Programação Linear Inteira
Modelagem com Variáveis Inteiras

Haroldo Gambini Santos

Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP

30 de agosto de 2011

Notas

Definições

PI: Problema de Programação Inteira Puro problema onde todas as variáveis devem aparecer com valores inteiros na solução;

PIM: Problema de Programação Inteira Mista problema onde ao menos uma variável deve aparecer com valor inteiro na solução.

Notas

Exemplo

Investimentos

A empresa VALOR está considerando 4 investimentos. Cada um tem uma perspectiva de ganho e um custo, os quais são descritos a seguir:

Investimento	Perspectiva Ganho	Custo
1	16.000	5,000
2	22.000	7,000
3	12.000	4,000
4	8.000	3,000

A empresa tem atualmente 14.000 disponível para investir. Modele o problema que descreve como a VALOR irá investir de maneira ótima.

Notas

Exemplo

Investimentos

(*em milhares de unidade monetárias*)

$$\begin{aligned} Max \quad & 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 & (1) \\ s.t. \quad & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 & (2) \end{aligned}$$

Notas

Exercícios

Que restrições adicionais devem ser incluídas no problema da Valor para tratar as seguintes particularidades:

1. deve-se investir no máximo em 2 investimentos;
2. o investimento em 2 implica que deve-se investir em 1;
3. o investimento em 2 implica que não deve-se investir em 4;

Notas

Problemas de Custo Fixo

Indústria do Vestuário

Uma indústria pretende fabricar camisetas, meias e calças.

O maquinário necessário para a confecção de cada item pode ser alugado semanalmente por: camisetas (200), meias (150) e calças (100).

A fabricação de cada item requer um certo tempo de trabalho em horas e uma quantidade de tecido em m^2. Além disso, existe um preço de venda para cada item e um custo unitário de produção.

Item	Horas de Trab.	Tecido	Preço Venda	Custo Unitário
Camiseta	3	4	12	6
Meias	2	3	8	4
Calça	6	4	15	8

Em uma semana, existe a disponibilidade de 150 horas de trabalho e 160 m^2 de tecido. Formule o programa linear que maximiza o lucro dessa indústria considerando o planejamento de uma semana.

Notas

Ex.: Indústria do Vestuário

Variáveis

x_1 : número de camisetas produzidas
x_2 : número de meias produzidas
x_3 : número de calças produzidas

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$$

Custo Fixo

Note que o custo de aluguel das máquinas não depende da quantidade produzida de um determinado item e sim da decisão binária de produzir ou não determinado item.

Variáveis Auxiliares

y_1 : 1 se alguma camiseta foi produzida 0 c.c.
y_2 : 1 se alguma meia foi produzida 0 c.c.
y_3 : 1 se alguma calça foi produzida 0 c.c.

Notas

Ex.: Indústria do Vestuário

Maximize

$$6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3$$

Sujeito a

$$\begin{aligned} \text{horas}: \quad & 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 & \leq 150 \\ \text{tecido}: \quad & 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 & \leq 160 \end{aligned}$$

Como garantir a que o valor das variáveis y estará consistente com o das variáveis x, ou seja, que qualquer valor maior que zero em x_i implique $y_i = 1$?

Big M

$$x_i \leq M y_i$$

(M é uma constante *suficientemente grande*)

Notas

Ex.: Indústria do Vestuário

Maximize

$$6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3$$

Sujeito a

$$\begin{aligned} \text{horas}: \quad & 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150 \\ \text{tecido}: \quad & 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160 \\ \text{maqCamisetas}: \quad & x_1 \leq M y_1 \\ \text{maqMeias}: \quad & x_2 \leq M y_2 \\ \text{maqCalcas}: \quad & x_3 \leq M y_3 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z} \\ & y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Notas

Ex.: Transportes Asteróide

O Problema

Uma transportadora tem uma frota de caminhões dedicada a uma rota com alta requisição (ex.: rio-são paulo).

Os caminhões são utilizados para a entrega de um conjunto de encomendas já estabelecido. Todas as encomendas devem ser entregues. O objetivo é distribuir as encomendas em caminhões de modo a minimizar o número de caminhões necessário.

Cada caminhão tem uma determinada capacidade de peso máximo. Além disso, por questões de segurança, encomendas de alto valor não devem ser concentradas em um caminhão só, de modo que existe um limite para o valor máximo estimado das encomendas na carga de um caminhão. O custo de um caminhão realizar uma viagem no trecho também é determinado.

Notas

Ex.: Transportes Asteróide - Modelo

Dados

C	conjunto de caminhões	E	conjunto de encomendas
$w(c)$	capacidade caminhão c	$p(e)$	peso enc. e
$v(c)$	valor máx. cam. c	$s(e)$	val enc. e
$t(c)$	custo viagem cam. c		

Variáveis

$$x_{ec} = \begin{cases} 1 & \text{encomenda } e \text{ será transportada pelo caminhão } c \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$y_c = \begin{cases} 1 & \text{se o caminhão } c \text{ será utilizado} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Notas

Ex.: Transportes Asteróide - Modelo

Dados

C	conjunto de caminhões	E	conjunto de encomendas
$w(c)$	capacidade caminhão c	$p(e)$	peso enc. e
$v(c)$	valor máx. cam. c	$s(e)$	val enc. e
$t(c)$	custo viagem cam. c		

Restrições

$$\begin{aligned} \text{escolha cam.: } & \sum_{c \in C} x_{ec} && = 1 \ \forall\, e \in E \\ \text{capacidade cam.: } & \sum_{e \in E} p(e) x_{ec} && \leq w(c) y_c \ \forall\, c \in C \\ \text{val. máx. cam.: } & \sum_{e \in E} s(e) x_{ec} && \leq v(c) y_c \ \forall\, c \in C \end{aligned}$$

Notas

Ex.: Transportes Asteróide - Modelo

Minimize

$$\sum_{c \in C} t(c) y_c$$

Sujeito a

$$\sum_{c \in C} x_{ec} = 1 \;\; \forall\, e \in E$$

$$\sum_{e \in E} p(e) x_{ec} \leq w(c) y_c \;\; \forall\, c \in C$$

$$\sum_{e \in E} s(e) x_{ec} \leq v(c) y_c \;\; \forall\, c \in C$$

$$x_{ec} \in \{0,1\} \;\; \forall\, e \in E, c \in C$$

$$y_c \in \{0,1\} \;\; \forall\, c \in C$$

Notas

Negação

O Complemento Binário

Sejam y e x variáveis binárias (lógicas), se y é a negação de x denominamos y como *complemento binário* de x.

$$y = \overline{x}$$

Linearizando:

$$y = 1 - x$$

Notas

Variáveis de Folga

Considere o problema da Transportes Asteróide.

Caso todos os caminhões fiquem cheios e ao menos uma encomenda não caiba mais, o resolvedor indicará que o problema é infactível e não informará nenhuma solução.

Para o usuário, seria mais prático receber uma solução com o máximo possível de itens carregados e com a informação de quais itens não puderam ser carregados.

Notas

Variáveis de Folga

Restrições Fortes

Até agora os modelos foram especificados com restrições que devem ser satisfeitas sempre. Essas restrições são denominadas *Restrições Fortes*.

Restrições Fracas

Para evitar o problema de restringir demais as soluções do problema e torná-lo infactível, podemos utilizar *Restrições Fracas*: deve-se sempre que possível atendê-las, mas caso não seja possível deve-se violá-las o mínimo possível.

Notas

Notas

Notas