

Otimização   Pesquisa Operacional   Prob. da Dieta   Método Gráfico

# Programação Linear Inteira

## INTRODUÇÃO

---

Haroldo Gambini Santos  
Universidade Federal de Ouro Preto

---

30 de agosto de 2011



Programação Linear Inteira, INTRODUÇÃO 1 / 26

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

Otimização   Pesquisa Operacional   Prob. da Dieta   Método Gráfico

# Conteúdo

- 1 Otimização
- 2 Pesquisa Operacional
- 3 Prob. da Dieta
- 4 Método Gráfico



Programação Linear Inteira, INTRODUÇÃO 2 / 26

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

Otimização   Pesquisa Operacional   Prob. da Dieta   Método Gráfico

# Introdução

- selecionar a melhor entre um conjunto de alternativas;
- ramo da matemática aplicada:
  - teoria
  - algoritmos
  - aplicações



Programação Linear Inteira, INTRODUÇÃO 3 / 26

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

Otimização    Pesquisa Operacional    Prob. da Dieta    Método Gráfico

## Introdução

**Um Problema:**

- objetivo:
  - encontrar o maior número primo
- restrição:
  - com 3 casas decimais
- solução ótima:
  - 997



Programação Linear Inteira, INTRODUÇÃO

4 / 26

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

Otimização    Pesquisa Operacional    Prob. da Dieta    Método Gráfico

## Introdução

**Formato**

- função objetivo:  
 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
- restrições que definem o conjunto de soluções válidas:  
 $S \subseteq \mathbb{R}^n$   
(normalmente um conjunto de equações/desigualdades lineares ou não lineares)

**Resolvendo**

Encontrar  $x^* \in S$ , a solução ótima, que minimiza/maximiza  $f$



Programação Linear Inteira, INTRODUÇÃO

5 / 26

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

Otimização    Pesquisa Operacional    Prob. da Dieta    Método Gráfico

## Otimização ...

- Linear  
 $x_1 + 3x_2 \dots$
- Não Linear  
 $\text{seno}(x_1) + 3x_2 \dots$
- Contínua  
 $x \in \mathbb{R}^n$
- Discreta  
 $x \in \mathbb{Z}^n$
- Multicritério
- ...



Programação Linear Inteira, INTRODUÇÃO

6 / 26

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

Otimização **Pesquisa Operacional** Prob. da Dieta Método Gráfico

## Pesquisa Operacional

*Ramo da Ciência que lida com a otimização do desempenho de sistemas.*

- Otimizar
  - maximizar lucro
  - maximizar satisfação
  - minimizar custos
  - minimizar riscos
  - ...



Programação Linear Inteira, INTRODUÇÃO 7 / 26

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

Otimização **Pesquisa Operacional** Prob. da Dieta Método Gráfico

## Pesquisa Operacional: Origens Históricas

- Início formal: II Grande Guerra
  - Exército britânico:
    - $\cong$  1000 funcionários no cargo de Cientista de Pesquisa Operacional
    - grupo altamente interdisciplinar
  - Problemas resolvidos na pelo grupo:
    - Localização de radares
    - Determinação do tamanho de frotas de navios
    - Detecção de submarinos
  - Rapidamente implementado pelos países aliados



Programação Linear Inteira, INTRODUÇÃO 8 / 26

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

Otimização **Pesquisa Operacional** Prob. da Dieta Método Gráfico

## Pesquisa Operacional: Definição

*Pesquisa Operacional (PO) ou Ciência do Gerenciamento estuda as operações de uma organização e utiliza modelos **matemáticos** e/ou **computacionais** ou outras abordagens analíticas para encontrar maneiras **melhores** de realizá-las.*

*The Science of Better*  
<http://www.scienceofbetter.org/>



Programação Linear Inteira, INTRODUÇÃO 9 / 26

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

## Construindo um Modelo

- interesse em **modelar matematicamente** o processo de decisão:

Parar com o:



E começar a formalizar:

$$x_1 + x_4 + x_7 \leq 10$$

$$x_3 - x_5 \geq 5$$

...



