

BCC204 - Teoria dos Grafos

Marco Antonio M. Carvalho

(baseado nas notas de aula do prof. Haroldo Gambini Santos)

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

4 de setembro de 2019



Verifiquem a visualização de algoritmos!

- ▶ <https://visualgo.net/>

Site da disciplina:

- ▶ <http://www.decom.ufop.br/marco/>

Lista de e-mails:

- ▶ pcc173@googlegroups.com

Para solicitar acesso:

- ▶ <http://groups.google.com/group/pcc173>

1 Algoritmo de Floyd-Warshall

Algoritmo de *Floyd-Warshall*

Histórico

O algoritmo proposto por *Robert Floyd* em 1962 é baseado no algoritmo de *Stephen Warshall* do mesmo ano para cálculo de fechos transitivos em grafos.

Referências

Warshall, Stephen (January 1962). "A theorem on Boolean matrices". *Journal of the ACM* 9 (1): 11–12. doi:10.1145/321105.321107.

Floyd, Robert W. (June 1962). "Algorithm 97: Shortest Path". *Communications of the ACM* 5 (6): 345. doi:10.1145/367766.368168.

Algoritmo de *Floyd-Warshall*

Princípio

O algoritmo de *Floyd-Warshall* calcula os caminhos mais curtos entre **todos os pares de vértices** de um grafo direcionado e ponderado que eventualmente possua arcos com peso negativo, mas que não possua **ciclos de custo negativo**.

Trata-se novamente de um algoritmo de programação dinâmica *bottom-up*. Também de maneira similar, o conceito de relaxação do comprimento dos caminhos mais curtos é empregado: incrementalmente, aprimora-se uma estimativa utilizada, até que o valor ótimo seja atingido.

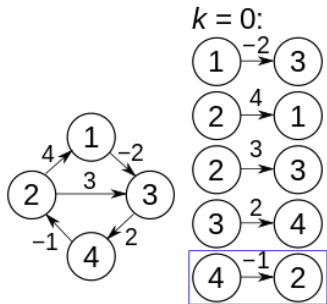
Princípio

O algoritmo compara os caminhos entre os vértices i e j passando por k vértices intermediários, $k = 1, \dots, n$.

Em outras palavras, todos os caminhos entre cada par de vértices são analisados.

Uma matriz armazena o valor dos caminhos mais curtos entre os vértices, porém, não há informação sobre composição do caminho.

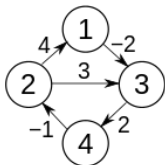
Exemplo Compacto



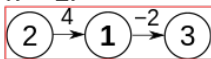
$k=0$

Na iteração $k=0$, somente os caminhos representados por uma única adjacência no grafo são conhecidos.

Exemplo Compacto



$k = 1$:

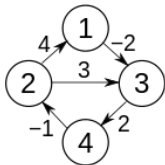


$k=1$

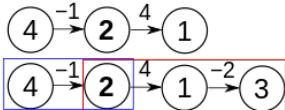
Na iteração $k=1$, todos os caminhos que passam pelo vértice 1 são descobertos.

Em particular, o caminho $[2,1,3]$ substitui o caminho $[2,3]$.

Exemplo Compacto



$k = 2$:

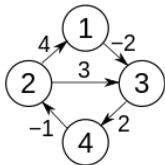


$k=2$

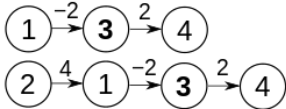
Na iteração $k=2$, todos os caminhos que passam pelo vértice 2 ou pelos vértices 2 e 1 são descobertos.

Em particular, o caminho $[4, 2, 3]$ não é considerado, dado que $[4, 2, 1, 3]$ é um caminho mais curto até então.

Exemplo Compacto



$k = 3$:

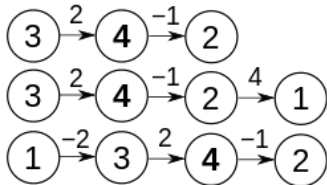


$k=3$

Na iteração $k=3$, todos os caminhos que passam pelo vértice 3 ou pelos vértices 3 e 2 ou 1 são descobertos.

