Programação Linear Inteira
O Algoritmo Simplex

Haroldo Gambini Santos

Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP

30 de agosto de 2011

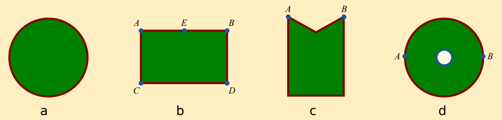
Notas

Definições Preliminares

Conjunto Convexo

Um conjunto de pontos S é um **Conjunto Convexo** se o segmento de linha juntando qualquer par de pontos em S é completamente contido em S.

Convexo ou Não ?



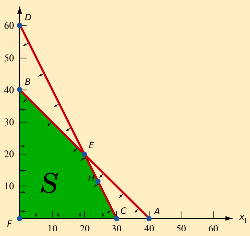
Notas

Definições Preliminares

Ponto Extremo

Em um conjunto convexo S um ponto P é um **Ponto Extremo** se cada segmento de linha que fica completamente em S e contém P tem P como final da linha.

Um Poliedro - Quais são PEs ?



Notas

Forma Padrão

- Dizemos que um PL (Programa Linear) está na **forma padrão** se:
  - todas as restrições são de igualdade
  - todas as variáveis são não negativas (≥ 0)
- A conversão de um PL qualquer para a forma padrão é feita com os seguintes passos:
  - para restrições de $\leq$ e $\geq$ transformamos em igualdade através da introdução de variáveis de folga
    - significado: *falta* ou *excesso* na igualdade
  - variáveis que podem ser negativas são substituídas por duas variáveis, representando a *parte positiva* e *negativa* da mesma

Notas

Exemplo

$$
\begin{gathered}
3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\
\Downarrow \\
3x_1 + 2x_2 - s_1 = 6 \\
\vdots \\
50x_1 + 35x_3 \leq 80 \\
\Downarrow \\
50x_1 + 35x_3 + s_3 = 80
\end{gathered}
$$

Notas

Forma Padrão

Exercício

Coloque na forma padrão:

$$
\begin{array}{lrrl}
min: & & & \\
& 3x_1 + x_2 & & \\
s.a.: & & & \\
& x_1 & & \geq 3 \\
& x_1 & + x_2 & \leq 4 \\
& 2x_1 & - x_2 & = 3 \\
& & x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

Notas

Forma Padrão

max(ou min) :

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$s.a.$

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_{11} & a_{12}x_{12} & \ldots & a_{1n}x_{1n} & = b_1 \\ a_{21}x_{21} & a_{22}x_{22} & \ldots & a_{2n}x_{2n} & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_{m1} & a_{m2}x_{m2} & \ldots & a_{mn}x_{mn} & = b_m \end{array}$$

$$x_i \geq 0 \;\; \forall i \in 1, \ldots, n$$

Notas

Forma Padrão

Considere:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Então o sistema de equações de qualquer PL pode ser escrito como:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Notas

Variáveis Básicas

Definição

Em um sistema de equações com n variáveis e m restrições definimos como **solução básica** uma solução onde temos:

- m variáveis para as quais o sistema é resolvido, essas são chamadas **Variáveis Básicas**, as quais denotaremos por VB
- $m - n$ o restante das variáveis permanece fixada em zero - as **Variáveis Não-Básicas** - VNB

Exemplo

$$\begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & & = & 3 \\ & -x_2 & +x_3 & = & -1 \end{array}$$

Verifique as soluções para $VB = \{x_1, x_2\}$ e $VB = \{x_2, x_3\}$

Notas

Variáveis Básicas

Todo conjunto de VB permite a obtenção de uma solução básica ?

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +4x_2 & +x_3 & = & 3 \end{array}$$

Tente $BV = \{x_1, x_2\}$

Notas

Pontos Extremos e Soluções Básicas Factíveis

Definição

Qualquer solução básica onde todas as variáveis são não negativas é uma ***Solução Básica Factível* - SBF**.

Teorema

Um ponto na região factível de um PL é um **Ponto Extremo** se e somente se é uma **Solução Básica Factível** para o PL.

