Equações Algébricas e Transcendentes

Marcone Jamilson Freitas Souza, Departamento de Computação, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, 35400-000 Ouro Preto, MG, Brasil. E-mail: marcone@iceb.ufop.br

1 Introdução

O objetivo deste capítulo é o de apresentar métodos numéricos para resolver uma equação $f(x) = 0$.

Resolver uma equação $f(x) = 0$ significa encontrar números ξ_i, denominados raízes, tais que $f(\xi_i) = 0$. Geometricamente, conforme mostra a Figura 1, as raízes representam os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox.

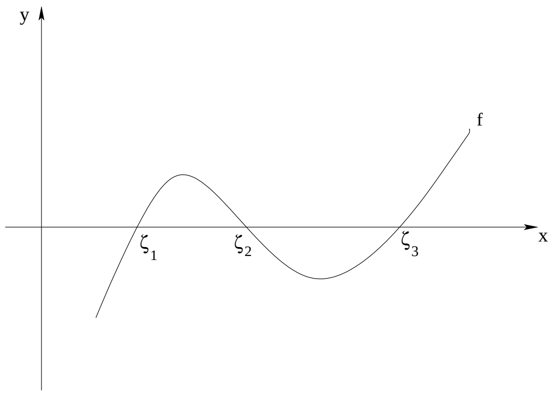

Figura 1: Raízes de uma equação

2 Fases na determinação de raízes

A determinação de raízes envolve as seguintes fases:

2.1 Fase I - Isolamento

Nesta fase o objetivo é o de determinar um intervalo $[a, b]$, o menor possível, que contenha uma única raiz.

Para cumprir este objetivo os métodos que apresentaremos a seguir apoiam-se em dois resultados do Cálculo Diferencial e Integral.

Teorema de Cauchy-Bolzano Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$. Se $f(a) \times f(b) < 0$ então existe pelo menos um ponto $\xi \in [a, b] : f(\xi) = 0$.

Resultado 2 Se f' preservar o sinal em $[a, b]$ e o Teorema de Cauchy-Bolzano for verificado neste intervalo então a raiz ξ é única.

Assim, para isolarmos as raízes de uma equação $f(x) = 0$ comumente utilizamos um dos seguintes procedimentos:

Procedimento I:
Esboçar o gráfico de f, determinando intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ que contenham uma única raiz.

Este objetivo pode ser cumprido gerando-se uma tabela de pontos $(x_i, f(x_i))$, onde os pontos inicial e final, bem como o valor do passo considerado $(x_{i+1} - x_i)$, dependerão do problema considerado e da experiência do usuário.

Exemplo: Isolar as raízes de $f(x) = 2x - \cos x = 0$.

Inicialmente, geremos uma tabela de pontos $x_i, f(x_i)$.

x_i	$f(x_i)$
$\vdots$	$\vdots$
-2	-3.58
-1	-2.54
0	-1
1	1.46
2	4.42
$\vdots$	$\vdots$

Como $f(0) \times f(1) < 0 \Longrightarrow \xi \in [0, 1]$. Sendo $f'(x) = 2x + \operatorname{sen} x > 0 \; \forall x \Longrightarrow \xi$ é única.

Procedimento II:
Decompor a função f, se possível, na forma $f = g - h$, onde os gráficos de g e h sejam conhecidos e mais simples. Neste caso, os pontos de interseção dos gráficos de g e h representam as raízes de $f(x) = 0$.

Com efeito, sejam x_i os pontos de interseção dos gráficos de g e h. Logo:

$$g(x_i) = h(x_i) \Longrightarrow g(x_i) - h(x_i) = 0 \tag{2.1}$$

Como $f(x) = (g - h)(x) = g(x) - h(x) \;\; \forall x$ então:

$$g(x_i) - h(x_i) = f(x_i) \tag{2.2}$$

Sendo $g(x_i) - h(x_i) = 0$ (equação 2.1), resulta pela equação 2.2 que $f(x_i) = 0$, isto é, os valores x_i são as raízes de $f(x) = 0$.

Exemplo: Isolar as raízes de $f(x) = 2x - \cos x$.

Inicialmente, façamos a decomposição da função f dada:

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x - \cos(x) = 0 \Longleftrightarrow \underbrace{2x}_{g(x)} = \underbrace{\cos x}_{h(x)}$$

Esbocemos, a seguir, os gráficos das funções $g(x) = 2x$ e $h(x) = \cos x$.

A partir da visualização gráfica e tendo em vista que $f(0) \times f(\pi/2) = -\pi < 0$, concluímos que existe uma raiz $\xi \in [0, \pi/2]$.

<u>Exercícios</u>
Isole as raízes das seguintes equações:

(a) $f(x) = x^3 - 9x + 3 = 0$

(b) $f(x) = x + \ln x = 0$

(c) $f(x) = x \ln x - 1 = 0$

(d) $f(x) = x^3 + 2 + 10^x = 0$

(e) $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$

(f) $f(x) = x^5 + 3x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12 = 0$

2.2 Fase II - Refinamento

Uma vez isolada uma raiz em um intervalo $[a, b]$, procura-se, nesta fase, considerar uma aproximação para a raiz e "melhorá-la" sucessivamente até se obter uma aproximação com a precisão requerida.

3 Critérios de parada

Dizemos que x_k é uma "boa" aproximação para a raiz ξ de uma equação $f(x) = 0$ se os critérios abaixo forem satisfeitos:

(i) $|f(x_k)| < \varepsilon$

(ii) $|x_k - \xi| < \varepsilon$

onde ε é a precisão (tolerância) admitida.