Exemplo Compacto

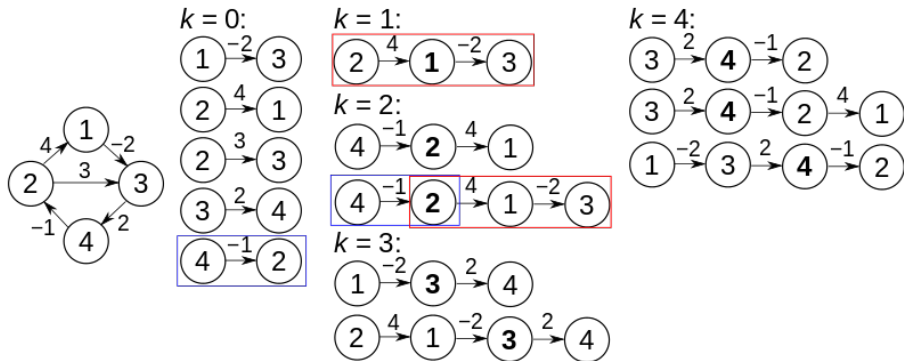
$k = 4$:



$k=4$

Finalmente, em $k=4$, todos os caminhos mais curtos são determinados.

Exemplo Compacto



Algoritmo de *Floyd-Warshall*

Terminologia

- ▶ L : Matriz que armazena os caminhos mais curtos entre os vértices;
 - ▶ Inicialmente, L é inicializada com os pesos dos arcos do grafo (d_{ij});
 - ▶ Caso não haja arco entre dois vértices i e j , $d_{ij} = \infty$.
- ▶ l_{ij} : elemento da matriz L na linha i e coluna j .

Referência

A versão do algoritmo com três laços aninhados é devida a *Peter Ingerman*.

Ingerman, Peter Z. (November 1962). "Algorithm 141: Path Matrix".
Communications of the ACM 5 (11): 556. doi:10.1145/368996.369016

Algoritmo de *Floyd-Warshall*

Entrada: Grafo $G = (V, E)$ e matriz de pesos $D = \{d_{ij}\}$ para os arcos $\{i, j\}$

```
1  $L \leftarrow D$ ; // Inicializa os elementos da matriz  $L$ 
2 para  $k \leftarrow 1$  até  $n$  faça
3   para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
4     para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
5       se  $l_{ij} > l_{ik} + l_{kj}$  então
6          $l_{ij} \leftarrow l_{ik} + l_{kj}$ ;
7       fim
8     fim
9   fim
10 fim
```

Ciclos de Custo Negativo

O algoritmo de *Floyd-Warshall* detecta ciclos de custo negativo.

Caso haja valores negativos na diagonal principal da matriz L (inclusive durante a execução do algoritmo), significa que o vértice relacionado está contido em um ciclo de custo negativo.

Em outras palavras, é possível sair do vértice, percorrer parte do grafo e retornar ao vértice inicial com custo negativo.

Algumas versões do algoritmo consideram que não haverá ciclos de custo negativo e definem inicialmente a distância de um vértice para si próprio como $-\infty$, implicando em não haver atualização possível.

Complexidade

Os três laços aninhados são executados n vezes, logo, a complexidade final é $O(n^3)$, ou mais precisamente, $\Theta(n^3)$.

Embora a complexidade seja alta, é importante notar que todas as arestas são verificadas, e um grafo pode ter mais do que n^2 arestas, tornando-o uma boa opção para grafos densos.

Para grafos esparsos, executar uma boa implementação do algoritmo de *Dijkstra* para cada um dos n vértices é uma melhor opção, com complexidade $O(nm \lg n)$.

Caso haja arestas de peso negativo, o algoritmo de *Johnson* pode ser utilizado.

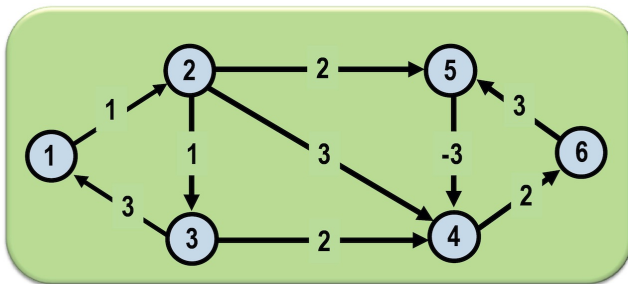
Composição dos Caminhos

Conforme visto, não são armazenadas informações sobre quais vértices compõem os caminhos mais curtos calculados, no entanto, o algoritmo pode ser modificado.

