

BCC204 - Teoria dos Grafos

Marco Antonio M. Carvalho

(baseado nas notas de aula do prof. Haroldo Gambini Santos)

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

25 de setembro de 2019



Site da disciplina:

- ▶ <http://www.decom.ufop.br/marco/>

Lista de e-mails:

- ▶ bcc204@googlegroups.com

Para solicitar acesso:

- ▶ <http://groups.google.com/group/bcc204>

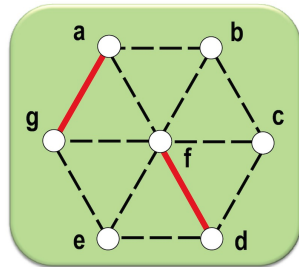
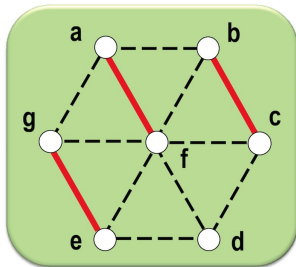
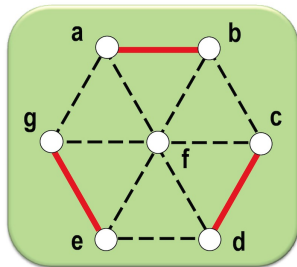
Conteúdo

- 1 Introdução
- 2 Casamento em Grafos Bipartidos
- 3 O Problema de Atribuição Linear
- 4 O Método Húngaro

Casamento em Grafos

Descrição

Dado um grafo, um **casamento** (também conhecido como emparelhamento ou *matching*) é um **conjunto independente de arestas**, ou seja, um conjunto de arestas sem vértices em comum.



Exemplos de casamentos em grafos.

Subconjunto Maximal

Um subconjunto G_s de um conjunto G é dito maximal em relação a uma propriedade τ se não for um subconjunto de nenhum outro subconjunto de G que também possua a propriedade τ .

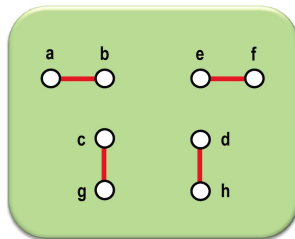
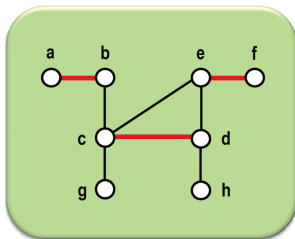
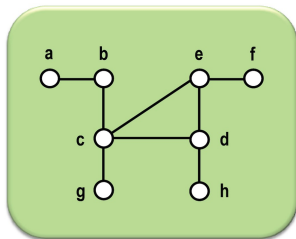
Maximal deve ser distinto de *máximo*: maximal é referente à uma condição de pertinência, máximo é referente à cardinalidade.

Casamento em Grafos

Casamento Maximal e Casamento Máximo

Um casamento é considerado **maximal** caso a adição de alguma aresta descaracterize o casamento.

Um casamento é considerado **máximo** caso possua o maior número de arestas possível, ou seja, caso seja o maior casamento possível no grafo.



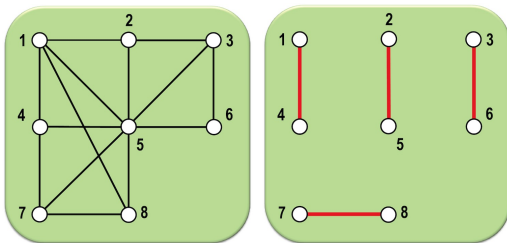
Exemplo de grafo, casamento maximal e casamento máximo.

Casamento em Grafos

Casamento Perfeito

Diz-se que um vértice que faz parte do casamento é um vértice **saturado**. Caso contrário, o vértice é **não saturado**.

Um **casamento perfeito** (ou completo) ocorre quando **todos** os vértices são saturados.

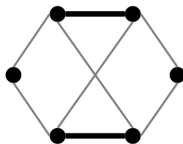


Exemplo de grafo e casamentos perfeito.

Cadeia M -*augmentante*

Definição

Considere um grafo $G = (V, A)$ e um casamento M . Uma **cadeia M -*augmentante*** é um caminho entre dois vértices não saturados por M que alternam arestas de M e arestas de $A \setminus M$.



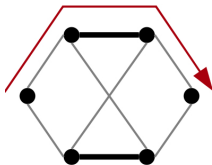
Melhoramento

Sempre que encontrarmos uma cadeia M -*augmentante* poderemos aumentar o casamento – de fato, o modo acima é o **único** modo de melhorar um casamento.

Cadeia *M*-aumentante

Definição

Considere um grafo $G = (V, A)$ e um casamento M . Uma **cadeia *M*-aumentante** é um caminho entre dois vértices não saturados por M que alternam arestas de M e arestas de $A \setminus M$.