Observamos que estes dois critérios não são equivalentes. De fato:

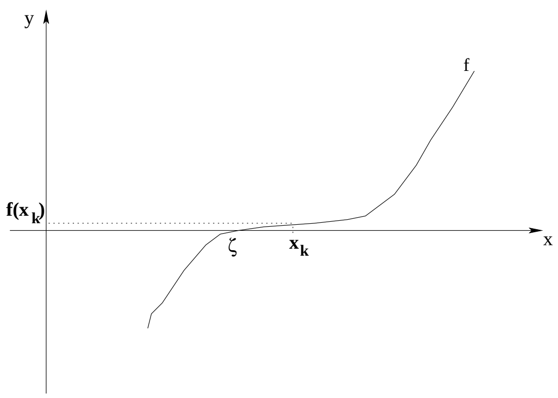

Figura 2: Caso (a)

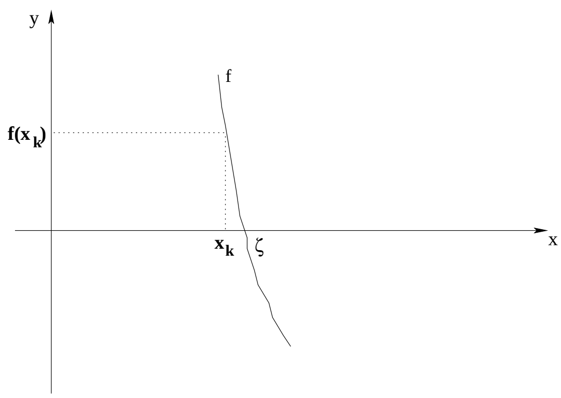

Figura 3: Caso (b)

No caso (a) temos $|f(x_k)| < \varepsilon$ mas com $|x_k - \xi| \gg \varepsilon$. No caso (b), ao contrário, temos $|x_k - \xi| < \varepsilon$ mas com $|f(x_k)| \gg \varepsilon$.

Desta forma, faz-se necessário impor os dois critérios. Por outro lado, como um determinado método pode não convergir em uma dada aplicação, é comum impor-se, também, um número máximo de iterações.

A questão que surge é: Como avaliar o critério de parada (ii) se não se conhece ξ?

Para resolver esta questão a idéia é reduzir o intervalo $[a, b]$ que contém a raiz ξ até que sua amplitude seja inferior à precisão requerida, isto é, até que $b - a < \varepsilon$.

Assim, sendo $b - a < \varepsilon \Longrightarrow \forall x_k \in [a, b]$ tem-se $|x_k - \xi| < b - a < \varepsilon$. Logo, $|x_k - \xi| < \varepsilon$ e qualquer $x_k \in [a, b]$ é uma boa aproximação para a raiz ξ.

4 Método da Bisseção

4.1 Introdução

A idéia do Método da Bisseção é reduzir o intervalo $[a, b]$ que contém a raiz ξ dividindo-o ao meio a cada iteração.

4.2 Algoritmo

Apresentamos pela Figura 4 o pseudo-código do procedimento Bisseção.

procedimento *Bissecao(a,b, ε, ITERMAX,x)*;
$k \leftarrow 0$;
$x \leftarrow (a + b)/2$;
enquanto $((b - a \geq \varepsilon$ ou $f(x) \geq \varepsilon)$ e $k \leq ITERMAX)$ faça
    se $(f(a) \times f(x) < 0)$
        então $b \leftarrow x$
        senão $a \leftarrow x$;
    $x \leftarrow (a + b)/2$;
    $k \leftarrow k + 1$;
fim-enquanto;
se $(k \leq ITERMAX)$
    então Retorne x como aproximação para a raiz;
    senão Imprima: Não foi obtida uma aproximação com a precisão
        requerida em k iterações;
fim *Bissecao*;

Figura 4: Algoritmo do Método da Bisseção

4.3 Estimativa do número de iterações

Estimemos o número de iterações necessárias para obter uma aproximação x_k com uma precisão ε estabecida a priori, utilizando-se o critério (ii) da seção 3, $|x_k - \xi| < \varepsilon$, como único critério de parada.

$b_0 - a_0 = b - a$
$b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2 = (b - a)/2$
$b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)/2 = (b_0 - a_0)/4 = (b - a)/2^2$
$\vdots$
$b_k - a_k = (b - a)/2^k$

Impondo $b_k - a_k < \varepsilon$, vem:

$\frac{b-a}{2^k} < \varepsilon \Longrightarrow \frac{b-a}{\varepsilon} < 2^k \Longrightarrow 2^k > \frac{b-a}{\varepsilon} \Longrightarrow \ln 2^k > \ln \frac{b-a}{\varepsilon} \Longrightarrow k \ln 2 > \ln \frac{b-a}{\varepsilon}$

Assim, o número mínimo de iterações necessárias para se calcular uma aproximação para a raiz de uma equação com precisão ε pode ser determinado pela expressão:

$$k > \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} \tag{4.3}$$

4.4 Exemplo 1

Determinar o número de iterações necessárias para calcular a raiz de $f(x) = 2x - \cos x = 0$ no intervalo $[0, 1]$ com precisão $\varepsilon < 0,01$, utilizando-se $|x_k - \xi| < \varepsilon$ como critério de parada.

Solução

Para o exemplo considerado temos: $a = 0$, $b = 1$, $\varepsilon = 0,01$. Aplicando o resultado 4.3, vem:

$$k > \frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2} = \frac{\ln \frac{1-0}{0,01}}{\ln 2} = 6,64$$

Como o número k de iterações é um número inteiro, resulta que $k = 7$.