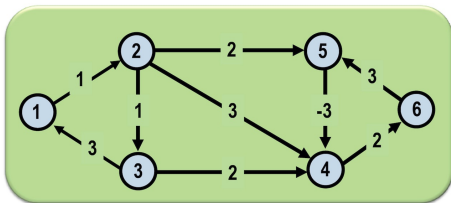
Não é necessário, entretanto, armazenar de fato todos os vértices dos caminhos mais curtos, implicando na necessidade de uma matriz tridimensional.

Árvores de Caminhos Mais Curtos podem ser utilizadas para este fim.

Exemplo Passo a Passo



Exemplo Passo a Passo



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	1	3	2	∞
3	3	∞	0	2	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Matriz L inicial.

Exemplo Passo a Passo

► $j=1, l_{11} = \min\{l_{11}; (l_{11}+l_{11})\}=0$

► $j=2, l_{12} = \min\{l_{12}; (l_{11}+l_{12})\}=1$

► $j=3, l_{13} = \min\{l_{13}; (l_{11}+l_{13})\}=\infty$

► $j=4, l_{14} = \min\{l_{14}; (l_{11}+l_{14})\}=\infty$

► $j=5, l_{15} = \min\{l_{15}; (l_{11}+l_{15})\}=\infty$

► $j=6, l_{16} = \min\{l_{16}; (l_{11}+l_{16})\}=\infty$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	1	3	2	∞
3	3	∞	0	2	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração $k = 1, i=1$.

A matriz não é alterada.

Exemplo Passo a Passo

► $j=1, l_{21} = \min\{l_{21}; (l_{21}+l_{11})\}=\infty$

► $j=2, l_{22} = \min\{l_{22}; (l_{21}+l_{12})\}=0$

► $j=3, l_{23} = \min\{l_{23}; (l_{21}+l_{13})\}=1$

► $j=4, l_{24} = \min\{l_{24}; (l_{21}+l_{14})\}=3$

► $j=5, l_{25} = \min\{l_{25}; (l_{21}+l_{15})\}=2$

► $j=6, l_{26} = \min\{l_{26}; (l_{21}+l_{16})\}=\infty$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	1	3	2	∞
3	3	∞	0	2	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração $k = 1, i=2$.

A matriz não é alterada novamente.

Exemplo Passo a Passo

► $j=1, l_{31} = \min\{l_{31}; (l_{31}+l_{11})\}=3$

► $j=2, l_{32} = \min\{l_{32}; (l_{31}+l_{12})\}=4$

► $j=3, l_{33} = \min\{l_{33}; (l_{31}+l_{13})\}=0$

► $j=4, l_{34} = \min\{l_{34}; (l_{31}+l_{14})\}=2$

► $j=5, l_{35} = \min\{l_{35}; (l_{31}+l_{15})\}=\infty$

► $j=6, l_{36} = \min\{l_{36}; (l_{31}+l_{16})\}=\infty$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	1	3	2	∞
3	3	∞	0	2	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração $k = 1, i=3$.
A matriz é alterada!

Exemplo Passo a Passo

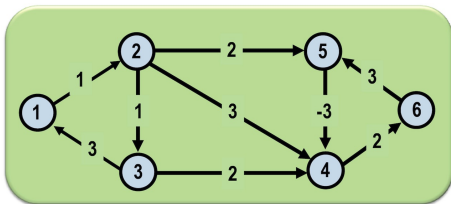
Fast Forward...

Não há outras alterações para $k=1$ e $i=4, 5, 6$.

Nos *slides* a seguir só serão exibidas as iterações do algoritmo em que ocorrem alterações na matriz L .

Atenção: este exemplo possui erros de digitação no livro do Goldbarg!

Exemplo Passo a Passo



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	1	3	2	∞
3	3	4	0	2	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Matriz L para $k = 1$.

