

# Programação Linear Inteira INTRODUÇÃO II

Haroldo Gambini Santos

Universidade Federal de Ouro Preto

30 de agosto de 2011

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

## Conteúdo

- 1 Introdução
- 2 Algoritmo Simplex
- 3 Modelagem

Notas

---

---

---

---

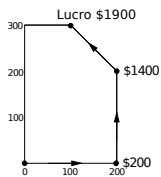
---

---

---

---

## Algoritmo Simplex - Visão Geral



- o algoritmo inicia em algum vértice factível; ex.:  $(0,0)$
- a cada iteração, são pesquisados vértices vizinhos e o mesmo se move para o que oferecer melhora (método de subida - *Hill Climbing*);
- sem vizinhos de melhora ? solução ótima !

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

# Algoritmo Simplex - Visão Geral

Maximize:

$$x_1 + 6x_2 + 13x_3$$

Sujeito a:

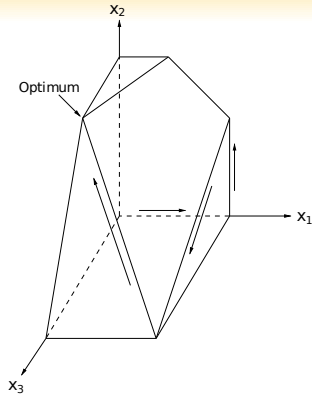
$$x_1 \leq 200$$

$$x_2 \leq 300$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 400$$

$$x_2 + 3x_3 \leq 600$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

# Algoritmo Simplex - Visão Geral

Como cresce o nr. de vértices do poliedro ?



mesmo com 3 variáveis (3 dimensões)

a adição de restrições aumenta muito o nr. de vértices !

À primeira vista o algoritmo parece muito ineficiente.

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

# Algoritmo Simplex - Implementações

## Garantias

- no *pior caso*, o algoritmo tem complexidade exponencial
- na *prática*, os problemas são resolvidos entre  $2m$  e  $3m$  iterações

## Progressos

“Programas Lineares com milhares ou milhões de variáveis são rotineiramente resolvidos utilizando-se o algoritmo simplex com computadores modernos.”

Overton, M.L. 1997

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

# Programação Linear - Pacotes de Software

## Comerciais

- IBM ILOG CPLEX
- GUROBI

## Código Aberto

- GNU GLPK Linear Programming Kit
- COIN-OR CLP / CBC

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

# Modelagem - Planejamento da Produção

Nossa companhia fabrica tapetes artesanais, um produto com demanda sazonal. Obtivemos as demandas  $d_1, d_2, \dots, d_{12}$  para o ano que se inicia. As mesmas variam desde 440 até 920.

Atualmente a empresa tem 30 empregados, cada um dos quais faz 20 tapetes por mês e recebe \$ 2.000,00. A companhia está sem estoque de carpetes.

As flutuações de demanda podem ser gerenciadas do seguinte modo:

- 1 **trabalho extra:** nesse caso paga-se 80% a mais do que o salário regular; cada funcionário pode ter um máximo de 30% de trabalho a mais no mês;
- 2 **contratar ou despedir:** custo de \$ 320 e \$ 400, respectivamente;
- 3 **manter estoques:** custa \$ 8 por tapete por mês; atualmente não temos tapetes estocados e precisamos terminar o ano sem estoque também.

Como atender toda a demanda minimizando os custos de produção ?

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

# Plan. Prod. - Variáveis

- $t_i$  trabalhadores no  $i$ -ésimo mês; ( $t_0 = 30$ );
- $x_i$  número de tapetes feitos  $i$ -ésimo mês;
- $e_i$  número de tapetes feitos utilizando-se trabalho extra no mês  $i$ ;
- $c_i, d_i$  respectivamente: contratados e demitidos no início do mês  $i$ ;
- $a_i$  número de tapetes armazenados ao final do mês  $i$  ( $a_0 = 0$ ).