4.5 Exemplo 2

Determinar com precisão $\varepsilon < 0,01$ e com um máximo de 10 iterações, a raiz da equação $f(x) = 2x - \cos x = 0$.

Solução:

(a) Isolamento da raiz:

Já foi visto que $\xi \in [0, 1]$.

(a) Refinamento da solução:

k	a	b	x_k	$f(x_k)$	$b-a$	Conclusão
0	0	1	0.500	0.122	1	$\xi \in [0.000, 0.500]$
1	0	0.500	0.250	-0.469	0.500	$\xi \in [0.250, 0.500]$
2	0.250	0.500	0.375	-0.181	0.250	$\xi \in [0.375, 0.500]$
3	0.375	0.500	0.438	-0.031	0.125	$\xi \in [0.438, 0.500]$
4	0.438	0.500	0.469	0.045	0.063	$\xi \in [0.438, 0.469]$
5	0.438	0.469	0.453	0.007	0.031	$\xi \in [0.438, 0.453]$
6	0.438	0.453	0.445	-0.012	0.016	$\xi \in [0.445, 0.453]$
7	0.445	0.453	0.449	-0.002	0.008	Pare! pois $b - a < \varepsilon$ e $\lvert f(x_k)\rvert < \varepsilon$

Na iteração 7, tanto a amplitude do intervalo $[a, b]$ quanto a imagem, em módulo, de x_7 são menores que a precisão requerida, isto é, $b - a = 0.453 - 0.445 = 0.008 < \varepsilon = 0.01$ e $|f(x_7)| = 0.008 < \varepsilon = 0.01$. Desta forma, dizemos que $x_7 = 0.449$ é uma aproximação para a raiz ξ da equação $f(x) = 2x - \cos x = 0$ com uma precisão $\varepsilon < 0.01$.

4.5.1 Vantagens e Desvantagens do Método da Bisseção

A maior vantagem do Método da Bisseção é que, para sua convergência, não há exigências com relação ao comportamento do gráfico de f no intervalo $[a, b]$.

Entretanto, ele não é eficiente devido à sua convergência lenta. Pode ser observado que $f(x)$ não decresce monotonicamente. Isto decorre do fato de que na escolha de uma aproximação $x = \frac{a+b}{2}$ não se leva em consideração os valores da função nos extremos do intervalo. No pior caso, a raiz ξ está próxima a um extremo.

O Método da Bisseção é mais usado para reduzir o intervalo antes de usar um outro método de convergência mais rápida.

5 Método da Falsa Posição

5.1 Introdução

Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ tal que $f(a) \times f(b) < 0$.

A idéia deste método é a de tomar como aproximação x para a raiz ξ no intervalo $[a, b]$ a média ponderada entre os extremos a e b com pesos $|f(b)|$ e $|f(a)|$, respectivamente. Isto é:

$$x = \frac{a \times |f(b)| + b \times |f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} \tag{5.4}$$

Desta forma, x estará mais próximo do extremo cuja imagem for menor.

Como $f(a)$ e $f(b)$ têm valores de sinais contrários, então temos dois casos a considerar:

(i) $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$

Neste caso, $|f(a)| = -f(a)$ e $|f(b)| = f(b)$. Logo:

$$x = \frac{a \times |f(b)| + b \times |f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} = \frac{a \times f(b) - b \times f(a)}{f(b) - f(a)}$$

(ii) $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$

Neste caso, $|f(a)| = f(a)$ e $|f(b)| = -f(b)$. Logo:

$$x = \frac{a \times |f(b)| + b \times |f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} = \frac{-a \times f(b) + b \times f(a)}{-f(b) + f(a)} = \frac{a \times f(b) - b \times f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Observamos que em ambos os casos tem-se, portanto:

$$x = \frac{a \times f(b) - b \times f(a)}{f(b) - f(a)} \tag{5.5}$$

Neste método, as aproximações são geradas conforme a expressão 5.5 garantindo-se, a cada iteração, que elas estejam no intervalo $[a, b]$ cujos extremos tenham valores de sinais contrários.

5.2 Interpretação geométrica

O número x dado pela fórmula 5.5 representa o ponto de interseção da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ com o eixo Ox.

De fato, a equação da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é:

$$\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo este determinante, obtemos:

$xf(a) + bf(x) + af(b) - bf(a) - af(x) - xf(b) = 0$

$x(f(a) - f(b)) + (b - a)f(x) + af(b) - bf(a) = 0$

$x = \frac{(b-a)f(x) + bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)}$

No ponto de interseção dessa reta com o eixo Ox tem-se f(x)=0. Logo:

$x = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)}$

Multiplicando numerador e denominador por -1 resulta a expressão:

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Observamos que o Método da Falsa Posição procura gerar, a cada iteração, uma aproximação x_k para a raiz ξ cuja imagem seja a menor possível, isto é, uma aproximação tal que $|f(x_k)| < \varepsilon$, sem se preocupar com a diminuição da amplitude $(b - a)$ do intervalo $[a, b]$ que contém a raiz.

A Figura 5 ilustra como funciona o método.