Exemplo Passo a Passo

► $j=1, l_{11} = \min\{l_{11}; (l_{12}+l_{21})\}=0$

► $j=2, l_{12} = \min\{l_{12}; (l_{12}+l_{22})\}=1$

► $j=3, l_{13} = \min\{l_{13}; (l_{12}+l_{23})\}=2$

► $j=4, l_{14} = \min\{l_{14}; (l_{12}+l_{24})\}=4$

► $j=5, l_{15} = \min\{l_{15}; (l_{12}+l_{25})\}=3$

► $j=6, l_{16} = \min\{l_{16}; (l_{12}+l_{26})\}=\infty$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	1	3	2	∞
3	3	4	0	2	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração $k = 2, i=1$.

Exemplo Passo a Passo

► $j=1, l_{31} = \min\{l_{31}; (l_{32}+l_{21})\}=3$

► $j=2, l_{32} = \min\{l_{32}; (l_{32}+l_{22})\}=4$

► $j=3, l_{33} = \min\{l_{33}; (l_{32}+l_{23})\}=0$

► $j=4, l_{34} = \min\{l_{34}; (l_{32}+l_{24})\}=2$

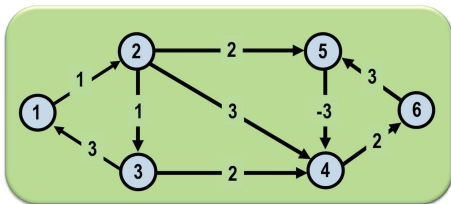
► $j=5, l_{35} = \min\{l_{35}; (l_{32}+l_{25})\}=6$

► $j=6, l_{36} = \min\{l_{36}; (l_{32}+l_{26})\}=\infty$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	4	3	∞
2	∞	0	1	3	2	∞
3	3	4	0	2	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração $k = 2, i=3$.

Exemplo Passo a Passo



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	4	3	∞
2	∞	0	1	3	2	∞
3	3	4	0	2	6	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Matriz L para $k = 2$.

Exemplo Passo a Passo

► $j=1, l_{11} = \min\{l_{11}; (l_{13}+l_{31})\}=0$

► $j=2, l_{12} = \min\{l_{12}; (l_{13}+l_{32})\}=1$

► $j=3, l_{13} = \min\{l_{13}; (l_{13}+l_{33})\}=2$

► $j=4, l_{14} = \min\{l_{14}; (l_{13}+l_{34})\}=4$

► $j=5, l_{15} = \min\{l_{15}; (l_{13}+l_{35})\}=3$

► $j=6, l_{16} = \min\{l_{16}; (l_{13}+l_{36})\}=\infty$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	4	3	∞
2	∞	0	1	3	2	∞
3	3	4	0	2	6	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração $k = 3, i=1$.

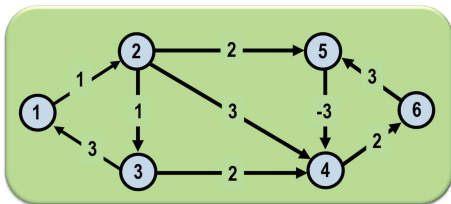
Exemplo Passo a Passo

- ▶ $j=1, l_{21} = \min\{l_{21}; (l_{23}+l_{31})\}=4$
- ▶ $j=2, l_{22} = \min\{l_{22}; (l_{23}+l_{32})\}=0$
- ▶ $j=3, l_{23} = \min\{l_{23}; (l_{23}+l_{33})\}=1$
- ▶ $j=4, l_{24} = \min\{l_{24}; (l_{23}+l_{34})\}=3$
- ▶ $j=5, l_{25} = \min\{l_{25}; (l_{23}+l_{35})\}=2$
- ▶ $j=6, l_{26} = \min\{l_{26}; (l_{23}+l_{36})\}=\infty$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	4	3	∞
2	∞	0	1	3	2	∞
3	3	4	0	2	6	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração $k = 3, i=2$.

Exemplo Passo a Passo



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	4	3	∞
2	4	0	1	3	2	∞
3	3	4	0	2	6	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Matriz L para $k = 3$.

