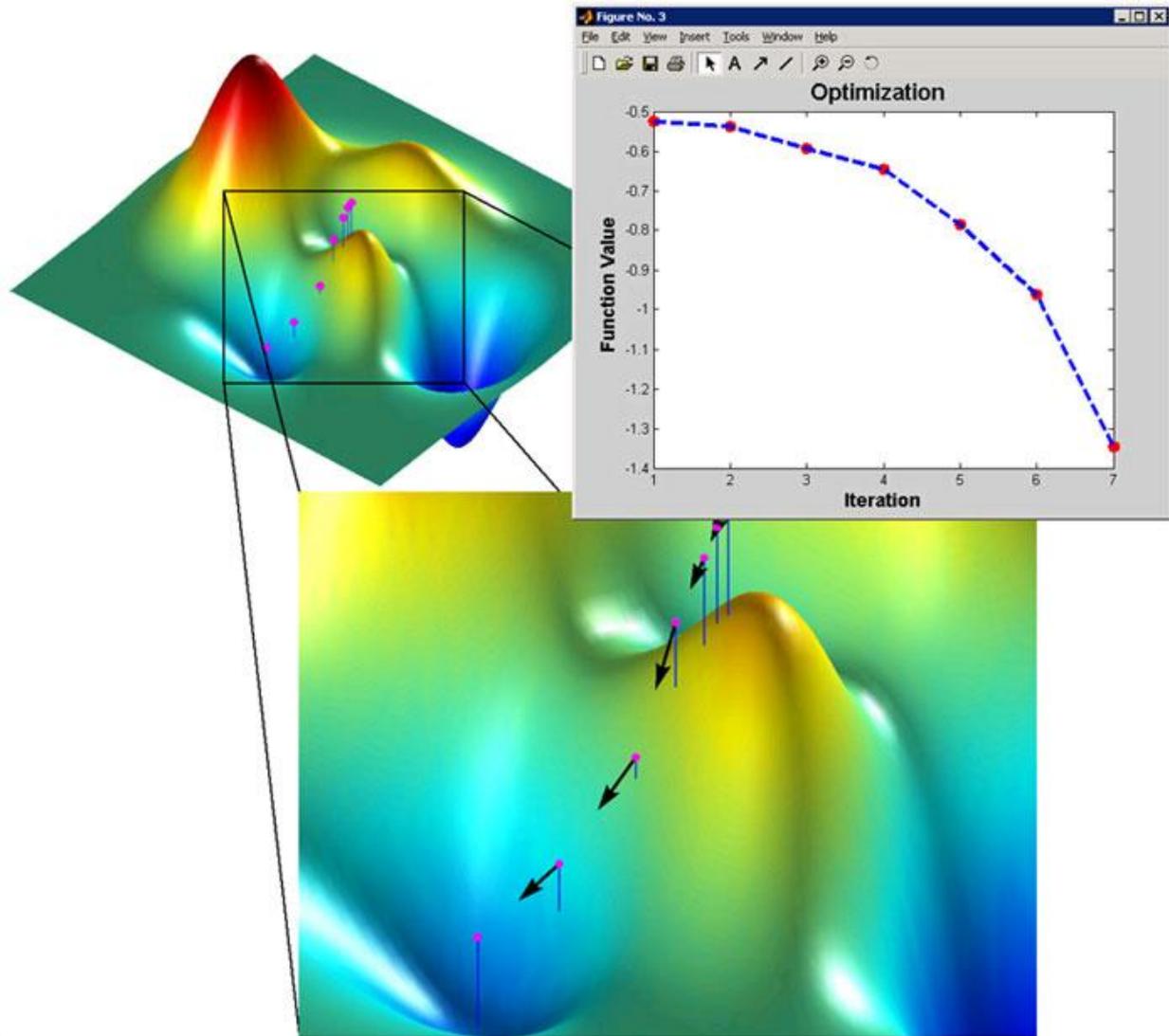


Conceitos Básicos

Frederico Gadelha Guimarães
frederico.g.guimaraes@gmail.com



Otimização



Otimização

- ▶ Otimização é uma área de pesquisa que utiliza métodos computacionais para procurar pela melhor forma de projetar e operar um dado sistema, representada pela “melhor” combinação de valores das variáveis do problema, considerando seus objetivos, suas restrições de projeto e/ou de operação;
- ▶ Categorias: variáveis reais X variáveis discretas