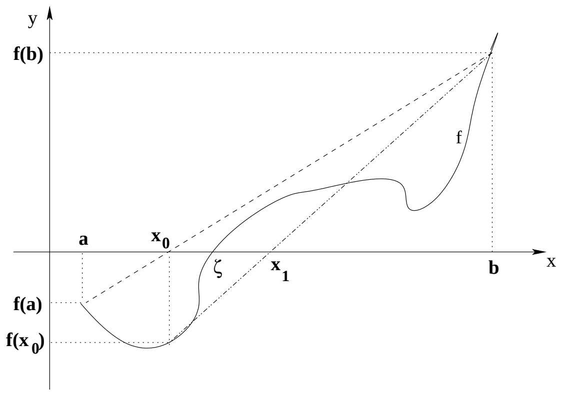

Figura 5: Interpretação geométrica do Método da Falsa Posição

5.3 Convergência

Teorema 1 Seja f contínua em um intervalo $[a, b]$ tal que $f(a) \times f(b) < 0$. Se, além disso:

(i) f' preservar o sinal e não se anular em $[a, b]$;

(ii) $m = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|$;

(iii) $M = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$;

Então: $|x_k - \xi| < \frac{M-m}{m} |x_k - x_{k-1}|$

Desta forma, se fizermos $|x_k - x_{k-1}| < \frac{\varepsilon}{\frac{M-m}{m}}$ obteremos $|x_k - \xi| < \varepsilon$, isto é, o critério (ii) da seção 3 pode ser satisfeito impondo-se $|x_k - x_{k-1}| < \frac{\varepsilon}{\frac{M-m}{m}}$.

Entretanto, como na prática o cálculo dos limitantes inferior e superior da derivada primeira de f no intervalo $[a, b]$ não é uma tarefa das mais simples (assim como verificar a satisfação ao item (i) do Teorema 1), é comum impor-se apenas que $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ seja utilizado como critério substituto do mecanismo de parada (ii) da seção 3. Observamos, entretanto, que com essa imposição, nem sempre o Teorema 1 será atendido. Assim, não haverá garantia de que a solução x_k difira da raiz ξ de ε.

Teorema 2 Se f é uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e $f(a) \times f(b) < 0$ então o Método da Falsa Posição converge.

Observamos que se f'' preservar o sinal em $[a, b]$, um dos extremos se manterá fixo durante o processo iterativo. Há 4 casos a analisar: (1) $f''(x) > 0 \;\; \forall x \in [a, b]$, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$; (2) $f''(x) < 0 \;\; \forall x \in [a, b]$, $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$; (3) $f''(x) > 0 \;\; \forall x \in [a, b]$, $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$ e (4) $f''(x) < 0 \;\; \forall x \in [a, b]$, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Nos dois primeiros casos, o extremo direito b do intervalo será fixo, enquanto que nos dois últimos casos, o ponto fixo será o extremo esquerdo a.

5.4 Algoritmo

Apresentamos pela Figura 6 o pseudo-código do procedimento Falsa Posição. Este procedimento considera os critérios $|f(x_k)| < \varepsilon$ e $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ como mecanismos de parada.

procedimento *FalsaPosicao(a,b, ε, ITERMAX,x)*;
$k \leftarrow 0$;
$x_{\text{ant}} \leftarrow a$;
$x \leftarrow \frac{a \times f(b) - b \times f(a)}{f(b) - f(a)}$;
enquanto $((|x - x_{\text{ant}}| \geq \varepsilon$ ou $|f(x)| \geq \varepsilon)$ e $k \leq ITERMAX)$ faça
    se $(f(a) \times f(x) < 0)$
        então $b \leftarrow x$
        senão $a \leftarrow x$;
    $x_{\text{ant}} \leftarrow x$;
    $x \leftarrow \frac{a \times f(b) - b \times f(a)}{f(b) - f(a)}$;
    $k \leftarrow k + 1$;
fim-enquanto;
se $(k \leq ITERMAX)$
    então Retorne x como aproximação para a raiz;
    senão Imprima: Não foi obtida uma aproximação com a precisão
        requerida em k iterações;
fim *FalsaPosicao*;

Figura 6: Algoritmo do Método da Falsa Posição

5.5 Exemplo

Determinar, com erro $\varepsilon < 0,01$, a raiz da equação $f(x) = 2x - \cos x = 0$ no intervalo $[0, 1]$.
Solução:

Gerando as aproximações x_k segundo a expressão 5.6, obteremos a seguinte tabela:

k	a	b	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$	Conclusão
0	0	1	0.407	-0.105	-	$\xi \in [0.407, 1.000]$
1	0.407	1.000	0.447	-0.009	0.040	$\xi \in [0.447, 1.000]$
2	0.447	1.000	0.450	-0.001	0.003	Pare! pois $\lvert f(x_2) \rvert < 0.01$ e $\lvert x_2 - x_1 \rvert < \varepsilon$

Logo, $x_2 = 0.450$ é uma aproximação para a raiz ξ da equação $f(x) = 2x - \cos x = 0$ com uma precisão $\varepsilon < 0.01$.

5.6 Vantagens e Desvantagens do Método da Falsa Posição

A grande vantagem do Método da Falsa Posição é que ela é uma técnica robusta, que converge independentemente da forma do gráfico de f no intervalo $[a, b]$.

Entretanto, quando a convergência para a raiz só se faz a partir de um extremo do intervalo $[a, b]$ e a imagem desse ponto fixo tem um valor muito elevado, a convergência é lenta. Este fato pode ser verificado analisando-se mais cuidadosamente a fórmula 5.5.

Suponhamos que o ponto fixo seja b. Neste caso, coloquemos a fórmula 5.5 em um outro formato, que mostre a parcela de acréscimo dado ao extremo esquerdo a, que nesta situação é variável. Para tanto, adicionemos ao seu numerador as parcelas $-a \times f(a)$ e $a \times f(a)$. Logo:

$x = \frac{a \times f(b) - b \times f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{a \times f(b) - b \times f(a) - a \times f(a) + a \times f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{a[f(b) - f(a)] - (b-a) f(a)}{f(b) - f(a)}$

Assim:

$$x = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a) \tag{5.6}$$

Analisemos essa última fórmula. Sendo, por hipótese, b fixo e $f(b)$ elevado, a expressão $-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b - a)$, que representa o acréscimo, será pequena, acarretando convergência tão mais lenta quanto maior for o valor de $f(b)$. Para o caso de se considerar a como ponto fixo, faz-se necessário colocar a fórmula 5.6 em outro formato equivalente (que pode ser obtido a partir da fórmula 5.5, somando-se e subtraindo a parcela $bf(b)$ ao seu numerador), a saber: $x = b - \frac{f(b)}{f(b)-f(a)}(b - a)$.

