteamento parcial ao Método da Decomposição LU faz-se necessário armazenar um vetor de permutação P.

Mostremos por meio de um exemplo como o método funciona.

Seja resolver o seguinte sistema linear:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & & & - & 3x_3 & = & -2 \end{array}\right. \tag{5.18}$$

(a) Fatoração LU:

Passo $k = 1$:

A matriz dos coeficientes e o vetor de permutação originais são:

$$A^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{array}\right] \; ; \quad P^{(0)} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right]$$

Dado que na coluna $k = 1$ o maior elemento está na terceira linha, devemos permutar as linhas L_1 e L_3, o que resultará na seguinte matriz dos coeficientes transformada:

Tabela 7: Fatoração LU da matriz do sistema (5.18)

Linha	**Multiplicadores**	**Coeficientes das incógnitas**	**Transformações Elementares**	**Vetor Permutação**
$L_1^{(0)}$		3 -4 1		1
$L_2^{(0)}$		1 2 2		2
$L_3^{(0)}$		4 0 -3		3
$L_1^{(0)'}$		4 0 -3	$L_1^{(0)'} \leftarrow L_3^{(0)}$	3
$L_2^{(0)}$	$m_{21} = -1/4$	1 2 2		2
$L_3^{(0)'}$	$m_{31} = -3/4$	3 -4 1	$L_3^{(0)'} \leftarrow L_1^{(0)}$	1
$L_2^{(1)}$		$1/4 \vdots$ 2 $11/4$	$L_2^{(1)} \leftarrow -(1/4) \times L_1^{(0)'} + L_2^{(0)}$	2
$L_3^{(1)}$		$3/4 \vdots$ -4 $13/4$	$L_3^{(1)} \leftarrow -(3/4) \times L_1^{(0)'} + L_3^{(0)'}$	1
$L_2^{(1)'}$		$3/4 \vdots$ -4 $13/4$	$L_2^{(1)'} \leftarrow L_3^{(1)}$	1
$L_3^{(1)'}$	$m_{32} = -2/(-4) = 1/2$	$1/4 \vdots$ 2 $11/4$	$L_3^{(1)'} \leftarrow L_2^{(1)}$	2
$L_3^{(2)}$		$1/4$ -1/2 $\vdots$ $35/8$	$L_3^{(2)} \leftarrow (1/2) \times L_2^{(1)'} + L_3^{(1)'}$	2

$$A^{(0)'} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \; ; \quad P^{(0)'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Prosseguindo com o Método de Gauss, obtemos a seguinte matriz transformada ao final do passo $k = 1$:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1/4 & 2 & 11/4 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \end{bmatrix} \; ; \quad P^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Passo $k = 2$:

Analogamente, dado que na coluna $k = 2$, o maior elemento está na terceira linha, devemos permutar as linhas L_2 e L_3, o que resultará na seguinte matriz dos coeficientes transformada:

$$A^{(1)'} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \\ 1/4 & 2 & 11/4 \end{bmatrix} \; ; \quad P^{(1)'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Encerrado o passo $k = 2$ obteremos:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \\ 1/4 & -1/2 & 35/8 \end{bmatrix} \; ; \quad P^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A partir da matriz $A^{(2)}$ extraimos as matrizes L e U:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix}$$

(b) Resolução do sistema $Ly = \bar{b}$:
em que $\bar{b}$ é o resultado da aplicação do vetor de permutação ao vetor b.
Aplicando $P^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}^t$ ao vetor $b = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -2 \end{bmatrix}^t$, obtemos: $\bar{b} = \begin{bmatrix} -2 & 9 & 3 \end{bmatrix}^t$

$$\begin{cases} y_1 + & & & = & -2 & \Rightarrow & y_1 = -2 \\ (3/4)y_1 + & y_2 & & = & 9 & \Rightarrow & y_2 = 21/2 \\ (1/4)y_1 - & (1/2)y_2 + & y_3 & = & 3 & \Rightarrow & y_3 = 35/4 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} -2 & 21/2 & 35/4 \end{bmatrix}^t$$

(c) Resolução do sistema $Ux = \bar{y}$:

$$\begin{cases} 4x_1 + 0x_2 - & 3x_3 & = & -2 & \Rightarrow & x_1 = & 1 \\ - 4x_2 + & (13/4)x_3 & = & 21/2 & \Rightarrow & x_2 = & -1 \\ & (35/8)x_3 & = & 35/4 & \Rightarrow & x_3 = & 2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^t$$

5.6 Método de Cholesky

Este método se aplica quando a matriz dos coeficientes A é simétrica ($A = A^t$) e definida positiva ($x^t Ax > 0 \ \forall x \neq 0$). Nesta situação, a matriz A pode ser fatorada em $A = LU = LL^t$, sendo os elementos l_{ij} de L obtidos a partir das seguintes fórmulas:

$$\begin{array}{lcll} l_{11} & = & \sqrt{a_{11}} & \\ l_{ii} & = & \sqrt{a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}^2} & \forall i = 2, \cdots, n \\ l_{i1} & = & \frac{a_{i1}}{l_{11}} & \forall i = 2, \cdots, n \\ l_{ij} & = & \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right) & \forall i = j+1, \cdots, n; \ \ j \geq 2 \end{array}$$

Figura 6: Fórmulas para obtenção do fator L do Método de Cholesky

Conhecido o fator L, o sistema $Ax = L \underbrace{L^t}_{y} = b$ é resolvido em dois passos. Primeiramente, resolvemos o sistema $Ly = b$, obtendo $\bar{y}$ como solução. A seguir, resolvemos o sistema $L^t x = \bar{y}$, obtendo $\bar{x}$ como solução.

Observamos que em uma matriz definida positiva todos os autovalores da matriz são positivos, isto é, são positivas todas as raízes do polinômio característico $\det(A - \lambda I) = 0$.

Devido à estabilidade numérica da decomposição de uma matriz simétrica definida positiva, não se faz necessário o uso da pivotação parcial na decomposição de Cholesky.