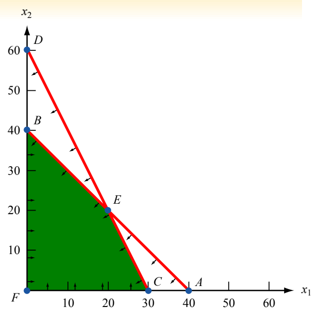
Notas

Pontos Extremos

$$\begin{array}{rrrcl} max: & 4x_1 & +3x_2 & & \\ s.a.: & x_1 & +x_2 & \leq & 40 \\ & 2x_1 & +x_2 & \leq & 60 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

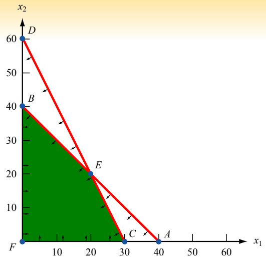
$$\begin{array}{rrrrrcl} max: & 4x_1 & +3x_2 & & & & \\ s.a.: & x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 40 \\ & 2x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 60 \\ & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & & \geq & 0 \end{array}$$



Ex.: $VB = \{x_1, x_3\}$ corresponde a qual ponto ? Qual o valor de x_3, x_2 e x_4 na SBF desse ponto ?

Notas

Pontos Extremos



$$
\begin{array}{rrrrcl}
x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 40 \\
2x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 60 \\
 & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

BV	SBF	Ponto Extremo
x_1, x_2	$x_3 = x_4 = 0, x_1 = x_2 = 20$	E
x_1, x_3	$x_2 = x_4 = 0, x_1 = 30, x_3 = 10$	C
x_1, x_4	$x_2 = x_3 = 0, x_1 = 40, x_3 = -20$	$-$
x_2, x_3	$x_1 = x_4 = 0, x_3 = -20, x_2 = 60$	$-$
x_2, x_4	$x_1 = x_3 = 0, x_2 = 40, x_4 = 20$	B
x_3, x_4	$x_1 = x_2 = 0, x_3 = 40, x_4 = 60$	F

Notas

PLs Degenerados

Degeneração

Eventualmente, mais de um Conjunto de Variáveis Básicas pode corresponder a um mesmo Ponto Extremo. Nesse caso dizemos que o Programa Linear é Degenerado.

O impacto de soluções degeneradas na resolução dos PLs será discutido posteriormente.

Notas

Direção Ilimitada

Definição

Em um PL com região factível S e restrições $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$ dizemos que $\mathbf{d}$ é uma Direção Ilimitada se para qualquer solução $\mathbf{x} \in S$ e qualquer $c \geq 0$:

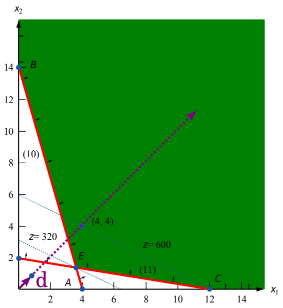
$$x + c\mathbf{d} \in S$$

Notas

Direção Ilimitada

$$
\begin{array}{lllll}
min: & 50x_1 & +100x_2 & & \\
s.a.: & 7x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 28 \\
 & 2x_1 & +12x_2 & -x_4 & = 24
\end{array}
$$

$$
\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}
$$



Notas

Pontos Extremos e Soluções Factíveis

Teorema

Considere um PL na forma padrão com Soluções Básicas Factíveis

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$$

Qualquer ponto $\mathbf{x}$ na região factível do PL pode ser escrito no formato:

$$\mathbf{x} = \mathbf{d} + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i b_i$$

sendo que $\mathbf{d} = 0$ ou é a direção ilimitada e $\sum_{i=1}^{k} \sigma_i = 1$.