Para evitar que um extremo fique fixo durante o processo iterativo (situação que ocorre quando $f(x_k) \times f(x_{k-1}) > 0$), a idéia é substituir a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ por uma de inclinação menor. Por exemplo, se em duas iterações consecutivas tivermos $f(x_k) \times f(x_{k-1}) > 0$ e o extremo fixo for b, então substituimos $f(b)$ da fórmula 5.6 por $f(b)/2$.

6 Método de Newton-Raphson

6.1 Introdução

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ tal que:

(i) $f(a) \times f(b) < 0$

(ii) Existe uma única raiz $\xi \in [a, b]$

(iii) f' e f'' preservam o sinal e não se anulam em $[a, b]$

Um exemplo de uma função satisfazendo as condições acima é o da figura 7 abaixo:

A idéia do Método de Newton-Raphson é a de aproximar um arco da curva por uma reta tangente traçada a partir de um ponto da curva.

Seja $x_0 \in [a, b]$ uma aproximação inicial para a raiz. A tangente de α na figura 7 é:

$$\tan(\alpha) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$$

De onde resulta que:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

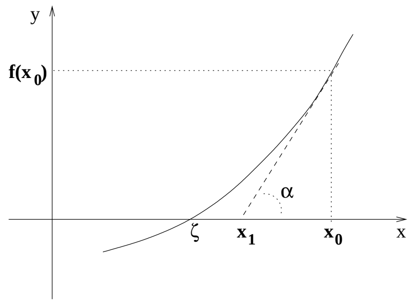

Figura 7: Interpretação geométrica do Método de Newton-Raphson

De forma análoga obtemos x_2, que representa a interseção da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_1, f(x_1))$ com o eixo dos x:

$$\tan(\beta) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} = f'(x_1)$$

Isto é:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Genericamente:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \quad \forall k = 1, 2, \ldots \tag{6.7}$$

6.2 Escolha da aproximação inicial

Teorema Se $f(a) \times f(b) < 0$ e f' e f'' forem não nulas e preservarem o sinal em $[a, b]$, então partindo-se de uma aproximação inicial $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) \times f''(x_0) > 0$ é possível gerar, pelo Método de Newton, uma sequência de aproximações x_k que convirja para a raiz ξ de $f(x) = 0$.

6.3 Exemplo

Determinar pelo Método de Newton-Raphson, com precisão $\varepsilon < 0,01$ em um máximo de 10 iterações, a raiz da equação $f(x) = 2x - \cos x = 0$.

(a)Isolamento

Já foi visto que $\xi \in [0, 1]$.

(b)Determinação de x_0:

$f'(x) = 2 + \text{sen} x \Longrightarrow f'(x) > 0 \;\; \forall\, x \in [0, 1]$

$f''(x) = \cos x \Longrightarrow f''(x) > 0 \;\; \forall\, x \in [0, 1]$

Sendo $f(0) = -1$, $f(1) = 1.46$ e $f''(x) > 0$ então podemos tomar como aproximação inicial $x_0 = 1$, pois $f(1)f''(1) > 0$.

(c)Refinamento:

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$	Conclusão
0	1	1.460	2.841	-	
1	0.486	0.088	2.467	0.514	
2	0.450	0.001	2.435	0.036	
3	0.450	0.000	2.435	0.000	Pare! pois $\|f(x_3)\| < 0.01$ e $\|x_3 - x_2\| < \varepsilon$

Logo, $x_3 = 0.450$ é uma aproximação para a raiz ξ da equação $f(x) = 2x - \cos x = 0$ com uma precisão $\varepsilon < 0.01$.

6.4 Algoritmo

Apresentamos pela Figura 8 o pseudo-código do procedimento Newton-Raphson. Este procedimento considera os critérios $|f(x_k)| < \varepsilon$ e $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ como mecanismos de parada.

procedimento *Newton-Raphson*(ε, *ITERMAX*, x);
  $k \leftarrow 0$;
  $\delta \leftarrow \infty$;
  <u>enquanto</u> $(|\delta| \geq \varepsilon$ <u>ou</u> $|f(x)| \geq \varepsilon)$ <u>e</u> $k \leq ITERMAX$ <u>faça</u>
    $\delta \leftarrow -\frac{f(x)}{f'(x)}$;
    $x \leftarrow x + \delta$;
    $k \leftarrow k + 1$;
  <u>fim-enquanto</u>;
  <u>se</u> $(k \leq ITERMAX)$
    <u>então</u> Retorne x como aproximação para a raiz;
    <u>senão</u> Imprima: Não foi obtida uma aproximação com a precisão
      requerida em k iterações;
fim *Newton-Raphson*;

Figura 8: Algoritmo do Método de Newton-Raphson

6.5 Vantagens e desvantagens do Método de Newton

O Método de Newton-Raphson tem convergência muito boa (quadrática). Entretanto, apresenta as seguintes desvantagens:

(i) Exige o cálculo e a análise do sinal de f' e f''

(ii) Se $f'(x_{k-1})$ for muito elevado a convergência será lenta

(iii) Se $f'(x_{k-1})$ for próximo de zero pode ocorrer *overflow*

Para contornar o item (i), o qual é necessário para a escolha da aproximação inicial, é comum apenas calcular-se o valor da função e o de sua derivada segunda nos extremos a e b, considerando para x_0 o extremo que satisfazer a condição $f(x_0) \times f''(x_0) > 0$. Para tanto, é importante que o intervalo $[a, b]$ considerado seja suficientemente pequeno, de forma a minimizar a possibilidade de variação de sinal de f' e f''.