Exemplo: Seja resolver o seguinte sistema linear pelo Método de Cholesky:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 14x_3 = 14 \\ 2x_1 + 17x_2 - 5x_3 = -101 \\ 14x_1 - 5x_2 + 83x_3 = 155 \end{cases} \tag{5.19}$$

Solução:

Procuremos coeficientes l_{ij} tais que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -5 \\ 14 & -5 & 83 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}}_{L^t}$$

Resolvendo-o, obtemos:
$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2$ $\quad l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{2}{2} = 1$ $\quad l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{14}{2} = 7$
$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{17 - 1} = 4$
$l_{32} = \frac{1}{l_{22}} (a_{32} - l_{31} l_{21}) = \frac{1}{4} (-5 - 7 \times 1) = -3$
$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{83 - 7^2 - (-3)^2} = 5$
Conhecido o fator L, resolvamos, agora, o sistema triangular inferior $Ly = b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -101 \\ 155 \end{bmatrix}$$

cuja solução é: $\bar{y} = \begin{bmatrix} 7 & -27 & 5 \end{bmatrix}^t$

O passo seguinte, agora, é resolver o sistema triangular superior $Ux = L^t x = \bar{y}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -27 \\ 5 \end{bmatrix}$$

cuja solução é:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 1 \end{bmatrix}^t$$

5.7 Refinamento da Solução

Em vista da possibilidade de existência de erros gerados nos cálculos dos multiplicadores, em geral a solução $\bar{x}^{(0)}$ de um sistema linear $Ax = b$ não é exata. Isto é, o resíduo $R^{(0)} = b - A\bar{x}^{(0)}$ produzido pela solução $\bar{x}^{(0)}$ não é um vetor nulo.

Procuremos, então, uma solução $\bar{x}^{(1)}$ "melhor" que $\bar{x}^{(0)}$ na forma:

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} + \Delta^{(0)} \tag{5.20}$$

em que:

$$\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1^{(0)} \\ \bar{x}_2^{(0)} \\ \vdots \\ \bar{x}_n^{(0)} \end{bmatrix} \; ; \quad \Delta^{(0)} = \begin{bmatrix} \delta_1^{(0)} \\ \delta_2^{(0)} \\ \vdots \\ \delta_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

isto é, $\Delta^{(0)}$ é a parcela de correção do vetor $\bar{x}^{(0)}$.

Logo, podemos escrever:
$A\bar{x}^{(1)} = b$

$A\left(\bar{x}^{(0)} + \Delta^{(0)}\right) = b$
$A\bar{x}^{(0)} + A\Delta^{(0)} = b$
$A\Delta^{(0)} = b - A\bar{x}^{(0)} = R^{(0)}$
$\therefore \quad A\Delta^{(0)} = R^{(0)}$, isto é, para determinarmos a parcela de correção $\Delta^{(0)}$ basta resolvermos um sistema linear em que A é a matriz dos coeficientes do sistema original e $R^{(0)}$ é o resíduo produzido pela solução $\bar{x}^{(0)}$.

Com isso, obteremos:

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} + \Delta^{(0)} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1^{(0)} + \delta_1^{(0)} \\ \bar{x}_2^{(0)} + \delta_2^{(0)} \\ \vdots \\ \bar{x}_n^{(0)} + \delta_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

Evidentemente, $\bar{x}^{(1)}$ também pode não ser uma "boa" solução. Neste caso, procuraremos uma solução ainda melhor $\bar{x}^{(2)}$, na forma: $\bar{x}^{(2)} = \bar{x}^{(1)} + \Delta^{(1)}$, sendo a parcela de correção $\Delta^{(1)}$ obtida resolvendo-se o sistema $A\Delta^{(1)} = R^{(1)}$, no qual $R^{(1)}$ é o o resíduo produzido pela solução aproximada $\bar{x}^{(1)}$.

Este processo é repetido até que uma das seguintes condições seja satisfeita:

(i) $\max\limits_{1 \le i \le n} |r_i^{(k)}| < \varepsilon$, sendo ε a precisão estabelecida;

(ii) $k >$ ITERMAX, sendo ITERMAX o número máximo de iterações.

Obs.: Dado o fato de que no processo de refinamento de uma solução devem ser resolvidos vários sistemas $A\Delta^{(k)} = R^{(k)}$, com $k = 1, 2, \cdots,$ ITERMAX, sendo a matriz dos coeficientes a mesma, o método mais indicado é o da decomposição LU com pivotação parcial.

Exercício

Resolva o sistema (5.21), a seguir, pelo Método da Decomposição LU retendo durante os cálculos 3 casas decimais (com truncamento). Refine a solução até que $\max\limits_{1 \le i \le n} |r_i^{(k)}| < 0,010$ ou $k > 2$ iterações.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 5 \\ 7x_1 - 3x_2 + x_3 = 10,416 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 19,652 \end{cases} \tag{5.21}$$

(a) Obtenção da fatoração LU da matriz dos coeficientes:

A tabela 8 apresenta os passos relativos à fatoração LU, sem pivotação, da matriz dos coeficientes do sistema (5.21).

Desta tabela resulta a seguinte matriz:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ 2,333 \;\vdots & -14,665 & -5,999 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ 0,666 & -0,045 \;\vdots & -7,267 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2,333 & 1 & 0 \\ 0,666 & -0,045 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 0 & -14,665 & -5,999 \\ 0 & 0 & -7,267 \end{bmatrix}$$

Tabela 8: Fatoração LU da matriz do sistema (5.21)

Linha	**Multiplicadores**	**Coeficientes das incógnitas**			**Transformações Elementares**
$L_1^{(0)}$		3	5	3	
$L_2^{(0)}$	$m_{21} = -7/3 = -2,333$	7	-3	1	
$L_3^{(0)}$	$m_{31} = -2/3 = -0,666$	2	4	-5	
$L_2^{(1)}$		2,333 ⋮	-14,665	-5,999	$L_2^{(1)} \leftarrow -2,333 \times L_1^{(0)} + L_2^{(0)}$
$L_3^{(1)}$	$m_{32} = -(0,670)/(-14,665) = 0,045$	0,666 ⋮	0,670	-6,998	$L_3^{(1)} \leftarrow -0,666 \times L_1^{(0)} + L_3^{(0)}$
$L_3^{(2)}$		0,666	-0,045 ⋮	-7,267	$L_3^{(2)} \leftarrow 0,045 \times L_2^{(1)} + L_3^{(1)}$