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

Introdução Algoritmo Simplex Modelagem

## Plan. Prod. - Restrições

**Produção mês  $i$  ( $i = 1, \dots, 12$ )**  

$$x_i = 20t_i + e_i$$

**Máximo prod. com trab. extra ( $20 \times 0,3$ )**  

$$e_i \leq 6t_i$$

**Tapetes armezados no final do mês  $i$**   

$$a_i = a_{(i-1)} - demanda_i + x_i$$

**Trabalhadores no início do mês  $i$**   

$$t_i = t_{(i-1)} + c_i - d_i$$

**Não negatividade**  

$$t_i, x_i, c_i, e_i, a_i \geq 0 \quad \forall i$$

**Variáveis**

- $t_i$  trabalhadores
- $x_i$  produção
- $c_i$  contratados
- $d_i$  demitidos
- $e_i$  trab. extra
- $a_i$  armazenados

Programação Linear Inteira, INTRODUÇÃO II 10 / 17

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

Introdução Algoritmo Simplex Modelagem

## Plan. Prod. - Função Objetivo

**Mínimizando os Custos**

$$\sum_{i=1}^{12} ( 2000t_i + 8a_i + 180e_i + 320c_i + 400d_i )$$

**Variáveis**

- $t_i$  trabalhadores
- $x_i$  produção
- $c_i$  contratados
- $d_i$  demitidos
- $e_i$  trab. extra
- $a_i$  armazenados

Programação Linear Inteira, INTRODUÇÃO II 11 / 17

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

Introdução Algoritmo Simplex Modelagem

## Modelagem - Análise de Investimentos

Um investidor tem 3 alternativas de investimento :  $A$ ,  $B$  e  $C$  para o ano que se inicia. Os investimentos não são mutuamente exclusivos e o dinheiro proveniente de lucros em uma aplicação pode ser reinvestido novamente em qualquer uma das aplicações. As aplicações têm as seguintes características:

- $A$  : disponível no início de cada um dos quatro trimestres; cada R\$ investido em  $A$  no princípio do trimestre devolve R\$ 1,10 no final do trimestre;
- $B$  : disponível no início de cada um dos dois semestres; cada R\$ investido em  $B$  retorna R\$ 1,20 ao final do semestre.
- $C$  : disponível somente no início do ano; Cada R\$ investido em  $C$  devolve R\$ 1,40 no final do ano.

O capital do investidor é de R\$ 5.000,00. Como maximizar o dinheiro acumulado pelo investidor até o final do ano ?

Programação Linear Inteira, INTRODUÇÃO II 12 / 17

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

## Carteira de Aplicações

### Variáveis de Decisão

$x_{ij}$  : quantidade investida na aplicação  $i$  no trimestre  $j$



$$i \in \{A, B, C\}, j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$x_{A1}, x_{A2}, x_{A3}, x_{A4}, x_{B1}, x_{B2}, x_{C1}$$

Notas

---

---

---

---

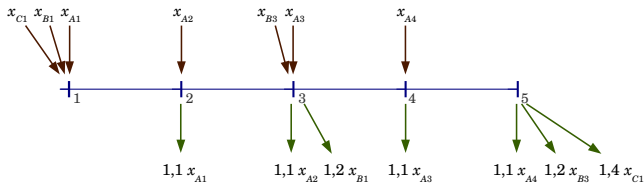
---

---

---

---

## O Fluxo do Capital



Notas

---

---

---

---

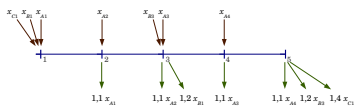
---

---

---

---

## O Fluxo do Capital : Função Objetivo



### Maximize

$$1,1x_{A1} + 1,2x_{B3} + 1,4x_{C1}$$

(lembre-se que o dinheiro ganho em períodos anteriores pode ser reinvestido.)

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

## O Fluxo do Capital : Restrições

### Período 1

Os R\$ 5.000,00 disponíveis podem ser guardados ou investidos em A,B ou C.  
Criaremos uma variável artificial  $g_1$  que indica a quantidade guardada no período 1.

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} + g_1 = 5000$$

### Período 2

$$x_{A2} + r_2 = 1, 1x_{A1} + g_1$$

### Período $n$

investimentos em  $n$  + guardados em  $n$   
=  
lucros em  $n$  + guardados em  $n - 1$

Notas

---



---



---



---



---



---

## Fluxo de Capital - Modelo

Maximize:

$$1, 1x_{A4} + 1, 2x_{B3} + 1, 4x_{C1}$$

Sujeito a:

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} + g_1 = 5000$$

$$x_{A2} + g_2 = g_1 + 1, 1x_{A1}$$

$$x_{A3} + x_{B3} + g_3 = g_2 + 1, 1x_{A2} + 1, 2x_{B1}$$

$$x_{A4} + g_4 = g_3 + 1, 1x_{A3}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

$$g_j \geq 0 \quad \forall j$$

Notas

---



---



---



---



---



---

Notas

---



---



---



---



---



---