

## Programação Inteira FORMULAÇÕES

Haroldo Gambini Santos

Universidade Federal de Ouro Preto

30 de agosto de 2011



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

## Conteúdo

1 A Formulação Ideal

2 Planos de Corte



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

## Exemplo

*Maximize:*

$$z = 6x_1 + 5x_2$$

*Sujeito a:*

$$15x_1 + 7x_2 \leq 49$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 17$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

### Exemplo

Maximize:

$$6x_1 + 5x_2$$

Sujeito a:

$$15x_1 + 7x_2 \leq 49$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 17$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$

$z = 27,11$  em

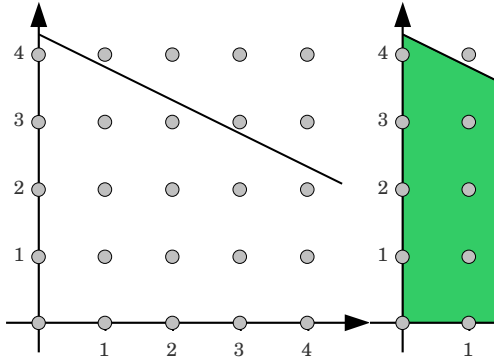
$x_1 = 1,7$  e  $x_2 = 3,4$

Não é ponto inteiro!

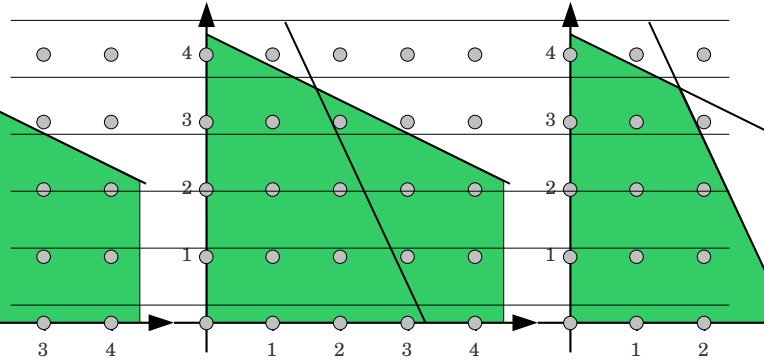
Ótimo inteiro:

$z = 22$  em

$x_1 = 2$  e  $x_2 = 2$



Notas



### A Formulação Ideal

Maximize:

$$6x_1 + 5x_2$$

Sujeito a:

$$15x_1 + 7x_2 \leq 49$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 17$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$

Substituir por ...

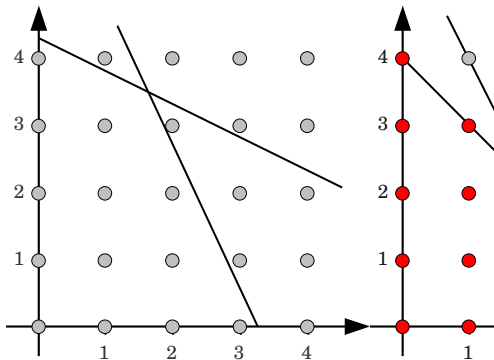
$$2x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$6x_1 + 3x_2 \leq 18$$

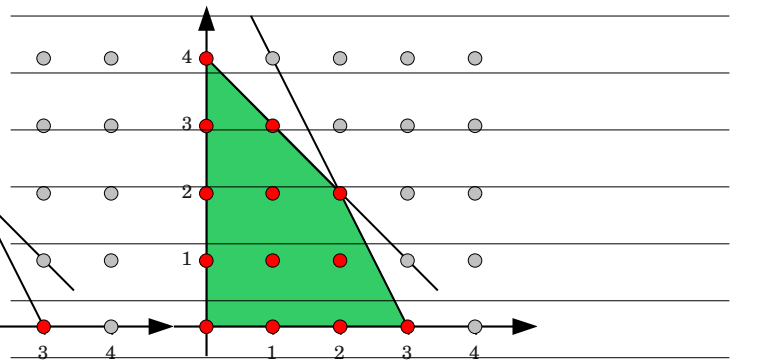
$$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$$

formulação ideal

corresponde a  
envoltória convexa  
dos pontos inteiros



Notas



### A Formulação Ideal

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

#### Teorema

Quando o poliedro definido pelas restrições define a envoltória convexa das soluções inteiras válidas, o *Programa Inteiro* pode ser resolvido como um *Programa Linear*, ou seja, as restrições de integralidade podem ser ignoradas e a solução ótima fornecida para esse problema relaxado ainda assim será uma solução inteira.

## Planos de Corte

Maximize:

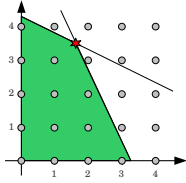
$$6x_1 + 5x_2$$

Sujeito a:

$$15x_1 + 7x_2 \leq 49$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 17$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$



### Problema

Como colocar uma restrição adicional que invalide a solução fracionária corrente ( ) ?



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

## Cortes

Considere a restrição:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 17$$

restrição satisfeita pela sol. fracionária ( $x_1 = 1,7$  e  $x_2 = 3,4$ ). vamos gerar outra restrição dividindo a primeira por 2.

$$x_1 + 2x_2 \leq 8,5$$

do lado esquerdo somente temos coeficientes inteiros e o valor das variáveis também deve ser inteiro.

Desse modo, a parte fracionária do lado direito não deve ser aproveitada:

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

A restrição acima denomina-se *Desigualdade Válida* ou *Corte*. Ela invalida a solução fracionária, mas não invalida nenhuma solução inteira válida.



Notas

---

---

---

---

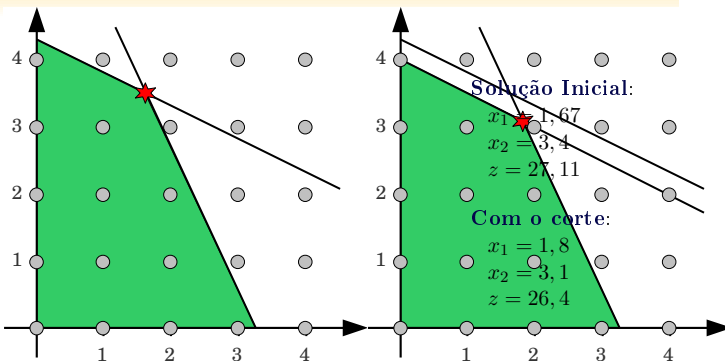
---

---

---

---

## Cortando



Solução Inicial:

$$x_1 = 1,7$$

$$x_2 = 3,4$$

$$z = 27,11$$

Com o corte:

$$x_1 = 1,8$$

$$x_2 = 3,1$$

$$z = 26,4$$



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

## Planos de Corte

### Inserção de Cortes

- formulação resultante mais forte (mais próxima da formulação ideal)
- limite dual possivelmente melhor: aproximando-se do ótimo do programa inteiro

### Pergunta

No caso de se obter uma solução fracionária, sempre pode-se encontrar um corte que a invalide ?



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

## Planos de Corte de Gomory



Gomory, R.E. *Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs*. Bull. Amer. Math. Soc., 64(5), pp. 275-278, 1958.



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

## Separação

O problema de encontrar uma desigualdade válida não satisfeita pela solução fracionária é chamado de **Problema de Separação**.



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---