Notas

Combinações Convexas de SBFs Exemplo PL Limitado

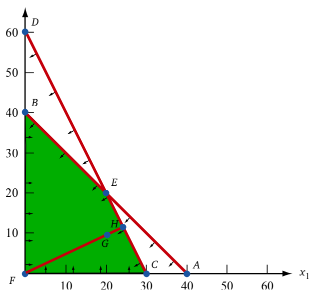
$$
\begin{array}{lllll}
max: & 4x_1 & +3x_2 & & \\
s.a.: & x_1 & +x_2 & \leq & 40 \\
 & 2x_1 & +x_2 & \leq & 60 \\
 & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Ponto H (24,12) não é SBF.

Pode ser escrito como a combinação convexa de E e C:
$H = 0{,}6\ E + 0{,}4\ C$

Ponto G também não é BFS.

Pode ser escrito como :
$$G = \frac{1}{6}F + \frac{5}{6}H$$
$$\Downarrow$$
$$G = \frac{1}{6}F + \frac{5}{6}(0,6E + 0,4C)$$



Notas

Combinações Convexas de SBFs
Exemplo PL Ilimitado

$$\begin{array}{rrrl} 7x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 28 \\ 2x_1 & +12x_2 & -x_4 & = 24 \end{array}$$

Descrevendo F em termos de SBFs.

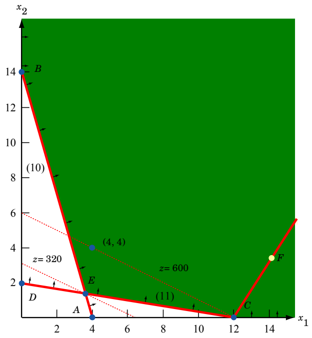
Direção Ilimitada:
Inclinação para ir de C a F: $\frac{4-0}{14-12}$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 22 \\ 52 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 56 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 78 \\ 52 \end{bmatrix}$$

Desse modo obtemos:

$$\mathbf{x} = \mathbf{d} + \mathbf{b_1}$$



Notas

O Algoritmo Simplex

Passo 1 Converta o PL para a **Forma Padrão**.

Passo 2 Obtenha uma **Solução Básica Factível** (se possível) da Forma Padrão.

Passo 3 **Teste de Otimalidade**: Determine se a Solução Básica é Ótima. Se Ótima PARE.

Passo 4 Caso não seja ótima - **Mudança de Base**: determine:
- qual variável não básica irá entrar na base, com o intuito de melhorar a função objetivo;
- qual variável básica irá sair da base.

Passo 5 Utilize as operações elementares para computar a **Nova Solução Básica** e volte para o Passo 3.

Notas

Exemplo - Móveis *Dakota*

A empresa *Dakota* fabrica Mesas, Armários e Cadeiras. A manufatura de cada um desses móveis utiliza madeira e dois tipos de trabalho: acabamento e carpintaria. A necessidade de cada recurso é dada abaixo:

Recurso	Mesa	Armário	Cadeira
Madeira (m^2)	8	6	1
Acabamento (horas)	4	2	1,5
Carpintaria (horas)	2	1,5	0,5

Tem-se disponível 48 m^2 de madeira, 20 horas de acabamento e 8 horas de carpintaria. As mesas são vendidas por \$ 60, armários por \$ 30 e cadeira por \$ 20. A empresa acredita que a demanda por mesas e cadeiras é ilimitada, enquanto que no máximo 5 armários serão vendidos.

Notas

Móveis Dakota

$$
\begin{array}{rrcrcrcl}
max\ z = & 60x_1 & + & 30x_2 & + & 20x_3 & & \\
s.t.: & 8x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & \leq & 48 \\
& 4x & + & 2x_2 & + & 1,5x_3 & \leq & 20 \\
& 2x_1 & + & 1,5x_2 & + & 0,5x_3 & \leq & 8 \\
& & & x_2 & & & \leq & 5
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Notas

Forma Padrão

Linha										
0	z	$-60x_1$	$-30x_2$	$-20x_3$					=	0
1		$8x_1$	$+6x_2$	$+1x_3$	$+x_4$				=	48
2		$4x_1$	$+2x_2$	$+1,5x_3$		$+x_5$			=	20
3		$2x_1$	$+1,5x_2$	$+0,5x_3$			$+x_6$		=	8
4			x_2					$+x_7$	=	5