Otimização

- ▶ O problema de otimização:

$$\min f(x), x \in \mathcal{F}$$

$$f(\cdot): \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$$

$$\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^{n_f}$$

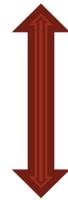
$$\mathcal{X} = \{x = \{(x_1, v_1), \dots, (x_n, v_n)\} : v_i \in \mathcal{D}_i\}$$

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathcal{X} : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, n_g; h_j(x) = 0, j = 1, \dots, n_h\}$$

Otimização

- ▶ O problema de otimização:

$$\min f(x), x \in \mathcal{F}$$



$$\text{find } x \in \mathcal{F}: f(x) \leq f(y), \forall y \in \mathcal{F}$$

Otimização

- ▶ O problema de otimização:
- ▶ *Otimização linear ou programação linear;*
- ▶ *Otimização ou programação não linear;*
- ▶ *Otimização linear inteira;*
- ▶ *Otimização combinatória;*
- ▶ *Otimização multiobjetivo;*



Otimização

- ▶ O problema de otimização:
- ▶ *Otimização ou programação não linear: processo de busca pela melhor solução em problemas com variáveis contínuas e funções não lineares;*
- ▶ *Otimização combinatória: processo de busca pela melhor solução em problemas com variáveis que assumem valores discretos;*



Otimização

- ▶ Métodos exatos: garantem que a solução ótima é encontrada, desde que certas premissas sobre o problema sejam respeitadas. Em problemas NP-difíceis, não existe algoritmo que garanta que a solução ótima seja encontrada em tempo polinomial;
- ▶ Técnicas heurísticas e metaheurísticas: uma forma prática de tratar problemas NP-difíceis. Não garantem que a “melhor” solução é encontrada, mas que uma solução “boa” é encontrada em tempo polinomial