(b) Determinação de $\bar{x}^{(0)}$:

(b.1) Resolução do sistema $Ly = b$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} y_1 & + & & & & = & 5 & \Rightarrow & y_1 = 5 \\ 2,333y_1 & + & y_2 & & & = & 10,416 & \Rightarrow & y_2 = -1,249 \\ 0,666y_1 & - & 0,045y_2 & + & y_3 & = & 19,652 & \Rightarrow & y_3 = 16,265 \end{array}\right.$$

$$\therefore \quad \bar{y} = \left[\begin{array}{cccc} 5 & -1,249 & 16,265 \end{array}\right]^t$$

(b.2) Resolução do sistema $Ux = \bar{y}$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 5 & \Rightarrow & x_1 = 2,238 \\ & - & 14,665x_2 & - & 5,999x_3 & = & -1,249 & \Rightarrow & x_2 = 1,000 \\ & & & - & 7,267x_3 & = & 16,265 & \Rightarrow & x_3 = -2,238 \end{array}\right.$$

$$\therefore \quad \bar{x}^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc} 2,238 & 1,000 & -2,238 \end{array}\right]^t$$

(b.3) Avaliação de $R^{(0)}$:

$$R^{(0)} = b - A\bar{x}^{(0)} = \left[\begin{array}{c} 5 \\ 10,416 \\ 19,652 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{ccc} 3 & 5 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 2,238 \\ 1,000 \\ -2,238 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -0,012 \\ -0,014 \end{array}\right]$$

Como $\max\limits_{1 \leq i \leq 3} |r_i^{(k)}| = 0,014 > 0,010$ devemos prosseguir com o refinamento da solução atual $\bar{x}^{(0)}$.

(c) Determinação de $\bar{x}^{(1)}$:

Como $\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} + \Delta^{(0)}$, então para calcular a nova solução $\bar{x}^{(1)}$, devemos obter a parcela $\Delta^{(0)}$, a qual é obtida resolvendo-se o sistema linear $A\Delta^{(0)} = R^{(0)}$.

(c.1) Resolução do sistema $Ly = R^{(0)}$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} y_1 & + & & & & = & 0 & \Rightarrow & y_1 = 0 \\ 2,333y_1 & + & y_2 & & & = & -0,012 & \Rightarrow & y_2 = -0,012 \\ 0,666y_1 & - & 0,045y_2 & + & y_3 & = & -0,014 & \Rightarrow & y_3 = -0,014 \end{array}\right.$$

$$\therefore \quad \bar{y} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & -0,012 & -0,014 \end{array}\right]^t$$

(c.2) Resolução do sistema $U\Delta^{(0)} = \bar{y}$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3\delta^{(1)} & + & 5\delta^{(2)} & + & 3\delta^{(3)} & = & 0 & \Rightarrow & \delta^{(1)} = -0,001 \\ & - & 14,665\delta^{(2)} & - & 5,999\delta^{(3)} & = & -0,012 & \Rightarrow & \delta^{(2)} = 0,000 \\ & & & - & 7,267\delta^{(3)} & = & -0,014 & \Rightarrow & \delta^{(3)} = 0,001 \end{array}\right.$$

$$\therefore \quad \Delta^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc} -0,001 & 0,000 & 0,001 \end{array}\right]^t$$

(c.3) Determinação da nova solução $\bar{x}^{(1)}$:

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} + \Delta^{(0)} = \left[\begin{array}{r} 2,238 \\ 1,000 \\ -2,238 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{r} -0,001 \\ 0,000 \\ 0,001 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r} 2,237 \\ 1,000 \\ -2,237 \end{array}\right]$$

(c.4) Avaliação de $R^{(1)}$:

$$R^{(1)} = b - A\bar{x}^{(1)} = \left[\begin{array}{r} 5 \\ 10,416 \\ 19,652 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{rrr} 3 & 5 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{r} 2,237 \\ 1,000 \\ -2,237 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r} 0,000 \\ -0,006 \\ -0,007 \end{array}\right]$$

Como $\max\limits_{1 \le i \le 3} |r_i^{(k)}| = 0,007 < 0,010$, concluimos que $\bar{x}^{(1)}$ é a solução do sistema (5.21) com a precisão requerida.

5.8 Métodos Iterativos

Tratam-se de métodos nos quais a solução $\bar{x}$ de um sistema linear $Ax = b$ é obtida como limite de uma sequência de aproximações sucessivas $\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \cdots, \bar{x}^{(k)}, \cdots$, sendo dada uma aproximação inicial $\bar{x}^{(0)}$, isto é:

$$\bar{x} = \lim_{k \to \infty} \bar{x}^{(k)} \tag{5.22}$$

5.8.1 Método de Jacobi

Seja o sistema linear $Ax = b$ em sua forma expandida:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

Explicitemos x_1 na primeira equação, x_2 na segunda equação e assim sucessivamente.

