Lista de Exercícios 10

1. Considere a seguinte afirmação, obviamente falsa: "Se a e b são dois números reais iguais, então $a = 0$."Identifique qual é o erro na suposta prova desta afirmação, apresentada a seguir.

$$\begin{array}{lrcl} 1) & a & = & b \\ 2) & a^2 & = & ab \\ 3) & a^2 - b^2 & = & ab - b^2 \\ 4) & (a-b)(a+b) & = & (a-b)b \\ 5) & a+b & = & b \\ 6) & a & = & 0 \end{array}$$

R: O erro está na passagem da linha 4) para a linha 5), pois se $a = b$, então $(a - b) = 0$. Portanto, $(a-b)(a+b) = (a-b)b$ não implica que $a + b = b$.

2. É um fato verdadeiro que a média aritmética de quaisquer dois números reais a e b não negativos é maior que sua média geométrica, isto é:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Mas existe alguma coisa errada com a prova deste fato apresentada a seguir. O que está errado e como a prova pode ser corrigida?

$$\begin{array}{rcll} \frac{a+b}{2} & \stackrel{?}{\geq} & \sqrt{ab} & \text{então} \\ a+b & \stackrel{?}{\geq} & 2\sqrt{ab} & \text{então} \\ a^2+2ab+b^2 & \stackrel{?}{\geq} & 4ab & \text{então} \\ a^2-2ab+b^2 & \stackrel{?}{\geq} & 0 & \text{então} \\ (a-b)^2 & \geq & 0 & \text{o que sabemos que é verdadeiro} \end{array}$$

A última afirmação é verdadeira porque $(a - b)$ é um número real e o quadrado de um número real é um número não negativo. Isso prova então nossa afirmação original.

R: A prova acima é uma prova da implicação $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \rightarrow true$, o que não garante que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ é verdadeiro. A prova correta seria a seguinte. Sabemos que $(a - b)^2 \geq 0$, para quaisquer números reais a e b. Então

$$\begin{array}{rcll} a^2-2ab+b^2 & \geq & 0 & \text{somando } 4ab \text{ em ambos os lados obtemos} \\ a^2+2ab+b^2 & \geq & 4ab & \text{como } a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2\text{, temos} \\ (a+b)^2 & \geq & 4ab & \text{extraindo a raiz quadrada dividindo por 2 ambos os lados, obtemos} \\ \frac{a+b}{2} & \geq & \sqrt{ab} & \end{array}$$

3. Prove que $\sqrt{2}$ é irracional.

   Prova: Suponha, por contradição, que $\sqrt{2}$ é racional, isto é, existem $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ tais que que $\sqrt{2} = a/b$. Podemos supor que a fração a/b é completamente reduzida (a e b Não possuem fatores comuns); em particular, a e b não são ambos pares. Elevando ao quadrado ambos os lados da equação acima, obtemos $2 = \frac{a^2}{bb^2}$ e, portanto, $a^2 = 2b^2$, ou seja, a^2 é par, e, portanto, como já provamos anteriormente, isso implica que a é par. Seja $a = 2k$. Então $2b^2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ e, portanto, $b^2 = 2k^2$, ou seja, b^2 é par, o que implica que b é par. Mas isso é um absurdo, pois contradiz a hipótese de que a e b não são ambos pares. Portanto, concluímos que $\sqrt{2}$ é irracional.

4. Prove que $(1 + 3\sqrt{2})$ é irracional.

   Prova: Suponha, por contradição, que $(1 + 3\sqrt{2})$ é racional, isto é existem inteiros a e $b \neq 0$ tais que que
   $$1 + 3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$
   Daí obtemos que
   $$\sqrt{2} = \frac{\frac{a}{b} - 1}{3} = \frac{a - b}{3b}$$
   Então, $\sqrt{2} = c/d$ onde c é o inteiro $(a - b)$ e d é o inteiro não nulo $3b$, e, portanto, $\sqrt{2}$ é racional. Mas isso é absurdo, pois contradiz o que já provamos anteriormente, que $\sqrt{2}$ é racional. Portanto $(1 + 3\sqrt{2})$ é irracional.

5. Prove que se $a, b \in \mathbb{Z}$, então $a^2 - 4b - 2 \neq 0$.

   Prova: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e suponha, por contradição, que $a^2 - 4b - 2 = 0$. Então $a^2 = 4b + 2 = 2(2b + 1)$, ou seja, a^2 é par, o que implica que a é par, ou seja, $a = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Então temos: $(2k)^2 = 4b + 2$, o que implica que $4k = 4b + 2$, ou seja, $b = k - 1/2$, isto é, b não é inteiro. Mas isso contradiz a hipótese que de a e b são inteiros. Portanto, se $a, b \in \mathbb{Z}$, então $a^2 - 4b - 2 \neq 0$.