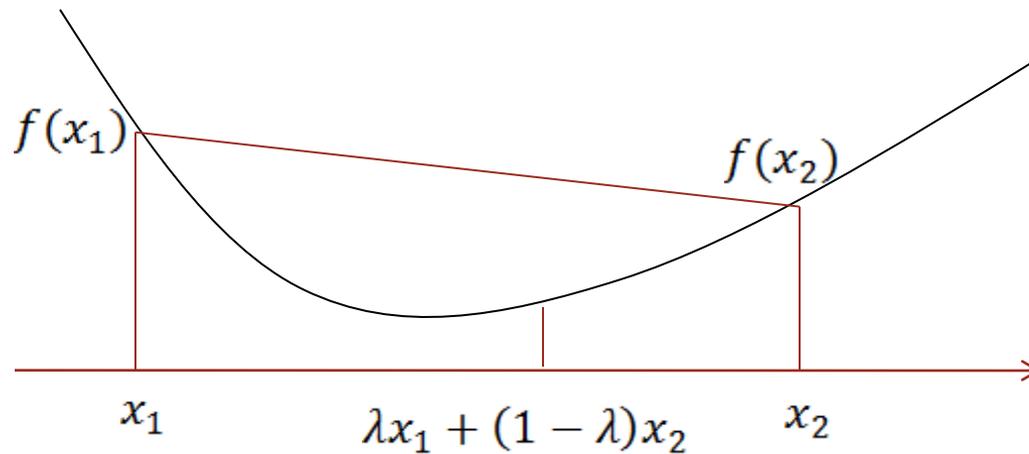


Otimização

- ▶ **Caracterização de funções:**

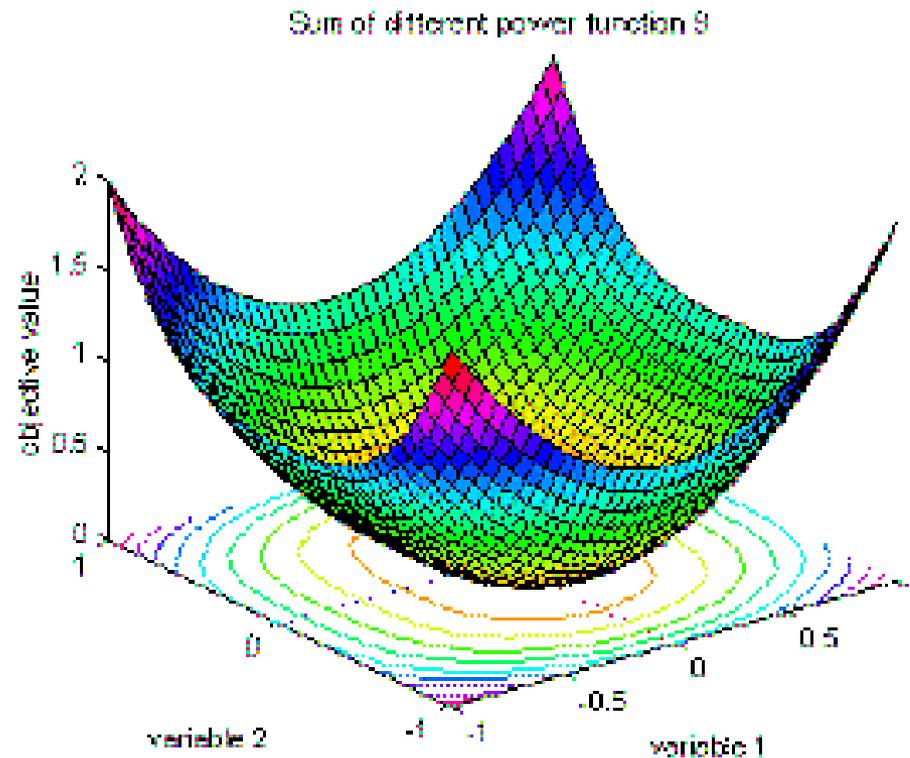
- ▶ Função convexa:

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$



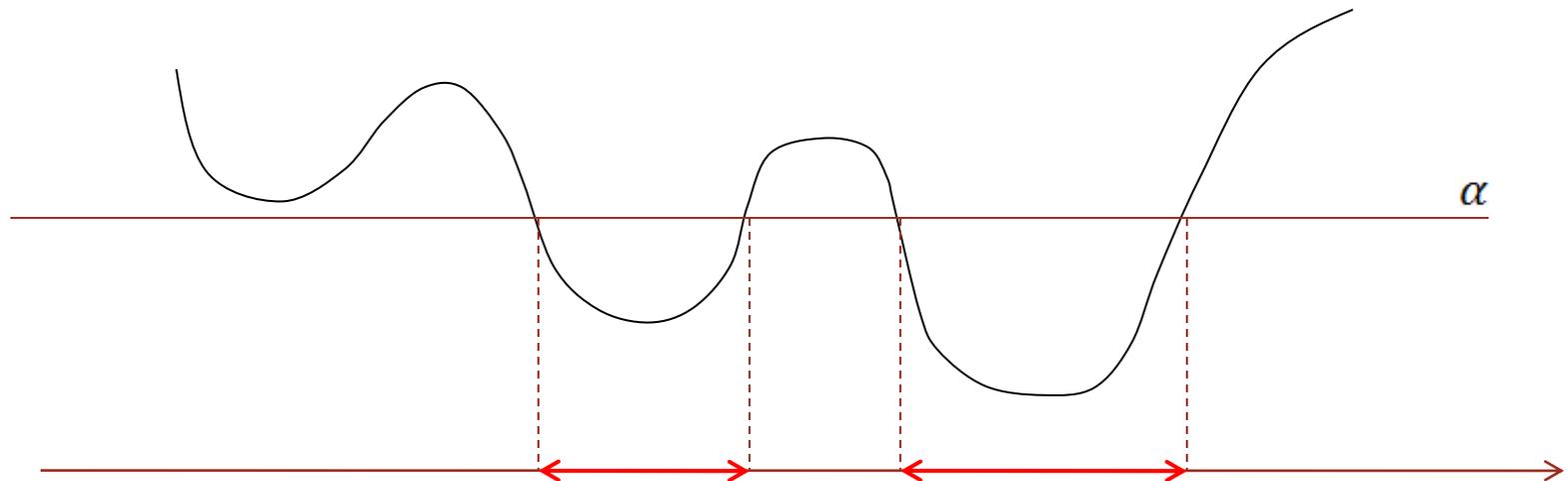
Otimização

- ▶ **Caracterização de funções:**
- ▶ Função convexa:



Otimização

- ▶ **Caracterização de funções:**
- ▶ Região de sub-nível: $R(f, \alpha) = \{x \in \mathcal{X} : f(x) \leq \alpha\}$
- ▶ Função multimodal: uma função cuja região de sub-nível é desconexa para algum nível.