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n)}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n)}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{b_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1})}{a_{nn}}$$

O método de Jacobi consiste na seguinte sequência de passos:

(i) Escolher uma aproximação inicial $x^{(0)} = \left[\begin{array}{cccc} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & \cdots & x_n^{(0)} \end{array} \right]^t$ arbitrária;

(ii) Gerar aproximações sucessivas $x^{(k)}$ a partir de $x^{(k-1)}$ com base nas seguintes equações de iteração:

$$x_1^{(k)} = \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(k-1)} + a_{13}x_3^{(k-1)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k-1)})}{a_{11}}$$
$$x_2^{(k)} = \frac{b_2 - (a_{21}x_1^{(k-1)} + a_{23}x_3^{(k-1)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k-1)})}{a_{22}}$$
$$\vdots$$
$$x_n^{(k)} = \frac{b_n - (a_{n1}x_1^{(k-1)} + a_{n2}x_2^{(k-1)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k-1)})}{a_{nn}}$$

Sinteticamente, cada componente $x_i^{(k)}$ é determinada com base na seguinte equação:

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}}{a_{ii}} \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n \tag{5.23}$$

Na forma matricial:

$$x^{(k)} = J.x^{(k-1)} + D \quad \forall k = 1, 2, \cdots \tag{5.24}$$

sendo J e D definidas de acordo com (5.25) e (5.26). A matriz J é conhecida como "matriz de iteração de Jacobi".

$$J = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{array} \right] \tag{5.25}$$

$$D = \left[\begin{array}{c} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{array} \right] \tag{5.26}$$

(iii) Interromper o processo quando um dos critérios abaixo for satisfeito:

(1) $\max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon$, em que ε é a tolerância permitida;

(2) $k >$ ITERMAX, em que ITERMAX é o número máximo de iterações.

Exemplo:
Resolver o sistema (5.27), a seguir, pelo método de Jacobi usando como aproximação inicial $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$ e como critério de parada $\max\limits_{1\leq i\leq 3} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < 0,001$ ou $k > 10$ iterações:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - 15x_2 + x_3 = 32 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases} \tag{5.27}$$

(a) Equações de iteração:

$x^{(k)} = J.x^{(k-1)} + D$, em que:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ 1/15 & 0 & 1/15 \\ -2/10 & -3/10 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 7/10 \\ -32/15 \\ 6/10 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(k)} = \frac{7 - 2x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}}{10}$$
$$x_2^{(k)} = \frac{32 - x_1^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}}{-15}$$
$$x_3^{(k)} = \frac{6 - 2x_1^{(k-1)} - 3x_2^{(k-1)}}{10}$$

(b) Determinação da solução do sistema:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	Erro $= \max\limits_{1\leq i\leq 3} \lvert x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\rvert$
0	0	0	0	-
1	0,7000	-2,1333	0,6000	2,1333
2	1,0667	-2,0467	1,1000	0,5000
3	0,9993	-1,9889	1,0007	0,0993
4	0,9977	-2,0000	0,9968	0,0111
5	1,0003	-2,0004	1,0005	0,0037
6	1,0000	-1,9999	1,0000	0,0004

Portanto, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1,0000 & -1,9999 & 1,0000 \end{bmatrix}^t$ é a solução do sistema (5.27) com precisão $\varepsilon < 0,001$.

5.8.2 Convergência do Método de Jacobi

Seja o sistema $Ax = b$ posto na forma $x = Jx + D$, sendo $J = (f_{ij})_{n\times n}$ e:

$$f_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i = j \\ -a_{ij}/a_{jj} & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

Se $\bar{x}$ é a solução de $Ax = b$ então podemos escrever:

$$\bar{x} = J\bar{x} + D \tag{5.28}$$

Por outro lado, as equações de iteração no Método de Jacobi são:

$$x^{(k)} = Jx^{(k-1)} + D \quad \forall k = 1, 2, \cdots \tag{5.29}$$

Fazendo (5.29) - (5.28), obtemos:

$$x^{(k)} - \bar{x} = J\left(x^{(k-1)} - \bar{x}\right) \quad \forall k = 1, 2, \cdots \tag{5.30}$$

Seja $E^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$ o erro cometido na k-ésima iteração. Logo:

$$E^{(k)} = J.E^{(k-1)} \quad \forall k = 1, 2, \cdots \tag{5.31}$$

Ou, em termos de componentes:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} e_1^{(k)} & = & 0e_1^{(k-1)} & + & f_{12}e_2^{(k-1)} & + \cdots & f_{1n}e_n^{(k-1)} \\ e_2^{(k)} & = & f_{21}e_1^{(k-1)} & + & 0e_2^{(k-1)} & + \cdots & f_{2n}e_n^{(k-1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_n^{(k)} & = & f_{n1}e_1^{(k-1)} & + & f_{n2}e_n^{(k-1)} & + \cdots & 0e_n^{(k-1)} \end{array}\right. \tag{5.32}$$

Aplicando propriedades de módulo sobre as equações do sistema (5.32), obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n} |e_i^{(k)}| \leq \left|e_1^{(k-1)}\right| \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 1}}^{n} |f_{i1}| + \left|e_2^{(k-1)}\right| \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{n} |f_{i2}| + \cdots + \left|e_n^{(k-1)}\right| \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq n}}^{n} |f_{in}| \tag{5.33}$$

Teorema: (Critério das colunas) É condição suficiente para que o Método de Jacobi convirja que:

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall j = 1, 2, \cdots, n \tag{5.34}$$

O critério das colunas estabelece que se os elementos diagonais forem dominantes nas colunas, então o Método de Jacobi converge, independentemente da solução inicial.

Provaremos, agora, esse fato.

Prova:

Hipótese: Os elementos diagonais são dominantes nas colunas

Tese: $e_i^{(k)} \to 0$, isto é, $x^{(k)} \to \bar{x}$

A partir da hipótese, isto é, do fato de que:

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall j = 1, 2, \cdots, n$$

podemos escrever:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{jj}}\right| < 1 \qquad \forall j = 1, 2, \cdots, n$$

$$\therefore \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |f_{ij}| < 1 \qquad \forall j = 1, 2, \cdots, n$$

Seja $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |f_{ij}| < L < 1 \quad \forall j = 1, 2, \cdots, n.$ Levando esse resultado na expressão (5.33), obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \left| e_i^{(k)} \right| \leq L \sum_{i=1}^{n} \left| e_i^{(k-1)} \right| \quad \forall k = 1, 2, \cdots$$