Notas

Primeira Solução Básica Factível

Linha											Variáveis Básicas
0	z	$-60x_1$	$-30x_2$	$-20x_3$					=	0	z=0
1		$8x_1$	$+6x_2$	$+1x_3$	$+x_4$				=	48	x_4=48
2		$4x_1$	$+2x_2$	$+1,5x_3$		$+x_5$			=	20	x_5=20
3		$2x_1$	$+1,5x_2$	$+0,5x_3$			$+x_6$		=	8	x_6=8
4			x_2					$+x_7$	=	5	x_7=5

VNB $= x_1, x_2, x_3$

$z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$

Quem entra ?

x_1 possibilita maior ganho por unidade e será aumentado.

Até qual limite ?

Notas

Limite para Aumento de x_1

Linha											Variáveis Básicas
0	z	$-60x_1$	$-30x_2$	$-20x_3$					=	0	$z=0$
1		$8x_1$	$+6x_2$	$+1x_3$	$+x_4$				=	48	$x_4=48$
2		$4x_1$	$+2x_2$	$+1{,}5x_3$		$+x_5$			=	20	$x_5=20$
3		$2x_1$	$+1{,}5x_2$	$+0{,}5x_3$			$+x_6$		=	8	$x_6=8$
4			x_2					$+x_7$	=	5	$x_7=5$

Limites

Linha		Restrição	Máx x_1
1	$x_4 = 48 - 8x_1$	$x_4 \geq 0$	$^{48}/_{8}$
2	$x_5 = 20 - 4x_1$	$x_5 \geq 0$	$^{20}/_{4}$
$*3$	$x_6 = 8 - 2x_1$	$x_6 \geq 0$	$^{8}/_{2}$
4	x_1 não aparece	$x_7 \geq 0$	∞

$*$ *limite mais apertado*

Notas

Calculando a Nova Base

Linha											Variáveis Básicas
0	z	$-60x_1$	$-30x_2$	$-20x_3$					=	0	$z=0$
1		$8x_1$	$+6x_2$	$+1x_3$	$+x_4$				=	48	$x_4=48$
2		$4x_1$	$+2x_2$	$+1{,}5x_3$		$+x_5$			=	20	$x_5=20$
3		$2x_1$	$+1{,}5x_2$	$+0{,}5x_3$			$+x_6$		=	8	$\downarrow x_6$ $\uparrow x_1$
4			x_2					$+x_7$	=	5	$x_7=5$

Na linha 3 a variável x_6 sairá da base e entrará a variável x_1.

Pivoteamento:

Executam-se as operações elementares para que x_1 apareça com coeficiente 1 nessa linha e com coeficiente 0 em todas as outras. A linha 3 é dita linha pivô.

Notas

Nova SBF

Linha											Variáveis Básicas
0	z		$+15x_2$	$-5x_3$			$+30x_6$		=	240	$z=240$
1				$-x_3$	$+x_4$		$-4x_6$		=	16	$x_4=16$
2			$-x_2$	$+0{,}5x_3$		$+x_5$	$-2x_6$		=	4	$x_5=4$
3		x_1	$+0{,}75x_2$	$+0{,}25x_3$			$+0{,}5x_6$		=	4	$x_1=4$
4			x_2					$+x_7$	=	5	$x_7=5$

É ótima ?

Se não, quem entra e quem sai da base ?