Exemplo Passo a Passo

► $j=1, l_{11} = \min\{l_{11}; (l_{14}+l_{41})\}=0$

► $j=2, l_{12} = \min\{l_{12}; (l_{14}+l_{42})\}=1$

► $j=3, l_{13} = \min\{l_{13}; (l_{14}+l_{43})\}=2$

► $j=4, l_{14} = \min\{l_{14}; (l_{14}+l_{44})\}=4$

► $j=5, l_{15} = \min\{l_{15}; (l_{14}+l_{45})\}=3$

► $j=6, l_{16} = \min\{l_{16}; (l_{14}+l_{46})\}=\mathbf{6}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	4	3	∞
2	4	0	1	3	2	∞
3	3	4	0	2	6	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração $k = 4, i=1$.

Exemplo Passo a Passo

► $j=1, l_{21} = \min\{l_{21}; (l_{24}+l_{41})\}=4$

► $j=2, l_{22} = \min\{l_{22}; (l_{24}+l_{42})\}=0$

► $j=3, l_{23} = \min\{l_{23}; (l_{24}+l_{43})\}=1$

► $j=4, l_{24} = \min\{l_{24}; (l_{24}+l_{44})\}=3$

► $j=5, l_{25} = \min\{l_{25}; (l_{24}+l_{45})\}=2$

► $j=6, l_{26} = \min\{l_{26}; (l_{24}+l_{46})\}=5$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	4	3	6
2	4	0	1	3	2	∞
3	3	4	0	2	6	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração $k = 4, i=2$.

Exemplo Passo a Passo

► $j=1, l_{31} = \min\{l_{31}; (l_{34}+l_{41})\}=3$

► $j=2, l_{32} = \min\{l_{32}; (l_{34}+l_{42})\}=4$

► $j=3, l_{33} = \min\{l_{33}; (l_{34}+l_{43})\}=0$

► $j=4, l_{34} = \min\{l_{34}; (l_{34}+l_{44})\}=2$

► $j=5, l_{35} = \min\{l_{35}; (l_{34}+l_{45})\}=6$

► $j=6, l_{36} = \min\{l_{36}; (l_{34}+l_{46})\}=4$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	4	3	6
2	4	0	1	3	2	5
3	3	4	0	2	6	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração $k = 4, i=3$.

Exemplo Passo a Passo

► $j=1, l_{51} = \min\{l_{51}; (l_{54}+l_{41})\}=\infty$

► $j=2, l_{52} = \min\{l_{52}; (l_{54}+l_{42})\}=\infty$

► $j=3, l_{53} = \min\{l_{53}; (l_{54}+l_{43})\}=\infty$

► $j=4, l_{54} = \min\{l_{54}; (l_{54}+l_{44})\}=-3$

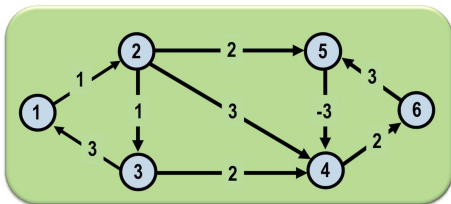
► $j=5, l_{55} = \min\{l_{55}; (l_{54}+l_{45})\}=0$

► $j=6, l_{56} = \min\{l_{56}; (l_{54}+l_{46})\}=-1$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	4	3	6
2	4	0	1	3	2	5
3	3	4	0	2	6	4
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração $k = 4, i=5$.

Exemplo Passo a Passo



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	4	3	6
2	4	0	1	3	2	5
3	3	4	0	2	6	4
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Matriz L para $k = 4$.

Exemplo Passo a Passo

► $j=1, l_{11} = \min\{l_{11}; (l_{15}+l_{51})\}=0$

► $j=2, l_{12} = \min\{l_{12}; (l_{15}+l_{52})\}=1$

► $j=3, l_{13} = \min\{l_{13}; (l_{15}+l_{53})\}=2$

► $j=4, l_{14} = \min\{l_{14}; (l_{15}+l_{54})\}=0$

► $j=5, l_{15} = \min\{l_{15}; (l_{15}+l_{55})\}=3$

► $j=6, l_{16} = \min\{l_{16}; (l_{15}+l_{56})\}=2$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	4	3	6
2	4	0	1	3	2	5
3	3	4	0	2	6	4
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração $k = 5, i=1$.

