Programação de Horários em Instituições Educacionais: Formulações e Algoritmos

SBPO 2007 - Minicurso - Parte II

Haroldo Gambini Santos e Marcone Jamilson Freitas Souza

29 de agosto de 2007

Conteúdo

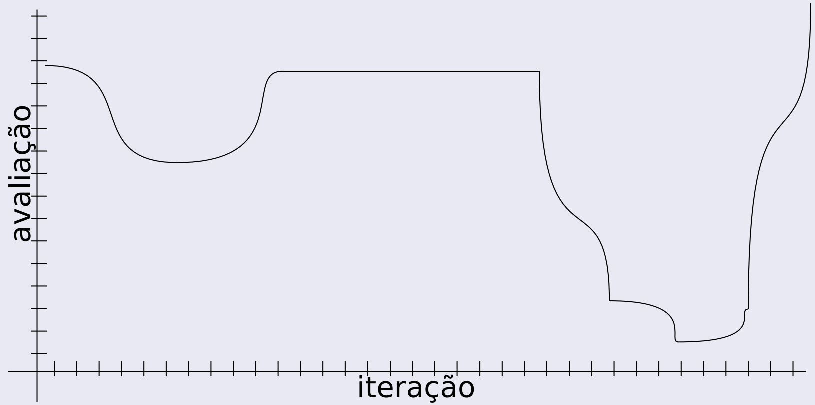
1. Metaheurísticas
   - Busca Tabu
2. Procurando por Quadros de Horários Ótimos
   - Melhorando $\mathcal{F}_1$ - Cortes
   - Formulação Estendida com Geração de Colunas e Cortes - $\mathcal{F}_2$
3. Métodos Híbridos
4. Conclusões e Trabalhos Futuros

Definição de Voss

*Uma **metaheurística** é um processo mestre iterativo que guia e modifica operações de heurísticas subordinadas para a produção de uma solução de alta qualidade. Este processo pode manipular uma (ou múltiplas soluções completas (ou incompletas) a cada iteração. As heurísticas subordinadas podem ser procedimentos de alto (ou baixo) nível, ou uma busca local simples ou simplesmente um método de construção.*

Ótimos Locais e Globais

Variação do Custo da Solução em Função da Realização de Movimentos



A Metaheurística Busca Tabu

- Proposta independentemente por Fred Glover (1986) e Pierre Hansen (1986)
- Faz uso explícito de estruturas de **memória** para guiar um método de descida
- Utiliza memórias de **Curto** e **Longo** prazo para guiar:
  - **Intensificação**
  - **Diversificação**

A Metaheurística Busca Tabu

- Proposta independentemente por Fred Glover (1986) e Pierre Hansen (1986)
- Faz uso explícito de estruturas de **memória** para guiar um método de descida
- Utiliza memórias de **Curto** e **Longo** prazo para guiar:
    - **Intensificação**
    - **Diversificação**

A Metaheurística Busca Tabu

- Proposta independentemente por Fred Glover (1986) e Pierre Hansen (1986)
- Faz uso explícito de estruturas de **memória** para guiar um método de descida
- Utiliza memórias de **Curto** e **Longo** prazo para guiar:
  - **Intensificação**
  - **Diversificação**

Busca Tabu- Implementação Básica

```
Entrada: s^0 // solução inicial
Saída: s* // melhor solução encontrada
s ← s^0;
s* ← s^0;
enquanto (Critério de parada não satisfeito) faça
    Dada uma função de vizinhança N, lista tabu T e um critério de
    aspiração encontre a melhor solução admissível s' ∈ N(s);
    s ← s^0;
    insira a solução s (ou um atributo, ex.: movimento realizado) na lista
    tabu T;
    se f(s) < f(s*) então
        s* ← s;
    fim
    atualize a lista tabu T;
fim
```

Implementações Prévias de Busca Tabu para o PPTC e Relacionados

- Colorni et al. (1998)
  - Implementação simples concorre com AG sofisticado
- Souza et al. (2003). `GBT-II`
  - Melhores versões híbridas sempre incorporam BT
  - Alg. construtivo GRASP para diversificação
  - Alg. especializado de melhoramento: "Intraturmas-Interturmas"
- Costa, D. (1994) e Schaerf, A. (1999)
  - Variação dinâmica nos pesos da f.o.

