Programação Inteira
Cortes

Haroldo Gambini Santos

Universidade Federal de Ouro Preto

30 de agosto de 2011

Notas

Conteúdo

Notas

Introdução

Considere o Programa Inteiro *PI* :

Maximize:

$$\sum_{j=1}^{k} c_j x_j$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, k \quad (2)$$

$$x_j \in \mathbb{Z} \quad \forall j = 1, 2, \dots, k \quad (3)$$

Notas

Cortes Baseados em Arredondamento

- Cortes de *Gomory*
- *Mixed Integer Rounding*
- *Chvátal-Gomory*

Notas

Cortes de *Chvátal-Gomory*

Para qualquer $u \in \mathbb{R}^m_+$ e para todo x que satisfaz

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j \leq b_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m \tag{1}$$

temos que:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j \leq \sum_{i=1}^{m} u_i b_i \tag{2}$$

Desse modo, todas as soluções que satisfazem (1) e $x_j \geq 0$ também satisfazem:

$$\sum_{j=1}^{k} \left\lfloor \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \right\rfloor x_j \leq \sum_{i=1}^{m} u_i b_i \tag{3}$$

Notas

Cortes de *Chvátal-Gomory*

Tendo:

$$\sum_{j=1}^{k} \left\lfloor \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \right\rfloor x_j \leq \sum_{i=1}^{m} u_i b_i \tag{1}$$

e considerando que $x_j \in \mathbb{Z}$ obtemos o Plano de Corte de *Chvátal-Gomory*:

$$\sum_{j=1}^{k} \left\lfloor \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \right\rfloor x_j \leq \left\lfloor \sum_{i=1}^{m} u_i b_i \right\rfloor \tag{2}$$

Notas

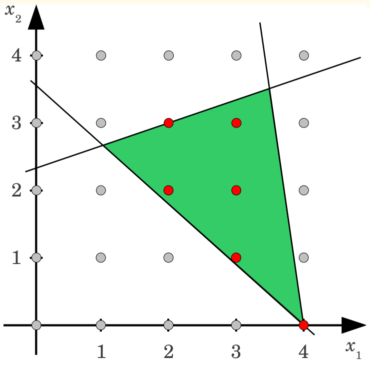
Exemplo

Maximize:

$$2x_1 + x_2$$

Sujeito a:

$$7x_1 + x_2 \leq 28$$
$$-x_1 + 3x_2 \leq 7$$
$$-8x_1 - 9x_2 \leq -32$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$



Notas

Exemplo 2

Restrições :

$$7x_1 + x_2 \leq 28$$
$$-x_1 + 3x_2 \leq 7$$
$$-8x_1 - 9x_2 \leq -32$$

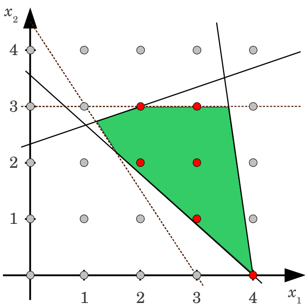
Quais valores de $u_1 ... u_3$ nos oferecem um corte interessante em:

$$\sum_{j=1}^{k} \left\lfloor \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \right\rfloor x_j \leq \left\lfloor \sum_{i=1}^{m} u_i b_i \right\rfloor$$

?

$$u_1 = 0, u_2 = \tfrac{1}{3}, u_3 = \tfrac{1}{3}$$

$$-3x_1 - 2x_2 \leq -9$$
$$u_1 = \tfrac{1}{21}, u_2 = \tfrac{7}{22}, u_3 = 0$$
$$x_2 \leq 3$$



Notas

Cortes de *Chávatal-Gomory*

Exercícios

Considerando as restrições anteriores:

$$7x_1 + x_2 \leq 28$$
$$-x_1 + 3x_2 \leq 7$$
$$-8x_1 - 9x_2 \leq -32$$

1. Encontre valores de u_1, u_2, u_3 que resultam no plano de corte:
$$-x_1 - x_2 \leq -4$$
2. Encontre, se existirem, valores de u_1, u_2, u_3 que resultam na desigualdade[a]:
$$-x_1 \leq -2$$