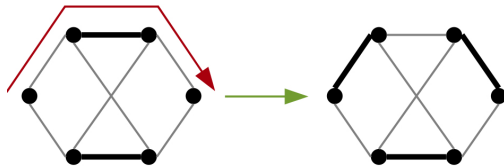
Melhoramento

Sempre que encontrarmos uma cadeia *M*-aumentante poderemos aumentar o casamento – de fato, o modo acima é o **único** modo de melhorar um casamento.

Cadeia *M*-aumentante

Definição

Considere um grafo $G = (V, A)$ e um casamento M . Uma **cadeia *M*-aumentante** é um caminho entre dois vértices não saturados por M que alternam arestas de M e arestas de $A \setminus M$.

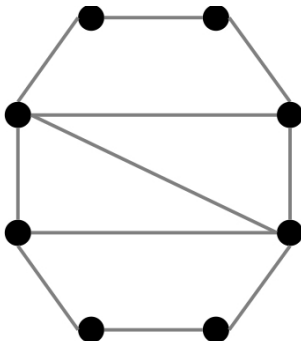


Melhoramento

Sempre que encontrarmos uma cadeia *M*-aumentante poderemos aumentar o casamento – de fato, o modo acima é o **único** modo de melhorar um casamento.

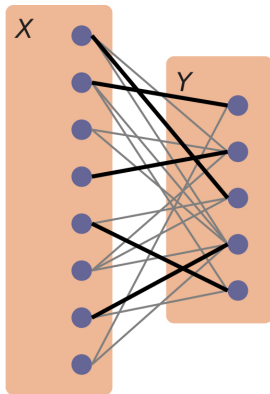
Exercício

1 Considerando o grafo abaixo, crie:



- 1 Um casamento maximal;
- 2 Dois casamentos máximos e perfeitos.

Casamento em Grafos Bipartidos



Definição

Seja G um grafo bipartido com uma partição (X, Y) dos vértices.

Dizemos que temos um casamento de X em Y quando o casamento satura Y (não necessariamente X).

O Problema de Atribuição Linear

Definição

Consiste em determinar a maneira **ótima** de se atribuir n tarefas à n agentes de modo que nenhuma tarefa deixe de ser executada e que todos os agentes tenham uma tarefa atribuída a eles.

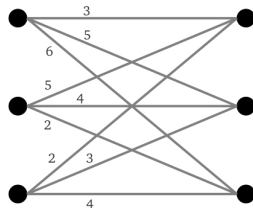
Em outras palavras, consistem em atribuir o “melhor agente” à “melhor tarefa”.

O Problema de Atribuição Linear

Exemplo:

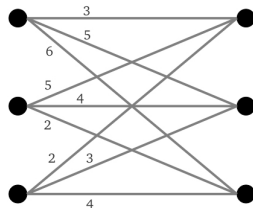
Em uma fábrica temos 3 operários e 3 máquinas. Pelo conhecimento e pelas características de cada operário o custo por hora é diferente, segundo a atribuição das máquinas a cada operário. Qual a atribuição de menor custo?

Operário\Máquina	1	2	3
1	3	5	6
2	5	4	2
3	2	3	4



Exemplo

Operário \ Máquina	1	2	3
1	3	5	6
2	5	4	2
3	2	3	4



Ao atribuir uma máquina para cada operário estamos tomando 3 elementos da matriz tal que:

- ▶ Cada elemento está em uma linha diferente;
- ▶ Cada elemento está em uma coluna diferente;
- ▶ Cada linha e coluna contém exatamente 1 elemento.

Uma solução¹: $x_{1,1}, x_{2,2}, x_{3,3}$, com custo 11. Solução ótima?

¹ $x_{i,j}$ indica a seleção do elemento da linha i e coluna j .

Definição

- ▶ Origem em 1935, por H. W. Kuhn, porém, inventado em 1931, pelos húngaros E. Egerváry e D. König;
- ▶ Resolve o problema de atribuição linear em tempo polinomial, normalmente, $O(n^3)$;
- ▶ Utiliza transformações na matriz de custo.

Teorema 1

Se um número real é somado ou subtraído de todas as entradas de uma linha ou coluna, então uma alocação ótima para a matriz resultante é também uma alocação ótima para a matriz original.

Ao diminuir os valores nas linhas e colunas, estamos comparando-as com valores relativos.

$$\left| \begin{array}{ccc} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{array} \right| -3 \quad \rightarrow \quad \left| \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{array} \right| \quad \rightarrow \quad \left| \begin{array}{ccc} 0^* & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2^* \\ 2 & 3^* & 4 \end{array} \right|$$

Sumário

- Passo 1** Identifique o valor mínimo de cada linha e o subtraia de cada elemento da linha;
- Passo 2** Identifique o valor mínimo de cada coluna e o subtraia de cada elemento da coluna;
- Passo 3a** Identifique o número mínimo de riscos que cubra todos os zeros da matriz;
- Passo 3b** Sem solução viável (número de riscos $< n$)? Identifique o o valor mínimo dos elementos não riscados e o **subtraia** desses mesmos elementos; para elementos cobertos por dois riscos, **adicione** esse valor;
- Passo 3c** Sem solução viável novamente? Então volte para o passo 3a; Caso contrário, a solução é viável, vá para o passo 4;
- Passo 4** Identifique a solução ótima na solução viável encontrada.