Otimização

- ▶ **Caracterização de soluções:**

- ▶ Mínimo local ou solução ótima local:

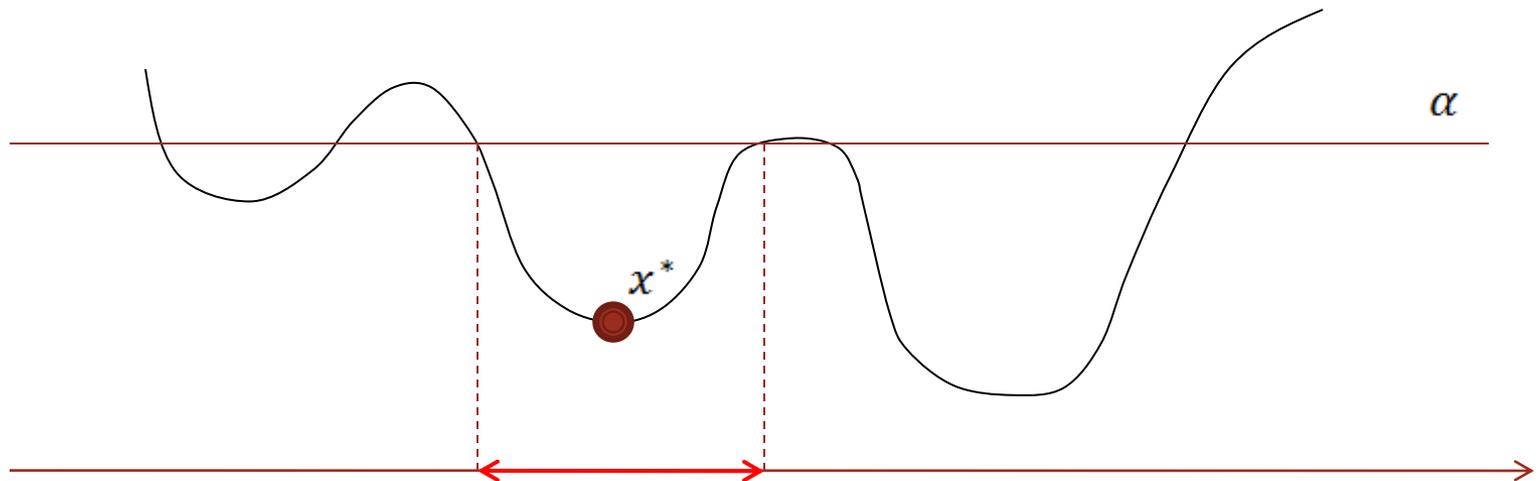
$$f(x^*) \leq f(z), \forall z \in N(x^*)$$

- ▶ Mínimo global ou solução ótima global:

$$f(x^*) \leq f(z), \forall z \in \mathcal{X}$$

Otimização

- ▶ **Caracterização de soluções:**
- ▶ **Bacia de atração:** a maior região de sub-nível conexa que contém o ótimo local:



Otimização

- ▶ Métodos exatos ou determinísticos de busca:

escolher x^0

$$d^k = g(\nabla f)$$

$$x^{k+1} = x^k + \eta^k d^k$$

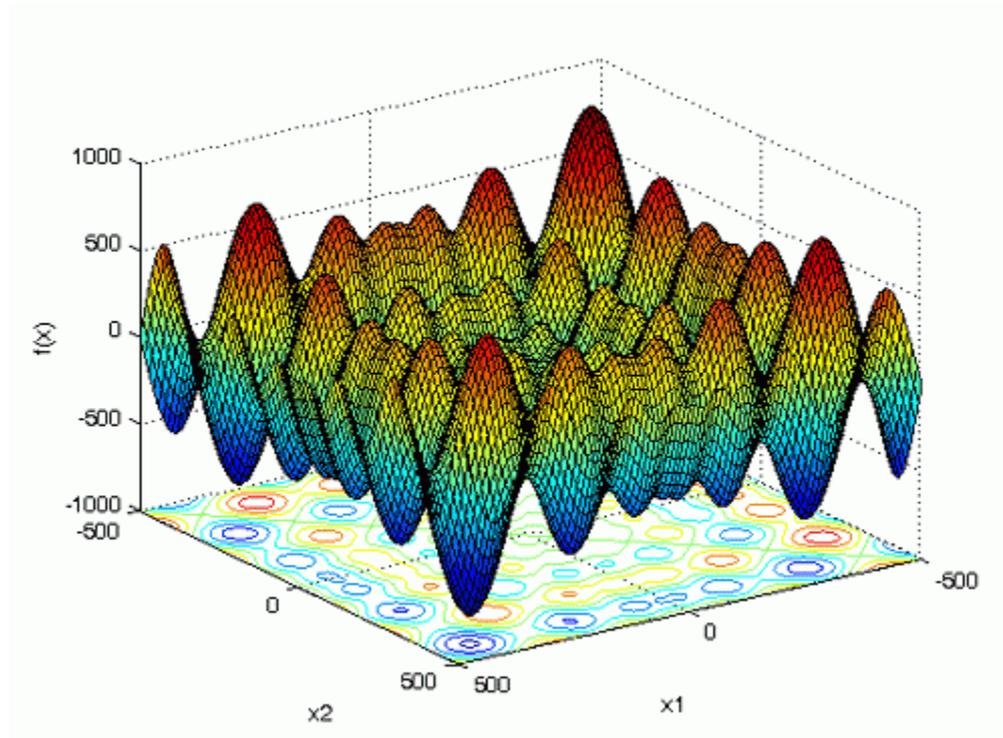
Otimização

- ▶ Algumas premissas devem ser garantidas: convexidade, diferenciabilidade, continuidade;
- ▶ Requer o cálculo de derivadas – nem sempre possível;
- ▶ Um método de busca local converge para o mínimo local da bacia de atração na qual foi inicializado;
- ▶ Em funções multimodais, há somente garantia de que uma solução ótima local é obtida;



Otimização

- ▶ Problemas multimodais:



Otimização

- ▶ Problemas de otimização combinatória:
- ▶ Problema da mochila: sabendo o peso e o benefício de cada item em um conjunto de N itens, escolher os que trarão maior benefício sem violar a capacidade da mochila.
- ▶ $N = 50$, há 10^{15} configurações possíveis;



$$\max \sum_{i=1}^N b_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^N w_i x_i \leq C$$

$$x_i \in \{0,1\}$$

Otimização

- ▶ Problemas de otimização combinatória:
- ▶ Problema do caixeiro viajante: dado um conjunto de N cidades, encontrar a rota de custo mínimo que passe uma única vez em cada cidade;



Otimização

- ▶ **Métodos de busca local:**
- ▶ Para definir um método de busca local, deve-se definir uma estrutura de vizinhança;
- ▶ As soluções vizinhas de x são aquelas que podem ser obtidas a partir de uma modificação elementar em x ;
- ▶ Exemplo: problema da mochila.



Otimização

- ▶ **Métodos de busca local:**
- ▶ Dada uma solução inicial, uma estrutura de vizinhança, e uma função avaliadora:

$x \leftarrow x^0;$

while $\exists s \in N(x) \mid f(s) < f(x)$ *do*

$x \leftarrow s;$

Otimização

- ▶ Métodos de busca local convergem para mínimos locais, dependendo da estrutura de vizinhança utilizada e do ponto inicial;
- ▶ A complexidade da busca local pode ser exponencial em alguns problemas;
- ▶ Em problemas NP-difíceis, heurísticas são geralmente utilizadas para produzir boas soluções, sem garantias formais de otimalidade;



Otimização

- ▶ Em ciência da computação, metaheurísticas são métodos heurísticos que combinam procedimentos – geralmente outras heurísticas – para resolver problemas computacionais, isto é, heurísticas de alto nível;
- ▶ Algoritmos evolutivos são uma classe de metaheurísticas;