Componente não considerado: **Memória de Longo Prazo**

Implementações Prévias de Busca Tabu para o PPTC e Relacionados

- Colorni et al. (1998)
  - Implementação simples concorre com AG sofisticado
- Souza et al. (2003). `GBT-II`
  - Melhores versões híbridas sempre incorporam BT
  - Alg. construtivo GRASP para diversificação
  - Alg. especializado de melhoramento: "Intraturmas-Interturmas"
- Costa, D. (1994) e Schaerf, A. (1999)
  - Variação dinâmica nos pesos da f.o.

Componente não considerado: **Memória de Longo Prazo**

Implementações Prévias de Busca Tabu para o PPTC e Relacionados

- Colorni et al. (1998)
  - Implementação simples concorre com AG sofisticado
- Souza et al. (2003). `GBT-II`
  - Melhores versões híbridas sempre incorporam BT
  - Alg. construtivo GRASP para diversificação
  - Alg. especializado de melhoramento: "Intraturmas-Interturmas"
- Costa, D. (1994) e Schaerf, A. (1999)
  - Variação dinâmica nos pesos da f.o.

Componente não considerado: **Memória de Longo Prazo**

Implementações Prévias de Busca Tabu para o PPTC e Relacionados

- Colorni et al. (1998)
  - Implementação simples concorre com AG sofisticado
- Souza et al. (2003). `GBT-II`
  - Melhores versões híbridas sempre incorporam BT
  - Alg. construtivo GRASP para diversificação
  - Alg. especializado de melhoramento: "Intraturmas-Interturmas"
- Costa, D. (1994) e Schaerf, A. (1999)
  - Variação dinâmica nos pesos da f.o.

Componente não considerado: **Memória de Longo Prazo**

A heurística proposta

Representação da solução e espaço de busca

Período / Prof.	1	2	3	4	5	...	*dias* x *períodos*
1	3	X	4	0	1	...	...
2	X	1	2	4	X	...	...
3	0	3	0	1	X	...	...
4	3	2	X	2	4	...	...
5	1	X	4	1	0	...	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Legenda: **X** Indisponível **0** Disponível **> 0** Alocado

- Considera-se soluções inviáveis
  - Conflitos - peso ω, excesso de aulas diárias - peso δ
  - $\omega > \delta \gg \max\{w'_p, w''_p, w'''_p\} \forall p \in P$

A heurística proposta

Representação da solução e espaço de busca

Prof. \ Período	1	2	3	4	5	...	*dias* x *períodos*
1	3	X	4	0	1	...	...
2	X	1	2	4	X	...	...
3	0	3	0	1	X	...	...
4	3	2	X	2	4	...	...
5	1	X	4	1	0	...	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Legenda: **X** Indisponível **0** Disponível **> 0** Alocado

- Considera-se soluções inviáveis
  - Conflitos - peso ω, excesso de aulas diárias - peso δ
  - $\omega > \delta \gg \max\{w'_p, w''_p, w'''_p\} \forall p \in P$

Algoritmo Construtivo - CGA-PPTC

- Aulas **mais urgentes** nos períodos **mais apropriados**
- Seleção do Professor × Turma
  - Grau de urgência
  - Lista restrita de candidatos
- Seleção do Período
  - Probabilidade de um período ser selecionado é inversamente proporcional a sua restritividade

Vizinhança

Prof. \ Período	1	2	3	4	5	...	*dias* x *períodos*
1	3	X	4	0	1	...	...
2	X	1	2	4	X	...	...
3	0	3	0	1	X	...	...
4	3	2	X	2	4	...	...
5	1	X	4	1	0	...	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Prof. \ Período	1	2	3	4	5	...	*dias* x *períodos*
1	3	X	4	0	1	...	...
2	X	[illegible]	2	1	X	...	...
3	0	3	0	1	X	...	...
4	3	2	X	[illegible]	4	...	...
5	1	X	4	1	0	...	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Vizinhança

Prof. \ Período	1	2	3	4	5	...	*dias* x *períodos*
1	3	X	4	0	1	...	...
2	X	1	2	4	X	...	...
3	0	1	0	3	X	...	...
4	3	2	X	2	4	...	...
5	1	X	4	1	0	...	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Componentes do Método de Busca Tabu Proposto

Memória de Curto Prazo

- Atributos do movimento $(\langle p \in P, d_1 \in D, h_1 \in H, d_2 \in D, h_2 \in H \rangle)$
- Tempo de armazenamento (iterações) $random(\lfloor validTabu - \varphi \times validTabu \rfloor, \lceil validTabu + \varphi \times validTabu \rceil)$