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

## O Modelo

### Variáveis de Decisão

- variáveis para as quais se tem liberdade para escolha de **quais valores** as mesmas irão receber.

### Exemplo

Planejamento de produção GAS combustíveis para o segundo semestre:

$x_1$  quantidade em milhares de litros de gasolina que será produzida;

$x_2$  quantidade em milhares de litros de diesel que será produzido.



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

## O Modelo

### Dados de Entrada

Ou **variáveis não controladas**.

Variáveis cujos valores são decididos em sistemas que ficam fora do controle do tomador de decisões.

### Exemplo

Planejamento da Produção:

- custos de matéria prima;
- custos trabalhistas;
- disponibilidade de matéria prima.



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

# Programação Linear



George Dantzig

- Teoria matemática: Kantorovich, 1939 (lhe rendeu um Nobel)
- 1940: Algoritmo Simplex desenvolvido por Dantzig
- Técnica poderosa (capaz de modelar muitos problemas)
- Algoritmo Simplex
  - executa operações elementares sobre matrizes
  - essas operações são repetidas muitas vezes
  - tedioso de resolver a mão
- felizmente: nascimento do computador eletrônico também nos anos 40 !



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

# Programação Linear

## Utilização Pós-Guerra

- Crescente utilização no comércio e indústria
- Moscow, 1958, planejamento do transporte de areia de construção:
  - 10 pontos de origem
  - 230 pontos de destino
  - 10 dias de um computador *Strena*
  - 11% de economia



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

# Programação Linear

## Utilização Pós-Guerra

- Rijkswaterstaat da Noruega, 1986, definição da política de gerenciamento de água
  - 15 milhões economizados anualmente
- Eletrobrás, CEPEL, 1986 alocação ótima de recursos térmicos e hidráulicos no sistema nacional gerador de energia
  - 43 milhões economizados anualmente



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

## Programa Linear - Formato

### Função Objetivo

- Minimizar** custo, tempo, risco, poluição, ... *ou*
- Maximizar** lucro, qualidade, segurança, ... *ou*
- Encontrar** qualquer solução viável (que atenda alguns requisitos)

### Restrições

- Disponibilidade** de recursos, ...
- Operacionais** horários de trabalho, tempo de máquina, ...
- Límites** venda em escala, ...



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

## Programação Linear - Exemplo: O Problema da Dieta

Para uma boa alimentação, o corpo necessita de **vitaminas e proteínas**.

A necessidade **mínima** de vitaminas é de 32 unidades por dia e a de proteínas de 36 unidades por dia.



Uma pessoa tem disponível **carne e ovos** para se alimentar. Cada unidade de carne contém 8 unidades de vitamina e 6 unidades de proteínas. Cada unidade de ovo contém 4 unidades de vitamina e 6 unidades de proteínas.

Cada unidade de carne **custa** 3 unidades monetárias e cada unidade de ovo custo 2,5 unidades monetárias.

Qual a quantidade diária de carne e ovos que deve ser consumida para **suprir as necessidades** de vitaminas e proteínas com **menor custo possível** ?



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

## Programação Linear - Exemplo: O Problema da Dieta

### Variáveis de Decisão

- $x_1$  quantidade que será comprada de carne
- $x_2$  quantidade que será comprada de ovos

### Custo de uma solução

- Preço da carne: 3
- Preço dos ovos: 2,5

$$3x_1 + 2,5x_2$$



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

Otimização    Pesquisa Operacional    **Prob. da Dieta**    Método Gráfico

## Programação Linear - Exemplo: O Problema da Dieta

A solução tem que satisfazer os requerimentos nutricionais:

Nutriente	Quantidade	Mínima
Vitaminas	32	
Proteínas	36	

**Restrições**

	Carne	Ovos	
vitaminas	$8x_1$	$4x_2$	$\geq 32$
proteínas	$6x_1$	$6x_2$	$\geq 36$

Programação Linear Inteira, INTRODUÇÃO 19 / 26

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

Otimização    Pesquisa Operacional    **Prob. da Dieta**    Método Gráfico

## Prob. da Dieta - O Modelo

**Minimize:**

$$3x_1 + 2,5x_2$$

**Sujeito a:**

$$8x_1 + 4x_2 \geq 32$$

$$6x_1 + 6x_2 \geq 36$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Programação Linear Inteira, INTRODUÇÃO 20 / 26