Exemplo Passo a Passo

► $j=1, l_{21} = \min\{l_{21}; (l_{25}+l_{51})\}=4$

► $j=2, l_{22} = \min\{l_{22}; (l_{25}+l_{52})\}=0$

► $j=3, l_{23} = \min\{l_{23}; (l_{25}+l_{53})\}=1$

► $j=4, l_{24} = \min\{l_{24}; (l_{25}+l_{54})\}=-1$

► $j=5, l_{25} = \min\{l_{25}; (l_{25}+l_{55})\}=2$

► $j=6, l_{26} = \min\{l_{26}; (l_{25}+l_{56})\}=1$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	0	3	2
2	4	0	1	3	2	5
3	3	4	0	2	6	4
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração $k = 5, i=2$.

Exemplo Passo a Passo

► $j=1, l_{61} = \min\{l_{61}; (l_{65}+l_{51})\}=\infty$

► $j=2, l_{62} = \min\{l_{62}; (l_{65}+l_{52})\}=\infty$

► $j=3, l_{63} = \min\{l_{63}; (l_{65}+l_{53})\}=\infty$

► $j=4, l_{64} = \min\{l_{64}; (l_{65}+l_{54})\}=0$

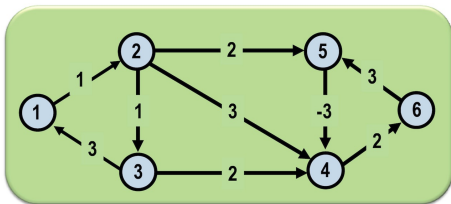
► $j=5, l_{65} = \min\{l_{65}; (l_{65}+l_{55})\}=3$

► $j=6, l_{66} = \min\{l_{66}; (l_{65}+l_{56})\}=0$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	0	3	2
2	4	0	1	3	2	5
3	3	4	0	2	6	4
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração $k = 5, i=6$.

Exemplo Passo a Passo



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	0	3	2
2	4	0	1	-1	2	1
3	3	4	0	2	6	4
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	-1
6	∞	∞	∞	0	3	0

Matriz L para $k = 5$.

Exemplo Passo a Passo

► $j=1, l_{41} = \min\{l_{41}; (l_{46}+l_{61})\}=\infty$

► $j=2, l_{42} = \min\{l_{42}; (l_{46}+l_{62})\}=\infty$

► $j=3, l_{43} = \min\{l_{43}; (l_{46}+l_{63})\}=\infty$

► $j=4, l_{44} = \min\{l_{44}; (l_{46}+l_{64})\}=0$

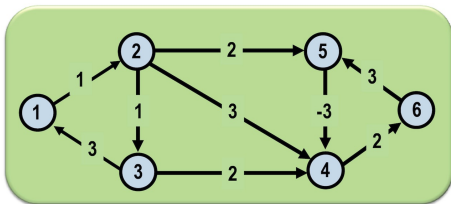
► $j=5, l_{45} = \min\{l_{45}; (l_{46}+l_{65})\}=\mathbf{5}$

► $j=6, l_{46} = \min\{l_{46}; (l_{46}+\mathbf{l_{66}})\}=2$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	0	3	2
2	4	0	1	-1	2	1
3	3	4	0	2	6	4
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	-1
6	∞	∞	∞	0	3	0

Iteração $k = 6, i=4$.

Exemplo Passo a Passo



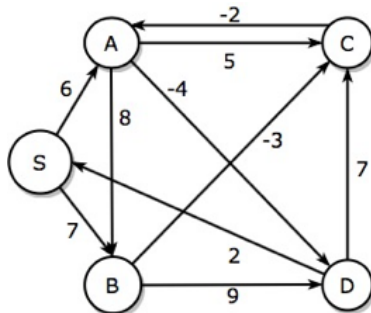
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	0	3	2
2	4	0	1	-1	2	1
3	3	4	0	2	6	4
4	∞	∞	∞	0	5	2
5	∞	∞	∞	-3	0	-1
6	∞	∞	∞	0	3	0

Matriz L para $k = 6$.

Applet para execução do algoritmo de *Floyd-Warshall*:

<https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/Floyd.html>

Exercício



Execute o algoritmo de Floyd-Warshall para o grafo acima.

Dúvidas?