7 Estudo Especial das Equações Algébricas

Equações algébricas são todas as equações que podem ser colocadas na forma:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \tag{7.8}$$

onde $a_i \in \mathcal{R} \quad \forall i = 0, 1, \cdots, n$

Teorema Fundamental da Álgebra $P_n(x) = 0$ tem n raízes $\xi_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$ reais ou complexas.

7.1 Valor de um polinômio em um ponto

7.1.1 Forma tradicional

Dado um polinômio $P_2(x) = 3x^2 - 5x + 6$, se desejarmos calcular seu valor em um dado ponto, por exemplo, para $x = 1$, normalmente o fazemos da seguinte forma:

$$P_2(1) = 3 \times 1^2 - 5 \times 1 + 6$$

Observamos que essa forma tem complexidade quadrática ($O(n^2)$), conforme se mostra na Tabela 1 a seguir.

Tabela 1: Complexidade da forma tradicional de se avaliar um polinônio

Polinômio	**Grau**	**Adições**	**Multiplicações**	**Total**
$P_1(x) = a_1x + a_0$	1	1	1	2
$P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$	2	2	3 (1+2)	5
$P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$	3	3	6 (1+2+3)	9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$	n	n	$1 + 2 + \cdots + n$	$\frac{n^2+3n}{2}$

7.1.2 Regra de Horner

Uma forma de reduzir a complexidade envolvida na avaliação de um polinômio em um ponto é usar a Regra de Horner, que usa uma sequência de parênteses aninhados.

Tabela 2: Complexidade da Regra de Horner

Polinômio	**Grau**	**Adições**	**Multiplicações**	**Total**
$P_1(x) = a_1x + a_0$	1	1	1	2
$P_2(x) = (a_2x + a_1)x + a_0$	2	2	2	4
$P_3(x) = ((a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$	3	3	3	6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_n(x) = (\cdots(a_nx + a_{n-1})x + \cdots + a_1)x + a_0$	n	n	n	$2n$

Como se pode observar da Tabela 2, a complexidade envolvida na avaliação de um polinômio em um ponto por esta regra é linear ($O(n)$).

Exemplo: Calcular $P(5)$ nos seguintes casos:
(a) $P(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 1$
(b) $P(x) = x^5 + 2x^3 + 5x^2 - 6$

Solução:
(a) $P(x) = ((4x + 2)x - 1)x + 1 \Longrightarrow P(5) = ((4 \times 2 + 2) \times 2 - 1) \times 2 + 1 = 546$
(b) $P(x) = ((((x + 0)x + 2)x + 5)x + 0)x - 6 \quad \Longrightarrow$

$$P(5) = ((((5 + 0) \times 5 + 2) \times 5 + 5) \times 5 + 0) \times 5 - 6 = 3494$$

Na Figura 9 ilustra-se o pseudocódigo do procedimento Horner. Os parâmetros de entrada deste procedimento são o grau n do polinômio, seu vetor a de coeficientes, o ponto x para o qual se deseja calcular o valor do polinômio. A saída é a variável P, que acumula o valor do polinômio no ponto x.

procedimento *Horner(n, a, P, x)*;
$P \leftarrow a_n$;
para $i = n$ até 1 passo -1 faça
    $P \leftarrow P \times x + a_{i-1}$;
fim-enquanto;
Retorne P;
fim *Horner*;

Figura 9: Procedimento de Horner

7.2 Limite das Raízes Reais

7.2.1 Limite Superior das Raízes Positivas (LSRP)

Teorema de Lagrange Seja a equação algébrica
$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ com $a_n > 0$, $a_0 \neq 0$ e $k = \max\limits_{0 \leq i \leq n-1} \{i : a_i < 0\}$. Então para limite superior das raízes positivas de $P_n(x) = 0$, caso existam, pode-se tomar o número:

$$L = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}} \tag{7.9}$$

sendo $B = \max\limits_{\substack{a_i < 0 \\ 0 \leq i \leq n-1}} |a_i|$

Desse teorema concluímos que se ξ^+ é a maior das raízes positivas de $P_n(x) = 0$, então:

$$\xi^+ \leq L$$

Exemplo 1: Determinar o limite superior das raízes positivas da equação $P(x) = x^5 + 3x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12 = 0$.

Solução:
$n = 5$, $a_n = 1$, $a_0 = -12 \neq 0$,

$k = \max\limits_{0 \le i \le n-1} \{i : a_i < 0\} = \max\limits_{0 \le i \le 4} \{3, 2, 0\} = 3$
$B = \max\limits_{\substack{a_i < 0 \\ 0 \le i \le n-1}} |a_i| = \max\limits_{\substack{a_i < 0 \\ 0 \le i \le 4}} \{|-9|, |-1|, |-12|\} = 12$
$L = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}} = 1 + \sqrt[2]{\frac{12}{1}} = 1 + 3.46 = 4.46$
Logo, $\xi^+ \le 4.46$

7.2.2 Limite Inferior das Raízes Positivas (LIRP)

Sejam $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ as raízes de $P_n(x) = 0$. Logo:

$$P(x) = a_n(x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_n) = 0$$

Para determinarmos o limite inferior das raízes positivas de $P_n(x) = 0$, basta substituirmos x por $\frac{1}{x}$ em $P_n(x) = 0$ e aplicarmos o Teorema de Lagrange à equação resultante. O inverso do limite obtido será, então, o limite inferior das raízes positivas de $P_n(x) = 0$.