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

Otimização    Pesquisa Operacional    Prob. da Dieta    **Método Gráfico**

## O Método Gráfico

Trabalhando com problemas de 2 variáveis, podemos visualizar um PL no plano cartesiano, do seguinte modo:

- soluções são representadas por pontos no gráfico;
- restrições indicam regiões do gráfico onde as soluções são válidas.

Programação Linear Inteira, INTRODUÇÃO 21 / 26

Notas

---

---

---

---

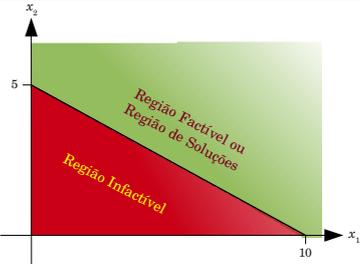
---

---

---

---

## Método Gráfico - Restrições



Desenhando  $x_1 + 2x_2 \geq 10$   
 Considere  $x_1 + 2x_2 = 10$   
 para  $x_1 = 0$  temos que  $x_2 = 5$   
 para  $x_2 = 0$  temos que  $x_1 = 10$

A restrição divide o gráfico em dois semiplanos. Somente um deles conterá a solução ótima.  
 ex.:  $x_1 = 0, x_2 = 0$  é válido?



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

## Método Gráfico - Exemplo

### A Roça

Um pequeno agricultor está decidindo quantos sacos de sementes irá plantar nessa semana de soja e de milho.

O mesmo dispõe de 350 reais. O custo do saco de sementes de soja é 70 reais e o custo do saco de sementes de milho é de 50 reais.

Para buscar as sementes o agricultor tem uma picape capaz de carregar 400 kilos. Cada saco de sementes de soja pesa 50 quilos e cada saco de sementes de milho pesa 80 kilos.

Consultando o vendedor, ele verificou que o vendedor somente dispõe de 4 sacos de soja, enquanto que tem uma grande quantidade de sacos de milho.

Olhando no mercado local, o agricultor calculou que irá lucrar na época da colheita 300 reais por saco de soja e 280 reais por saco de milho plantados.

Quantos sacos o mesmo deve plantar de cada um para maximizar o seu lucro ?



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

## O Gráfico

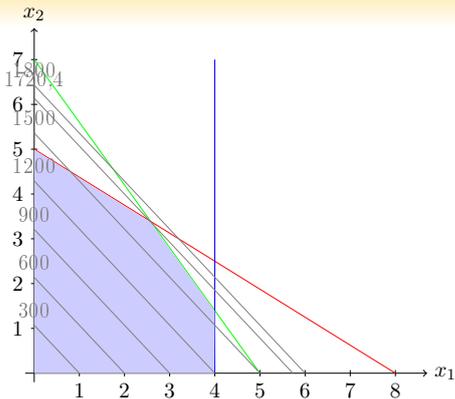
Variáveis:  
 $x_1$  soja  
 $x_2$  milho

Restrições:  
 dinheiro (350)  
 soja 70  
 milho 50  
 $70x_1 + 50x_2 \leq 350$

peso (400)  
 soja 50  
 milho 80  
 $50x_1 + 80x_2 \leq 400$

disponibilidade  
 soja 4  
 $x_1 \leq 4$

Lucro:  
 $300x_1 + 280x_2$



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

## Espaço de Soluções

### Exemplo 2

1 desenhe no gráfico a região factível (região de soluções) que satisfaz as restrições abaixo:

$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + x_2 \geq 16$$

$$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0$$



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

## Espaço de Soluções

### Exercício

1 desenhe no gráfico a região factível (região de soluções) que satisfaz as restrições abaixo:

$$5x_1 + 2x_2 \geq 25$$

$$4x_1 - 3x_2 \geq -3$$

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_2 \geq 0$$



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---