Fazendo $k = 1, 2, 3, \cdots$ podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^{n} \left| e_i^{(1)} \right| \leq L \sum_{i=1}^{n} \left| e_i^{(0)} \right|$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left| e_i^{(2)} \right| \leq L \sum_{i=1}^{n} \left| e_i^{(1)} \right| \leq L^2 \sum_{i=1}^{n} \left| e_i^{(0)} \right|$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left| e_i^{(k)} \right| \leq L^k \sum_{i=1}^{n} \left| e_i^{(0)} \right|$$

Tendo em vista que $0 < L < 1$, então fazendo $k \to \infty$, obteremos:

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left| e_i^{(k)} \right| \to 0$$

Do resultado anterior extraímos que $\left| e_i^{(k)} \right| \to 0 \Longrightarrow e_i^{(k)} \to 0 \ \ \forall i = 1, 2, \cdots, n$. Assim, como $e_i^{(k)} = x_i^{(k)} - \bar{x_i} \ \ \forall i$, obteremos: $x_i^{(k)} \to \bar{x_i} \Longrightarrow x^{(k)} \to \bar{x}$, conforme queríamos demonstrar.

5.8.3 Algoritmo do Método de Jacobi

A Figura 7, a seguir, apresenta o pseudocódigo do Método de Jacobi. *Tol* é a tolerância admitida, *ITERMAX* é o número máximo de iterações permitida e x é o vetor solução, o qual começa com uma aproximação inicial.

procedimento *Jacobi(n, A, b, ITERMAX, Tol, x)*;
1 $PARE \leftarrow FALSE$;
2 $k \leftarrow 0$;
3 $erro \leftarrow \infty$;
4 enquanto $(k < ITERMAX$ e $erro \geq Tol)$ faça
5 $erro \leftarrow 0$;
6 para i de 1 até n faça
7 $xant_i \leftarrow x_i$;
8 fim-para;
9 para i de 1 até n faça
10 $soma \leftarrow 0$;
11 para j de 1 até n faça
12 se $(j \neq i)$ então $soma \leftarrow soma + a_{ij} \cdot xant_j$;
13 fim-para;
14 $x_i \leftarrow (b_i - soma)/a_{ii}$;
15 se $(|x_i - xant_i| > erro)$ então
16 $erro \leftarrow |x_i - xant_i|$;
17 fim-se;
18 fim-para;
19 $k \leftarrow k + 1$;
20 fim-enquanto;
21 se $(erro < Tol)$ então
22 Retorne x; { Retorne o vetor solução }
23 senão
24 Imprima: Não houve convergência em $ITERMAX$ iterações
fim *Jacobi*

Figura 7: Algoritmo do Método Iterativo de Jacobi

5.8.4 Método de Gauss-Seidel

Este método difere do anterior apenas com relação às equações de iteração, as quais são:

$$x_1^{(k)} = \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(k-1)} + a_{13}x_3^{(k-1)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k-1)})}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k)} = \frac{b_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k-1)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k-1)})}{a_{22}}$$

$$x_3^{(k)} = \frac{b_3 - (a_{31}x_1^{(k)} + a_{32}x_2^{(k)} + \cdots + a_{3n}x_n^{(k-1)})}{a_{33}}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k)} = \frac{b_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})}{a_{nn}}$$

Sinteticamente:

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}}{a_{ii}} \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n \tag{5.35}$$

Na forma matricial, o Método de Gauss-Seidel pode ser posto na forma:

$$x^{(k)} = Lx^{(k)} + Ux^{(k-1)} + D \tag{5.36}$$

sendo:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ 0 & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{31}/a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

A Equação (5.36) pode ser escrita na forma $x^{(k)} = Gx^{(k-1)} + \bar{D}$. De fato, a partir de (5.36), podemos escrever:

$x^{(k)} - Lx^{(k)} = Ux^{(k-1)} + D$

$(I - L)\, x^{(k)} = Ux^{(k-1)} + D$

$x^{(k)} = \underbrace{(I - L)^{-1} U}_{G} x^{(k-1)} + \underbrace{(I - L)^{-1} D}_{\bar{D}}$

$\therefore x^{(k)} = Gx^{(k-1)} + \bar{D}.$

A matriz G, dada pela equação (5.37), é a chamada "matriz de iteração de Gauss-Seidel".

$$G = (I - L)^{-1} U \tag{5.37}$$

Exemplo:
Resolver o sistema abaixo (que é o mesmo sistema 5.27 usado para exemplificar o Método de Jacobi) pelo Método de Gauss-Seidel usando como aproximação inicial $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$ e como critério de parada $\max\limits_{1 \le i \le 3} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < 0,001$ ou $k > 10$ iterações:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - 15x_2 + x_3 = 32 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

(a) Equações de iteração:

$x^{(k)} = Lx^{(k)} + Ux^{(k-1)} + D$, onde:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/15 & 0 & 0 \\ -2/10 & -3/10 & 0 \end{bmatrix}, \; U = \begin{bmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ 0 & 0 & 1/15 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \; D = \begin{bmatrix} 7/10 \\ -32/15 \\ 6/10 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(k)} = \frac{7 - 2x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}}{10}$$
$$x_2^{(k)} = \frac{32 - x_1^{(k)} - x_3^{(k-1)}}{-15}$$
$$x_3^{(k)} = \frac{6 - 2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}}{10}$$

(b) Determinação da solução do sistema:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	Erro $= \max\limits_{1 \le i \le 3} \lvert x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \rvert$
0	0	0	0	-
1	0,7000	-2,0867	1,0860	2,0867
2	1,0087	-1,9937	0,9964	0,3087
3	0,9991	-2,0003	1,0003	0,0096
4	1,0000	-2,0000	1,0000	0,0009

Portanto, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1,0000 & -2,0000 & 1,0000 \end{bmatrix}^t$ é a solução do sistema (5.27) com precisão $\varepsilon < 0,001$.

5.8.5 Algoritmo do Método de Gauss-Seidel

A Figura 8, a seguir, apresenta o pseudocódigo do Método de Gauss-Seidel. *Tol* é a tolerância admitida, *ITERMAX* é o número máximo de iterações permitida e x é o vetor solução, o qual começa com uma aproximação inicial.