Mais especificamente, seja a equação auxiliar $P_1(x) = x^n P(\frac{1}{x}) = 0$.

Tendo em vista que $P_1(x) = a_n(\frac{1}{x} - \xi_1)(\frac{1}{x} - \xi_2) \cdots (\frac{1}{x} - \xi_n) = 0$, tem-se que as raízes de $P_1(x) = 0$ são: $\frac{1}{\xi_1}, \frac{1}{\xi_2}, \cdots, \frac{1}{\xi_n}$.

Seja $\frac{1}{\xi^+}$ a maior das raízes positivas de $P_1(x) = 0$ e L_1 o limite superior das raízes positivas de $P_1(x) = 0$. Então $\frac{1}{\xi^+} \le L_1$. Isto é: $\xi^+ \ge \frac{1}{L_1}$.

Portanto, $\frac{1}{L_1}$ é o limite inferior das raízes positivas de $P_n(x) = 0$.

Exemplo 2: Determinar o limite inferior das raízes positivas de $P(x) = x^5 + 3x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12 = 0$.

Solução:
$P_1(x) = x^5 P\left(\frac{1}{x}\right) = x^5 \left[\left(\frac{1}{x}\right)^5 + 3\left(\frac{1}{x}\right)^4 - 9\left(\frac{1}{x}\right)^3 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 20\left(\frac{1}{x}\right) - 12\right] = 0$
$\therefore P_1(x) = 1 + 3x - 9x^2 - x^3 + 20x^4 - 12x^5 = 0$.
Como $a_n < 0$, devemos multiplicar a equação auxiliar por -1. Desta forma, obtemos:
$P_1(x) = 12x^5 - 20x^4 + x^3 + 9x^2 - 3x - 1 = 0$.
Nesta equação temos: $n = 5$, $a_n = 12$,
$B = \max\{|-20|, |-3|, |-1|\} = 20$,
$k = \max\{4, 1, 0\} = 4$.
Assim, $L_1 = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}} = 1 + \sqrt[5-4]{\frac{20}{12}} = 1 + \sqrt[1]{1.67} = 2.67$
Portanto, $\frac{1}{L_1} = \frac{1}{2.67} = 0.37$ é o LIRP de $P(x) = 0$, isto é, $\xi^+ \ge 0.37$.

Obs.: Dos exemplos 1 e 2 concluimos que $0.37 \le \xi^+ \le 4.46$

7.2.3 Limite Inferior das Raízes Negativas (LIRN)

Sejam $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ as raízes de $P(x) = 0$. Se tomarmos como equação auxiliar $P_2(x) = P(-x) = 0$, teremos como raízes de $P_2(x) = 0$: $-\xi_1, -\xi_2, \cdots, -\xi_n$.

Seja $-\xi^-$, $\xi^- < 0$, a maior das raízes positivas de $P_2(x) = 0$ e L_2 o limite superior das raízes positivas de $P_2(x) = 0$.

Então: $-\xi^- \le L_2 \Longrightarrow \xi^- \ge -L_2$, isto é, $-L_2$ é o limite inferior das raízes negativas de $P(x) = 0$.

Exemplo 3: Determinar o LIRN da equação algébrica $x^5 + 3x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12 = 0$.

Solução:
$P_2(x) = P(-x) = (-x)^5 + 3(-x)^4 - 9(-x)^3 - (-x)^2 + 20(-x) - 12 = 0$

$\therefore P_2(x) = -x^5 + 3x^4 + 9x^3 - x^2 - 20x - 12 = 0$

Para que possamos aplicar o Teorema de Lagrange devemos multiplicar a equação anterior por -1, uma vez que $a_n = a_5 = -1 < 0$. Desta forma:

$P_2(x) = x^5 - 3x^4 - 9x^3 + x^2 + 20x + 12 = 0$

Nesta equação temos: $n = 5$, $a_n = 1$,

$B = \max\{|-3|, |-9|\} = 9$,

$k = \max\{4, 3\} = 4$.

Assim, $L_2 = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}} = 1 + \sqrt[5-4]{\frac{9}{1}} = 1 + \sqrt[1]{9} = 10$

Portanto, $\xi^- \geq -10$.

7.2.4 Limite Superior das Raízes Negativas (LSRN)

De forma análoga aos casos anteriores, seja a equação auxiliar:

$$P_3(x) = x^n P\left(\frac{-1}{x}\right) = 0$$

Seja $-\frac{1}{\xi^-}$, $\xi^- < 0$, a maior das raízes positivas de $P_3(x) = 0$ e L_3 o limite superior das raízes positivas de $P_3(x) = 0$.

Logo: $-\frac{1}{\xi^-} \leq L_3 \overset{\xi^- < 0}{\Longrightarrow} -1 \geq \xi^- L_3 \overset{L_3 > 0}{\Longrightarrow} -\frac{1}{L_3} \geq \xi^- \Longrightarrow \xi^- \leq -\frac{1}{L_3}$.

Isto é, $-\frac{1}{L_3}$ é o limite superior das raízes negativas de $P(x) = 0$.

Exemplo 4: Determinar o LSRN da equação algébrica $x^5 + 3x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12 = 0$.