O Método Húngaro

Exemplo 1:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & -3 \\ 5 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -2 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & \\ 3 & 2 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 0^* & 1 & 3 & \\ 3 & 1 & 0^* & \\ 0 & 0^* & 2 & \end{array} \right|$$

-1

A solução ótima fica evidente.

O Método Húngaro

Exemplo 1:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & -3 \\ 5 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -2 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & \\ 3 & 2 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 0^* & 1 & 3 & \\ 3 & 1 & 0^* & \\ 0 & 0^* & 2 & \end{array} \right|$$

-1

A solução ótima fica evidente.

O Método Húngaro

Exemplo 1:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & -3 \\ 5 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -2 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & \\ 3 & 2 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 0^* & 1 & 3 & \\ 3 & 1 & 0^* & \\ 0 & 0^* & 2 & \end{array} \right|$$

-1

A solução ótima fica evidente.

O Método Húngaro

Exemplo 2:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 7 & -2 \\ 3 & 6 & 10 & -3 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 5 & \\ 0 & 3 & 7 & \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 3 & \\ 0 & 3 & 5 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \right|$$

Solução inviável, mais zeros necessários. Continuando...

0	4	3
0	3	5
0	0	0

Teorema de König

Se o número mínimo de traços que atravessam todos os zeros for exatamente n , temos uma alocação possível para cada linha ou coluna.

Interpretação

Se tivermos n traços, então haverá pelo menos n elementos zero distribuídos conforme necessário, e consequentemente, uma atribuição ótima.

Caso contrário, existirão linhas ou colunas que não possuirão elementos zero, impedindo que haja uma atribuição ótima.

0	4	3
0	3	5
0	0	0

Teorema de König

Se o número mínimo de traços que atravessam todos os zeros for exatamente n , temos uma alocação possível para cada linha ou coluna.

Interpretação

Se tivermos n traços, então haverá pelo menos n elementos zero distribuídos conforme necessário, e consequentemente, uma atribuição ótima.

Caso contrário, existirão linhas ou colunas que não possuirão elementos zero, impedindo que haja uma atribuição ótima.

Viabilização

0	4	3
0	3	5
0	0	0

Operação de Viabilização

Identificamos o valor do menor elemento **não riscado** e o subtraímos em todos os elementos não riscados.

Para elementos riscados duas vezes, adicionamos esse mesmo valor.

Viabilização (exemplo)

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} -3$$

$$\begin{vmatrix} 0 * & 1 & 0 \\ 0 & 0 * & 2 \\ 3 & 0 & 0 * \end{vmatrix}$$

Matriz Original:

$$\begin{vmatrix} 2* & 6 & 7 \\ 3 & 6* & 10 \\ 2 & 2 & 4* \end{vmatrix}$$

Solução com custo 12.

Viabilização (exemplo)

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} -3$$

$$\begin{vmatrix} 0 * & 1 & 0 \\ 0 & 0 * & 2 \\ 3 & 0 & 0 * \end{vmatrix}$$

Matriz Original:

$$\begin{vmatrix} 2* & 6 & 7 \\ 3 & 6* & 10 \\ 2 & 2 & 4* \end{vmatrix}$$

Solução com custo 12.

Viabilização (exemplo)

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} -3$$

$$\begin{vmatrix} 0* & 1 & 0 \\ 0 & 0* & 2 \\ 3 & 0 & 0* \end{vmatrix}$$

Matriz Original:

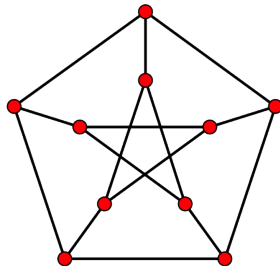
$$\begin{vmatrix} 2* & 6 & 7 \\ 3 & 6* & 10 \\ 2 & 2 & 4* \end{vmatrix}$$

Solução com custo 12.

Ajustes

- ▶ O método húngaro só resolve problemas de minimização em matrizes quadradas.
- ▶ Porém, o algoritmo pode ser adaptado para problemas de maximização, bastando multiplicar a matriz de custos por -1 .
- ▶ Além disto, matrizes não quadradas podem se tornar quadradas pela inclusão de linhas/colunas zeradas.

Exercício



Sobre o grafo de Petersen (P), acima representado, responda:

- 1 Encontre um casamento maximal de P com 3 arestas.
- 2 Use cadeias aumentantes para encontrar um casamento maximal de P com 4 arestas.
- 3 Encontre um casamento máximo de P .

Exercício

Execute o algoritmo Húngaro e determine a atribuição linear ótima para a matriz abaixo.

90	75	75	80
35	85	55	65
125	95	90	105
45	110	95	115

Dúvidas?