5.8.6 Convergência dos Métodos Iterativos

Para os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel são válidos os seguintes critérios de convergência:

CRITÉRIO DAS COLUNAS: É condição suficiente para que um sistema linear convirja usando um método iterativo que:

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall j = 1, 2, \cdots, n$$

Além do mais, quanto mais próximo de zero estiver a relação $\max\limits_{1 \le j \le n} \frac{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|}{|a_{jj}|}$, mais rápida será a convergência.

```
procedimento Gauss-Seidel(n, A, b, ITERMAX, Tol, x);
1   PARE ← FALSE;
2   k ← 0;
3   erro ← ∞;
4   enquanto (k < ITERMAX e erro ≥ Tol) faça
5       erro ← 0;
6       para i de 1 até n faça
7           xant ← x_i;
8           soma ← 0;
9           para j de 1 até n faça
10              se (j ≠ i) então soma ← soma + a_ij · x_j;
11          fim-para;
12          x_i ← (b_i − soma)/a_ii;
13          se (|x_i − xant| > erro) então
14              erro ← |x_i − xant|;
15          fim-se;
16      fim-para;
17      k ← k + 1;
18  fim-enquanto;
19  se (erro < Tol) então
20      Retorne x;      { Retorne o vetor solução }
21  senão
22      Imprima: Não houve convergência em ITERMAX iterações
fim Gauss-Seidel
```

Figura 8: Algoritmo do Método Iterativo de Gauss-Seidel

CRITÉRIO DAS LINHAS: É condição suficiente para que um sistema linear convirja usando um método iterativo que:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

Além do mais, quanto mais próximo de zero estiver a relação $\max\limits_{1\leq i\leq n} \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|}$, mais rápida será a convergência.

CRITÉRIO DE SASSENFELD: Seja

$$\beta_i = \frac{\sum\limits_{j=1}^{i-1} (|a_{ij}| * \beta_j) + \sum\limits_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \tag{5.38}$$

É condição suficiente para que um método iterativo convirja, que:

$$\beta = \max_{1\leq i\leq n} \beta_i < 1$$

Além disso, quanto menor for β mais rápida será a convergência.

CRITÉRIO DO RAIO ESPECTRAL: É condição necessária e suficiente para que um método iterativo convirja que $\rho(F) < 1$, isto é, que o raio espectral (maior autovalor, em módulo) da matriz de iteração do método seja menor que a unidade. Além disso, quanto mais próximo de zero for $\rho(F)$ mais rápida será a convergência.

Exemplo 1:
Verificar se há garantia de convergência do sistema a seguir usando um método iterativo.

$$\begin{cases} 3x_1 & & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + 3x_3 & = & 9 \end{cases} \tag{5.39}$$

(a) Critério das colunas:

$$|a_{11}| = |3| = 3 \quad \not> \quad |a_{21}| + |a_{31}| = |1| + |2| = 3$$

$$|a_{22}| = |-1| = 1 \quad \not> \quad |a_{12}| + |a_{32}| = |1| + |0| = 2$$

$$|a_{33}| = |3| = 3 \quad > \quad |a_{13}| + |a_{23}| = |2| + |1| = 3$$

Como o critério das colunas não é verificado para as colunas 1 e 2 (bastava que não fosse satisfeito para uma única coluna), concluimos que esse critério não garante convergência se usarmos um método iterativo.

(b) Critério das linhas:

$$|a_{11}| = |3| = 3 \quad > \quad |a_{12}| + |a_{13}| = |0| + |1| = 1$$

$$|a_{22}| = |-1| = 1 \quad \not> \quad |a_{21}| + |a_{23}| = |1| + |0| = 1$$

$$|a_{33}| = |3| = 3 \quad \not> \quad |a_{31}| + |a_{32}| = |2| + |1| = 3$$

Como o critério das linhas não é verificado para as linhas 2 e 3, concluimos que não há garantia de convergência, por esse critério, se usarmos um método iterativo.

(c) Critério de Sassenfeld:

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}|+|a_{13}|}{|a_{11}|} = \frac{|0|+|1|}{|3|} = 1/3$$
$$\beta_2 = \frac{|a_{21}|\times\beta_1+|a_{23}|}{|a_{22}|} = \frac{|1|\times\frac{1}{3}+|0|}{|-1|} = 1/3$$
$$\beta_3 = \frac{|a_{31}|\times\beta_1+|a_{32}|\times\beta_2}{|a_{33}|} = \frac{|2|\times\frac{1}{3}+|1|\times\frac{1}{3}}{|3|} = 1/3$$
$$\beta = \max_{1\leq i\leq 3} \beta_j = \max\{\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\} = \tfrac{1}{3}$$

Como $\beta = 1/3 < 1$ resulta que o critério de Sassenfeld foi satisfeito. Portanto, pode-se aplicar um método iterativo ao sistema (5.39), uma vez que há garantia de convergência do mesmo.

Exemplo 2:
Verificar se há garantia de convergência do sistema a seguir usando um método iterativo.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 0,5x_1 & + & 0,6x_2 & + & 0,3x_3 & = & 0,2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 0,4x_1 & - & 0,4x_2 & + & 1x_3 & = & -0,6 \end{array}\right. \tag{5.40}$$

Solução:

Claramente os critérios da linha e da coluna não se aplicam. Apliquemos, então, o critério do raio espectral. As matrizes de iteração dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel, dadas respectivamente por (5.25) e (5.37), são:

$$J = L + U \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 & -1,2 & -0,6 \\ -1 & 0 & -1 \\ -0,4 & 0,4 & 0 \end{bmatrix} \implies \rho(J) = 1,1200$$

$$G = (I - L)^{-1}U \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 & -1,2 & -0,6 \\ 0 & 1,2 & -0,4 \\ 0 & 0,96 & 0,08 \end{bmatrix} \implies \rho(G) = 0,6928$$

Como $\rho(J) > 1$ e $\rho(G) < 1$ então somente pelo Método de Gauss-Seidel haverá convergência.