Notas

Pivoteamento

Linha											Variáveis Básicas
0	z		$+15x_2$	$-5x_3$			$+30x_6$		=	240	z=240
1				$-x_3$	$+x_4$		$-4x_6$		=	16	x_4=16
2			$-x_2$	$+0{,}5x_3$		$+x_5$	$-2x_6$		=	4	$\downarrow x_5$ $\uparrow x_3$
3		x_1	$+0{,}75x_2$	$+0{,}25x_3$			$+0{,}5x_6$		=	4	x_1=4
4			x_2					$+x_7$	=	5	x_7=5

Notas

Nova SBF

Linha											Variáveis Básicas
0	z		$+5x_2$			$+10x_5$	$+10x_6$		=	280	z=280
1			$-2x_2$		$+x_4$	$+2x_5$	$-8x_6$		=	24	x_4=24
2			$-2x_2$	$+x_3$		$+2x_5$	$-4x_6$		=	8	x_3=8
3		x_1	$+1{,}25x_2$			$-0{,}5x_5$	$+1{,}5x_6$		=	2	x_1=2
4			x_2					$+x_7$	=	5	x_7=5

função objetivo: $max\ z = -5x_2 - 10x_5 - 10x_6$

sem variáveis atrativas

Solução Ótima $(x_1, \ldots, x_3)$: (2 , 0 , 8)

Base Ótima $(x_1, \ldots, x_7)$: (2 , 0 , 8 , 24 , 0 , 0 , 5)

Notas

Base Ótima - Informações

Linha											Variáveis Básicas
0	z		$+5x_2$			$+10x_5$	$+10x_6$		=	280	z=280
1			$-2x_2$		$+x_4$	$+2x_5$	$-8x_6$		=	24	x_4=24
2			$-2x_2$	$+x_3$		$+2x_5$	$-4x_6$		=	8	x_3=8
3		x_1	$+1{,}25x_2$			$-0{,}5x_5$	$+1{,}5x_6$		=	2	x_1=2
4			x_2					$+x_7$	=	5	x_7=5

Custo Reduzido (CR)

Indicado na linha 0 significa: quanto o aumento de uma unidade em cada variável pode reduzir a f.o. z

- VB tem CR 0 na base ótima
- VNB (ex. x_2) na base ótima com 5 indica que aumentar x_2 em 1 pode diminuir em 5 unidades a f.o.

Notas

Base Ótima - Informações

Restrições Ativas - *Binding Constraints*

Restrições com variável de folga igual a zero.

Linha										Variáveis Básicas	Var. Folga	Restrição Original
1		$-2x_2$		$+x_4$	$+2x_5$	$-8x_6$		=	24	$x_4=24$	$x_4=24$	$+8x_1+6x_2+x_3 \leq 48$
2		$-2x_2$	$+x_3$		$+2x_5$	$-4x_6$		=	8	$x_3=8$	$x_5=0$	$+4x_1+2x_2+1,5x_3 \leq 20$
3	x_1	$+1,25x_2$			$-0,5x_5$	$+1,5x_6$		=	2	$x_1=2$	$x_6=0$	$+2x_1+1,5x_2+0,5x_3 \leq 8$
4		x_2					$+x_7$	=	5	$x_7=5$	$x_7=5$	$x_2 \leq 5$

As restrições 2 e 3, (horas de acabamento e carpintaria) são as únicas que estão limitando o aumento do lucro.

Notas

Base Ótima - Informações

Restrições Inativas - *Non-binding Constraints*

Restrições com variável de folga > 0.

Linha										Variáveis Básicas	Var. Folga	Restrição Original
1		$-2x_2$		$+x_4$	$+2x_5$	$-8x_6$		=	24	$x_4=24$	$x_4=24$	$+8x_1+6x_2+x_3 \leq 48$
2		$-2x_2$	$+x_3$		$+2x_5$	$-4x_6$		=	8	$x_3=8$	$x_5=0$	$+4x_1+2x_2+1,5x_3 \leq 20$
3	x_1	$+1,25x_2$			$-0,5x_5$	$+1,5x_6$		=	2	$x_1=2$	$x_6=0$	$+2x_1+1,5x_2+0,5x_3 \leq 8$
4		x_2					$+x_7$	=	5	$x_7=5$	$x_7=5$	$x_2 \leq 5$

As restrições 1 e 4, (qtd. de madeira e demanda de armários) são restrições **com folga**. Ter mais madeira, por exemplo, não vai permitir uma produção maior.

Notas

Notas