Solução:
$P_3(x) = x^5 P\left(-\frac{1}{x}\right) = x^5 \left[\left(-\frac{1}{x}\right)^5 + 3\left(-\frac{1}{x}\right)^4 - 9\left(-\frac{1}{x}\right)^3 - \left(-\frac{1}{x}\right)^2 + 20\left(-\frac{1}{x}\right) - 12\right] = 0$

$\therefore P_3(x) = -1 + 3x + 9x^2 - x^3 - 20x^4 - 12x^5 = 0$.

Como $a_n < 0$, devemos multiplicar a equação auxiliar por -1. Desta forma, resulta que:

$P_3(x) = 12x^5 + 20x^4 + x^3 - 9x^2 - 3x + 1 = 0$.

Nesta equação temos: $n = 5$, $a_n = 12$, $B = 9$, $k = 2$.

Assim, $L_3 = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}} = 1 + \sqrt[5-2]{\frac{9}{12}} = 1 + \sqrt[3]{0.75} = 1.91$

Portanto, $-\frac{1}{L_3} = -\frac{1}{1.93} = -0.52$ é o LSRN de $P(x) = 0$.

Obs.: Dos exemplos 3 e 4, concluímos que $-10 \leq \xi^- \leq -0.52$.

7.3 O Número de Raízes Reais

7.3.1 Regra de Sinais de Descartes

O número de raízes positivas de uma equação algébrica, denotado por n^+ ou é igual ao número de variações de sinal na sequência dos coeficientes ou é menor que esse número por um inteiro par.

Exemplo 5: Em $P(x) = +x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0$ há 2 variações de sinal na sequência dos coeficientes. Portanto, há 2 raízes positivas ou nenhuma ($n^+ = 2$ ou 0).

Para determinarmos o número de raízes negativas de $P(x) = 0$, denotado por n^-, basta trocarmos x por $-x$ e calcularmos o número de raízes positivas de $P(-x) = 0$, o qual será o número de raízes negativas de $P(x) = 0$.

Para o exemplo anterior, em $P(-x) = (-x)^3 - 4(-x)^2 - (-x) + 6 = -x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ há uma troca de sinal. Logo, $n^- = 1$.

Exemplo 6: $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$

Solução:

$n^+ = 2 \text{ ou } 0$
$P(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^3 - 7(-x)^2 + 8(-x) + 12 = 0$
$\therefore P(-x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$
$n^- = 2 \text{ ou } 0$

Exemplo 7: $P(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 8x + 15 = 0$

Solução:

$n^+ = 4 \text{ ou } 2 \text{ ou } 0$
$P(-x) = (-x)^4 - 8(-x)^3 + 16(-x)^2 - 8(-x) + 15 = 0$
$\therefore P(-x) = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x + 15 = 0$
$n^- = 0$

Exemplo 8: $P(x) = x^2 + 4x + 4 = 0$

Solução:

$n^+ = 0$
$P(-x) = (-x)^2 + 4(-x) + 4 = 0$
$\therefore P(-x) = x^2 - 4x + 4 = 0$
$n^- = 2 \text{ ou } 0$

7.3.2 Regra de Sinais de Sturm

Sequência de Sturm Chama-se sequência de Sturm de uma equação algébrica $P(x) = 0$ à sucessão: $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \cdots, p_n(x)$
onde $p_0(x) = P(x)$, $p_1(x) = P'(x)$ e $p_k(x)$, $k \geq 2$ é o resto da divisão, com sinal trocado, de $P_{k-2}(x)$ por $P_{k-1}(x)$.

Teorema de Sturm Se $P(a) \neq 0$ e $P(b) \neq 0$ então o número de raízes reais distintas de $P(x) = 0$ no intervalo $a \leq x \leq b$ é exatamente $|N(a) - N(b)|$, onde $N(a)$ (respectivamente $N(b)$) representa o número de variações de sinal na sequência de Sturm no ponto $x = a$ (respectivamente $x = b$).

Exemplo 9: Calcular o número de raizes reais distintas no intervalo $[0, 3]$ da equação $P(x) = x^3 + x^2 - x + 1 = 0$, sabendo-se que a sucessão de Sturm de $P(x) = 0$ é:

(a) $p_0(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

(b) $p_1(x) = 3x^2 + 2x - 1$

(c) $p_2(x) = \frac{8}{9}x - \frac{10}{9}$

(d) $p_3(x) = -\frac{99}{16}$

Solução:

$$\begin{array}{ll}
p_0(0) = +1 > 0 & p_0(3) = +34 > 0 \\
p_1(0) = -1 < 0 & p_1(3) = +32 > 0 \\
p_2(0) = -\frac{10}{9} < 0 & p_2(3) = +14/9 > 0 \\
p_3(0) = -\frac{99}{16} < 0 & p_3(3) = -99/16 < 0
\end{array}$$

No ponto $x = a = 0$ houve uma variação de sinal (de $p_0(0)$ para $p_1(0)$). Assim $N(0) = 1$.

Por outro lado, no ponto $x = b = 3$ também houve uma variação de sinal (de $p_2(3)$ para $p_3(3)$). Assim $N(3) = 1$.

Do exposto, concluímos que a equação $x^3+x^2-x+1 = 0$ não possui raízes no intervalo $[0, 3]$ pois $N(0) - N(3) = 1 - 1 = 0$.

Exemplo 10: Dada a equação $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$, pede-se:

(a) Determinar os limites das raízes reais

(b) Construir a sequência de Sturm

(c) Determinar o número de raízes reais

(d) Isolar as raízes

Solução:

(a.1) Determinação do LSRP

(a.2) Determinação do LIRP

(a.3) Determinação do LIRN

(a.4) Determinação do LSRN