Observação: Para o cálculo do raio espectral de uma matriz A, lembre que ele é o maior autovalor (λ) da equação característica, dada por det(A - λI)=0, em que I é a matriz identidade, λ são os autovalores e "det" é o determinante. A equação característica do método de Jacobi aplicado à matriz dos coeficientes do sistema dado é:

$$det(J - \lambda I) \quad = \quad \begin{vmatrix} -\lambda & -1,2 & -0,6 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -0,4 & 0,4 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1,04\lambda - 0,24 = 0$$

Resolvendo-se a equação $\lambda^3 - 1,04\lambda + 0,24 = 0$ por um método numérico, encontra-se como maior autovalor, λ=1,1200. Assim, $\rho(J) = 1,1200$.

Igualmente, resolvendo-se a equação característica do método de Gauss-Seidel, dada abaixo, encontra-se como maior autovalor λ=0,6928. Assim, $\rho(G) = 0,6928$.

$$det(G - \lambda I) \quad = \quad \begin{vmatrix} -\lambda & -1,2 & -0,6 \\ 0 & 1,2 - \lambda & -0,4 \\ 0 & 0,96 & 0,08 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

5.9 Cálculo de Determinantes

Um subproduto da resolução de sistemas lineares por meio de métodos diretos é o cálculo de determinantes. Mostremos como calcular o determinante de uma matriz pelo Método da Decomposição LU.

Como vimos, a matriz A pode ser decomposta como produto de dois fatores L e U, onde L é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais unitários e U uma matriz triangular superior, isto é: $A = LU$. Assim, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(L.U) = (\det(L)) \times (\det(U)) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} l_{ii}\right) \times \left(\prod_{i=1}^{n} u_{ii}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} u_{ii} = \text{produto dos pivôs}\end{aligned}$$

No caso de haver pivoteamento:

$$\det(A) = (-1)^k \det(L.U) = (-1)^k \times \text{produto dos pivôs}$$

sendo k o número de trocas de linhas que ocorreram durante o processo de decomposição.

Exemplo:

Na decomposição LU da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

com decomposição parcial, obtemos os seguintes fatores L e U:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix}$$

com 2 trocas de linhas. Logo:

$$\det(A) = (-1)^k \det(L.U) = (-1)^2 \times 4 \times (-4) \times 35/8 = -70$$

5.10 Sistemas Lineares Complexos

Um sistema linear $Ax = b$ é dito complexo se seus elementos são números complexos, isto é, se:

$$\begin{aligned} A &= M + Ni \\ x &= s + ti \\ b &= c + di \end{aligned}$$

sendo M e N matrizes $n \times n$, s, t, c, d vetores $n \times 1$ e $i^2 = -1$.

Exemplo: Dado o sistema linear complexo:

$$\begin{cases} (2+3i)x_1 + (4-2i)x_2 = 3+5i \\ 7ix_1 - 4x_2 = 9+3i \end{cases} \tag{5.41}$$

temos:

$$A = \begin{bmatrix} 2+3i & 4-2i \\ 7i & -4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} s_1 + t_1 i \\ s_2 + t_2 i \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3+5i \\ 9+3i \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para descomplexificar esse sistema procedemos como segue:
$Ax = b$
$(M + Ni)(s + ti) = (c + di)$
$Ms + Nsi + Mti + Nti^2 = c + di$
$Ms + Nsi + Mti - Nt = c + di$
$Ms - Nt + (Ns + Mt)i = c + di$
Como duas entidades complexas são iguais se forem iguais as suas partes real e imaginária, então:

$$\begin{cases} Ms & - & Nt & = & c \\ Ns & + & Mt & = & d \end{cases}$$

As equações anteriores formam um sistema linear de coeficientes reais, cujas incógnitas são os vetores s e t, que pode ser resolvido por qualquer um dos métodos apresentados anteriormente. Esse sistema pode ser colocado na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M & -N \\ N & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

Exemplo: Resolver o sistema (5.41) por qualquer método numérico.

5.11 Cálculo da Inversa de uma Matriz

Seja $A_{n\times n}$ a matriz que se deseja inverter. Se $A_{n\times n}$ possui a inversa $X_{n\times n}$ então $AX = I$.

Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n$ as colunas de X. Para determinar a matriz inversa faz-se necessário resolver n sistemas lineares cuja matriz dos coeficientes é a mesma, isto é, devem ser resolvidos os sistemas:

$$\begin{aligned} AX_1 &= (\ 1\ 0\ 0\ \cdots\ 0\ )^t \\ AX_2 &= (\ 0\ 1\ 0\ \cdots\ 0\ )^t \\ &\vdots \\ AX_n &= (\ 0\ 0\ 0\ \cdots\ 1\ )^t \end{aligned}$$

O método mais indicado para calcular a inversa de uma matriz é o Método da Decomposição LU, uma vez que é necessário resolver vários sistemas lineares em que a matriz dos coeficientes é a mesma.

Exercício:
Aplicar o método anterior para encontrar a inversa da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

5.12 Comparação entre Métodos

A Tabela 9 compara os métodos iterativos e diretos com relação a vários aspectos.

Tabela 9: Comparação entre os métodos numéricos

Item	**Método Direto**	**Método Iterativo**
Convergência	A solução é sempre obtida	Há garantia de obter solução somente sob certas condições
Número de operações	É possível determinar a priori o número de operações necessárias	Não é possível determinar a princípio a complexidade
Esparsidade	Destrói a esparsidade da matriz durante a fase de eliminação	Preserva a esparsidade da matriz
Erros de arredondamento	Os erros aparecem durante a aplicação das transformações elementares sobre as equações do sistema. Esse erro se propaga porque as transformações de cada fase são realizadas a partir de equações transformadas da fase anterior, as quais estão sujeitas a erros. Essa propagação de erros pode ser minimizada usando-se técnicas de pivoteamento.	Apenas a solução corrente é sujeita a erro. Não há propagação dos erros porque são usados os coeficientes originais da matriz A e vetor b no cálculo das componentes da solução.