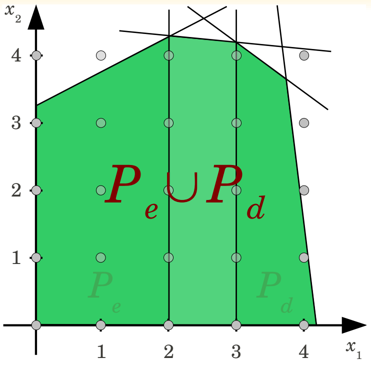
[a]Dica: prepare um sistema de desigualdades com as variáveis u_1, u_2, u_3

Notas

Cortes Disjuntivos

$x_1 \in \mathbb{Z}^+$

Temos que:
$x_1 \leq 2$
OU
$x_1 \geq 3$



Notas

Cortes Disjuntivos: *Lift-and-Project*

Considere uma formulação:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b, 0 \leq x \leq 1\}$$

Com o conjunto de pontos factíveis para variáveis binárias:

$$X = P \cap \mathbb{Z}^n \subset \{0,1\}^n$$

Considere alguma variável binária j. Define-se então:

$$P^0 = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0\}$$
$$P^1 = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 1\}$$

Notas

Lift-and-Project

$$P^0 = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0\}$$
$$P^1 = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 1\}$$

A desigualdade

$$\pi x \leq \pi_0$$

é válida para $conv(P^0 \cup P^1)$ e existir $u_i \in \mathbb{R}^m_+$, $v_i \in \mathbb{R}^n_+$, $w_i \in \mathbb{R}^1_+$ para $i = 0, 1$ tal que:

$$\pi \leq u^0 A + v^0$$

Notas

Cortes da Mochila $\{0,1\}$

$$\sum_{j \in N} a_j x_j \leq b$$

$a_j \geq 0$ para todo j (troque x por $\overline{x}$, se necessário).

Um Conjunto $C \subseteq N$ é uma Cobertura (***Cover***) se:

$$\sum_{j \in C} a_j x_j > b$$

O que define o seguinte **Corte de *Cover***:

$$\sum_{j \in C} a_j x_j \leq |C| - 1$$

Notas

Cortes de *Cover*

Exemplo

Considere a seguinte restrição sobre as variáveis binárias x_j:

$$11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 \leq 19$$

Alguns cortes de cover:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 + x_6 &\leq 2 \\ x_1 + x_5 + x_6 &\leq 2 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\leq 3 \end{aligned}$$

Os cortes acima são cortes de cover *minimais*, no sentido que qualquer variável retirada da restrição descaracteriza a cobertura.

Notas

Cortes de *Cover*: separação

Considere a solução fracionária x^*.

Desigualdades violadas de *Cover* podem ser geradas resolvendo-se o problema DP:

$$DP = \begin{cases} \sigma(x^*) = min \sum_{j \in N} (1 - x_j^*) z_j \\ \sum_{j \in N} a_j z_j > b_k \\ z_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in N \end{cases}$$

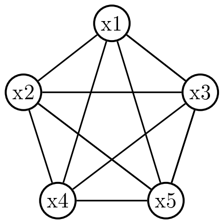
Uma desigualdade válida violada de cover é descoberta quando encontra-se z^* com $\sigma(x^*) < 1$.

Notas

Empacotamento de Nós

Cliques

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 1$$

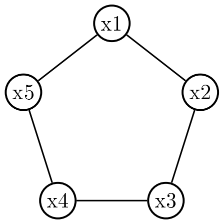


Notas

Empacotamento de Nós

Ciclo Ímpar

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$$

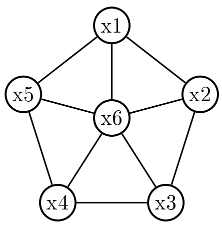


Notas

Empacotamento de Nós

Roda

$$2x_6 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$$



Notas