6. Prove que existem infinitos números primos (A prova dessa afirmação foi provada pelo matemático greco Euclides, no século IV A.C.)

   Prova: Suponha, por contradição, que o conjunto dos números primos é finito. Então podemos listar todos os números primos como $p_1, P_2, p_3, \ldots, p_n$, onde p_n é o maior número primo. Considere o número $a = (p_1 p_2 p_3 \ldots p_n) + 1$, isto é, a é o produto de todos os números primos mais 1. Então, como todo número natural, a possui um menor divisor primo, e isso significa que $p_k | a$ para algum p_k no nosso conjunto de n números primos. Então, existe um número c tal que $a = cp_k$, ou seja:
   $$(p_1 p_2 p_3 \ldots p_n) + 1 = cp_k$$
   Dividindo ambos os lados da equação acima por p_k, obtemos
   $$(p_1 p_2 p_3 \ldots p_{k-1} p_{k+1} \ldots p_n) + \frac{1}{p_k} = c$$
   Então
   $$\frac{1}{p_k} = c - (p_1 p_2 p_3 \ldots p_{k-1} p_{k+1} \ldots p_n)$$

A expressão do lado direito dessa equação é um inteiro, mas a expressão do lado esquerdo não é um inteiro, o que é um absurdo. Portanto, o conjunto dos números primos não pode ser finito.

7. Suponha $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que se $a^2 + b^2 = c^2$, então a ou b é par.

   Prova: Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e suponha $a^2 + b^2 = c^2$. Suponha, por contradição, que a e b são ambos impares, isto é, $a = 2n + 1$ e $b = 2m + 1$, para alguns inteiros n e m. Então temos que $a^2 + b^2 = (2n + 1)^2 + (2m + 1)^2 = 4(n^2 + n + m^2 + m) + 2$, e, portanto, o resto da divisão de $(a^2 + b^2)$ por 4 é 2. Por outro lado, vemos que $(a^2 + b^2)$ é par e, portanto, c^2 é par e, consequentemente c é par, ou seja, $c = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Mas então $c^2 = (2k)^2 = 4k^2$ e, portanto, c^2 é divisível por 4. Mas então não podemos ter $a^2 + b^2 = c^2$, contradizendo nossa hipótese. Portanto, concluimos que $a^2 + b^2 = c^2$, então a ou b é par.

8. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Prove que se a é racional e ab é irracional, então b é irracional.

   Prova: Suponha $a \in \mathbb{Q}$ e $ab \notin \mathbb{Q}$. Suponha, por contradição, que $b \in \mathbb{Q}$. Mas então ab seria racional, proque o produto de dois números racionais é um número racional. Mas isso contradiz a hipótese de que ab é irracional. Portanto, concluímos que se a é racional e ab é irracional, então b é irracional.

9. Prove que se a e b são números reais positivos, então $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

   Prova: Sejam a e b reais positivos e suponha, por contradição, que $a + b \leq 2\sqrt{ab}$. Elevando ao quadrado ambos os lados da inequação, obtemos $(a + b)^2 \leq 4ab$, ou seja $a^2 + 2ab + b^2 \leq 4ab$, isto é $a^2 - 2ab + b^2 \leq 0$. Mas isso é uma contradição, pois $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ e sabemos que o quadrado que qualqer número real é maior ou igual a zero. Portanto, concluimos que se a e b são números reais positivos, então $a + b \geq 2ab$.

10. Prove que todo número racional diferente de zero pode ser expresso como o produto de 2 números irracionais.

    Prova: Seja $r \neq 0$ racional, ou seja, $r = \frac{a}{b}$, onde $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Mas r pode também ser expresso como

    $$r = \sqrt{2}\,\frac{r}{\sqrt{2}}$$

    Sabemos que $\sqrt{2}$ é racional. Portanto, para concluir a prova basta mostrar que $r/\sqrt{2}$ também é irracional. Para mostrar isso, suponha, por contradição, que $r/\sqrt{2}$ é racional, ou seja, existem inteiros $c \neq 0$ e $d \neq 0$ tais que

    $$\frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{c}{d}$$

    Então

    $$\sqrt{2} = r\frac{d}{c} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$$

    Isso significa que $\sqrt{2}$ é racional, o que é um absurdo. Portanto, $r/\sqrt{2}$ é irracional. Portanto, $\sqrt{2} \cdot (r/\sqrt{2})$ é um produto de dois números irracionais.