Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Computação

decom
departamento
de computação

Algoritmos Randomizados

Prof. Haroldo Gambini Santos

Algoritmo Randomizado

- O resultado de um Algoritmo Randomizado depende de:
  - dados de entrada
  - sequência de números (pseudo) randômicos utilizados no algoritmo
- Componente básico, gerador aleatório
  - **random**(a, b) que recebendo dois inteiros a e b retorna algum inteiro $a \leq r \leq b$ com distribuição uniforme
  - assumimos que a função **random** executa em $O(1)$

Probabilidade - Preliminares

- Exemplo: atirar uma moeda e anotar as saídas (**A** cara, **B** coroa)
  - Espaço de amostragem: { AA, AB, BA, BB }
  - Eventos: subconjunto do espaço de amostragem, ex: { AA, AB, BA } (ao menos uma cara)
  - Cada evento tem uma certa probabilidade, no caso, com distribuição uniforme temos que
    - Pr[AA] = Pr[AB] = Pr[BA] = Pr[BB] = ¼
  - Variável aleatória: associa um valor a cada evento. Ex.: X é o número de caras: $X(AA)=2$, $X(AB)=1$, $X(BA)=1$ e $X(BB) = 0$

Probabilidade - Preliminares

- Valor esperado de uma variável aleatória:

$$E[X]=\sum_x x \cdot Pr[X=x]$$

- somando pelos valores possíveis de x, no exemplo para o número de caras:

$$E[X] = 2 \cdot ¼ + 1 \cdot ¼ + 1 \cdot ¼ + 0 \cdot ¼ = 1$$

- Considerando outra var. aleatória, ex:

$Y(AA)=Y(BB)=1$ e $Y(BA)=Y(AB)=0$ então $E[Y]=½$

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] = 3/2$$

Linearidade do Valor Esperado

Probabilidade: Preliminares

- $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$?
  - No caso geral não:
    - $E[X^2]=3/2 \neq 1=E[X]^2$
  - Verdade se **variáveis são independentes**

Desigualdade de *Markov*

- Seja X uma variável aleatória não negativa, a desigualdade de *Markov* nos dá um limite para que o valor real de X seja t vezes maior que seu valor esperado:

  então, para qualquer $t > 0$ temos que:

$$\mu = E[X]$$

$$Pr[X > t \cdot \mu] \leq 1/t$$

Experimento de Bernoulli

- Experimento com 2 resultados possíveis:
  - Sucesso ou
  - Falha
- Se a probabilidade de sucesso é ***p*** então o número de experimentos realizados até que se obtenha sucesso é **1/*p***

Experimento de *Poisson*

- Também com 2 resultados possíveis mas com variações na probabilidade de sucesso
- Resultado: para n experimentos de Poisson, considere X_i o resultado do i-ésimo experimento e $p_i=Pr[X_i=1]$, sendo que $0<p_i<1$
- Seja: $X=\sum_{i}^{n} X_i$ e $\mu=E[X]=\sum_{i=1}^{n} p_i$

  o nr. esperado de experimentos de sucesso então:

$$Pr[X>(1+\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu}$$

de modo que a probabilidade de desvio do valor esperado diminui exponencialmente. Ex.: para $\delta=2$ temos que $e^{\delta}/(1+\delta)^{1+\delta} \leq 1/2$ então:

$$Pr[X>3\mu] \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu}$$

Mediana Aproximada Randomizada

- Seja S um conjunto de números, assumindo, por simplicidade, que todos são distintos. O **posto** de um número $x \in S$ é 1 mais o número de elementos em S que são menores que x :

$$posto(x) = 1 + |\{y \in S : y<x\}|$$

- A mediana é um número de posto $\lfloor(n+1)/2\rfloor$ ou $\lceil(n+1)/2\rceil$
- Em muitas aplicações não precisamos da mediana exata, um valor próximo seria suficiente
- Uma mediana δ-aproximada é um elemento de posto k com:

$$\lfloor(½-\delta)(n+1)\rfloor \le k \le \lceil(½+\delta)(n+1)\rceil$$

para alguma constante $0 \le \delta \le ½$

Algoritmo Mediana Aprox. - versão 1

Algorithm *ApproxMedian1*(δ,A)

1. ⊳ A é um vetor $A[1,\ldots,n]$ de nrs. distintos
2. $r \leftarrow random(1,n)$
3. $x^* \leftarrow A[r]$; $k \leftarrow 1$;
4. **for** i ← 1 to n
5.   **if** $A[i]<x^*$ **then** $k \leftarrow k+1$
6. **if** $\lfloor(½-\delta)(n+1)\rfloor \le k \le \lceil(½+\delta)(n+1)\rceil$ then
7.   **return** x^*
8. **else**
9.   **return** error

ApproxMedian1

- Roda em $O(n)$
- Nem sempre tem sucesso
- Algoritmo tem sucesso quando um dos :

$$\lfloor(½+\delta)(n+1)\rfloor - \lceil(½-\delta)(n+1)\rceil+1$$

possíveis valores para a δ-mediana é selecionado. Uma vez que o valor r é selecionado de modo aleatório uniforme, isso acontece com probabilidade:

$$\frac{\lceil(\frac{1}{2}+\delta)\cdot(n+1)\rceil-\lfloor(\frac{1}{2}-\delta)\cdot(n+1)\rfloor+1}{n} \approx 2\cdot\delta$$

Monte Carlo

- O algoritmo anterior é denominado **Algoritmo de Monte Carlo**: nem sempre dá uma resposta correta, mas tem um tempo de execução bem definido
- Pode ser executado repetidamente até que se encontre a Mediana (**Algoritmo de Las Vegas**), nesse caso, a resposta sempre será correta mas o tempo de execução esperado varia em função de δ