5.13 Mal Condicionamento de Sistemas Lineares

Resolva os sistemas lineares (a) e (b) a seguir e compare suas soluções.

$$(a)\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 1,00001y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad (b)\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 0,99999y = 0 \end{cases}$$

O que aconteceu e por quê? Esta é uma situação em que o sistema é dito "mal condicionado".

Dizemos que um sistema é bem condicionado (estável) se pequenas mudanças nos coeficientes e nos termos independentes acarretam pequenas mudanças na solução do sistema.

No caso de sistemas mal condicionados, pequenas mudanças nos dados de entrada provocam grandes variações na solução final.

Um critério prático para verificar se um sistema é mal condicionado consiste em avaliar o determinante normalizado da matriz dos coeficientes, dado por:

$$\det(NormA) = \frac{\det A}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \tag{5.42}$$

sendo $\alpha_i = \sqrt{a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2}$

Se o módulo desse determinante estiver muito próximo de zero ($|\det(NormA)| \ll 1$) pode-se esperar o mal condicionamento do sistema.

Exercício:
Verifique se o sistema (5.43) é mal condicionado.

$$\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 24 \\ 8x_1 + 9x_2 + 10x_3 = 27 \\ 9x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 27 \end{cases} \tag{5.43}$$

5.14 Aplicações

5.14.1 Eletricidade

Seja o diagrama de circuito dado pela Figura 9:

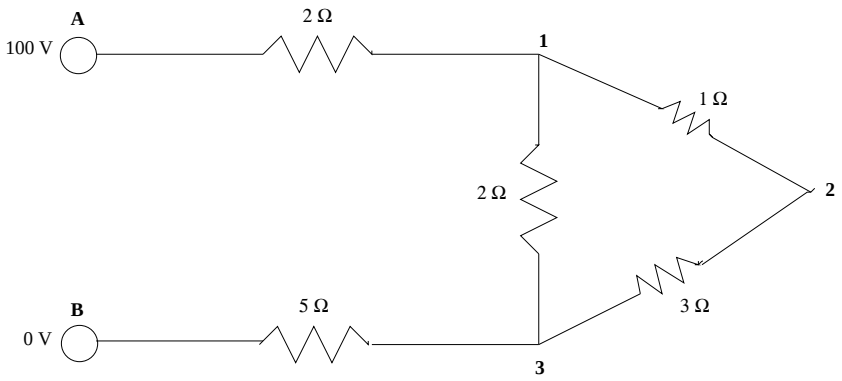

Figura 9: Diagrama de circuito de uma rede elétrica

Pela Lei de Ohm, a corrente que flui do nó p para o nó q de uma rede elétrica é calculada com base na fórmula $I_{pq} = \frac{V_p - V_q}{R_{pq}}$, com I em ampères e R em Ohms, sendo V_p e V_q as voltagens nos nós p e q, respectivamente, e R_{pq} a resistência no arco pq.

Pela Lei de Kirchoff, a soma das correntes que chegam a cada nó é nula; assim, as equações que relacionam as voltagens podem ser obtidas.

Para o diagrama de circuito considerado, pede-se:

(a) Obter as equações dos nós 1, 2 e 3;

(b) Aplique o critério de Sassenfeld ao sistema resultante para mostrar que ele converge usando um método iterativo;

(c) Resolver o sistema formado por um método iterativo, com $\varepsilon < 0.5$, a fim de se obter as voltagens em cada nó do circuito.

Resposta: A solução do sistema que contém as voltagens do circuito com erro $\varepsilon < 0,5$ é, pelo Método de Gauss-Seidel:

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} 74,99 \\ 70,95 \\ 59,17 \end{bmatrix}$$

Observação: A solução exata é $\bar{V} = [76 \quad 72 \quad 60]^t$:

5.14.2 Estequiometria de reação química

Equilibrar a reação química:

$$\mathrm{KMnO_4 + H_2SO_4 + NaNO_2 \Longrightarrow K_2SO_4 + MnSO_4 + NaNO_3 + H_2O}$$

Sugestão: Atribua coeficientes x_i às substâncias que aparecem na equação. Como pela Lei de Lavoisier, em uma reação química a soma das massas dos reagentes é igual à soma das

massas dos produtos resultantes, então iguale a quantidade de cada elemento químico que aparece no lado esquerdo da equação à quantidade desse mesmo elemento que aparece no lado direito da equação. Esse procedimento, feito para cada elemento químico, resultará em um sistema de equações lineares, onde as incógnitas são os coeficientes estequiométricos x_i da reação química. No caso de haver mais incógnitas do que equações, o sistema é indeterminado, isto é, há uma infinidade de soluções para ele. Para gerar uma dessas soluções, basta atribuir um valor qualquer a uma das incógnitas. Caso apareçam valores negativos para alguma incógnita, tente outra atribuição, já que no caso real os coeficientes estequiométricos são números inteiros positivos. Se a solução do sistema for fracionária, multiplique-a pelo determinante do sistema. Isto fará com que todos os coeficientes sejam inteiros.

Resposta: Uma das possíveis soluções é:

$$2KMnO_4 + 3H_2SO_4 + 5NaNO_2 \Longrightarrow K_2SO_4 + 2MnSO_4 + 5NaNO_3 + 3H_2O$$

Referências

[1] L.C. Barroso, M.M.A. Barroso, F.F. Campos Filho, M.L.B. de Carvalho e M.L. Maia. "Cálculo Numérico (com aplicações)", Editora HARBRA, São Paulo, 2^a edição, 1987.

[2] F.F. Campos Filho, "Algoritmos Numéricos", Livros Técnicos Científicos Editora, 2^a edição, Rio de Janeiro, 2007.

[3] E. Kreyzig, "Advanced Engineering Mathematics", John Wiles & Sons Inc., 70th edition, New York, 1993.

[4] M.A.G. Ruggiero e V. L. R. Lopes, "Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais", Editora McGraw-Hill, São Paulo, 1988.