Critério de Aspiração

- Melhora com relação à melhor solução conhecida

Componentes do Método de Busca Tabu Proposto

Memória de Curto Prazo

- Atributos do movimento $(\langle p \in P, d_1 \in D, h_1 \in H, d_2 \in D, h_2 \in H \rangle)$
- Tempo de armazenamento (iterações)
  $random(\lfloor validTabu - \varphi \times validTabu \rfloor, \lceil validTabu + \varphi \times validTabu \rceil)$

Critério de Aspiração

- Melhora com relação à melhor solução conhecida

Componentes do Método de Busca Tabu Proposto

Diversificação Informada

- Ativada quando o “entrincheiramento local” é detectado
- Aplicação de movimentos “influentes” (não aleatórios)
- Incorporação de penalidades na avaliação dos movimentos

Memória de Longo Prazo - Transição

- Armazenada em $\acute{M}_{|P|\times|T|}$
  - $\acute{m}_{pt}$ número de movimentos realizados envolvendo aulas do professor p com a turma t

$$\acute{t}_{pt} = \frac{\acute{m}_{pt}}{max\{\acute{m}_{pt}|p \in P, t \in T\}}$$

$$\acute{p}_{pa_1a_2} = \begin{cases} \acute{t}_{pa_1} \times f(Q) & \text{se } a_1 \neq 0 \text{ e } a_2 = 0 \\ \acute{t}_{pa_2} \times f(Q) & \text{se } a_1 = 0 \text{ e } a_2 \neq 0 \\ (\acute{t}_{pa_1} + \acute{t}_{pa_2})/2 \times f(Q) & \text{se } a_1 \neq 0 \text{ e } a_2 \neq 0 \end{cases}$$

Componentes do Método de Busca Tabu Proposto

Memória de Longo Prazo - Transição

- Armazenada em $\acute{M}_{|P|\times|T|}$
  - $\acute{m}_{pt}$ número de movimentos realizados envolvendo aulas do professor p com a turma t

$$\acute{t}_{pt} = \frac{\acute{m}_{pt}}{max\{\acute{m}_{pt}|p \in P, t \in T\}}$$

$$\acute{p}_{pa_1a_2} = \begin{cases} \acute{t}_{pa_1} \times f(Q) & \text{se } a_1 \neq 0 \text{ e } a_2 = 0 \\ \acute{t}_{pa_2} \times f(Q) & \text{se } a_1 = 0 \text{ e } a_2 \neq 0 \\ (\acute{t}_{pa_1} + \acute{t}_{pa_2})/2 \times f(Q) & \text{se } a_1 \neq 0 \text{ e } a_2 \neq 0 \end{cases}$$

Memória de Longo Prazo - Transição

- Armazenada em $\acute{M}_{|P|\times|T|}$
  - $\acute{m}_{pt}$ número de movimentos realizados envolvendo aulas do professor p com a turma t

$$\acute{t}_{pt} = \frac{\acute{m}_{pt}}{max\{\acute{m}_{pt}|p \in P, t \in T\}}$$

$$\acute{p}_{pa_1a_2} = \begin{cases} \acute{t}_{pa_1} \times f(Q) & \text{se } a_1 \neq 0 \text{ e } a_2 = 0 \\ \acute{t}_{pa_2} \times f(Q) & \text{se } a_1 = 0 \text{ e } a_2 \neq 0 \\ (\acute{t}_{pa_1} + \acute{t}_{pa_2})/2 \times f(Q) & \text{se } a_1 \neq 0 \text{ e } a_2 \neq 0 \end{cases}$$

Componentes do Método de Busca Tabu Proposto

Memória de Longo Prazo - Residência

- Baseada em residência $\grave{M}_{|P|\times|T|\times|D|\times|H|}$
  - $\grave{m}_{ptdh}$: quantas iterações no decorrer da busca contaram com alguma aula do professor p para a turma t no dia d no período h

$$\grave{r}_{ptdh} = \frac{\grave{m}_{ptdh}}{max\{\grave{m}_{ptdh}|p \in P, t \in T, d \in D, h \in H\}}$$

$$\grave{p}_{ptdh} = \grave{r}_{ptdh} \times f(Q)$$

Componentes do Método de Busca Tabu Proposto

Memória de Longo Prazo - Residência

- Baseada em residência $\grave{M}_{|P|\times|T|\times|D|\times|H|}$
  - $\grave{m}_{ptdh}$: quantas iterações no decorrer da busca contaram com alguma aula do professor p para a turma t no dia d no período h

$$\grave{r}_{ptdh} = \frac{\grave{m}_{ptdh}}{max\{\grave{m}_{ptdh} | p \in P, t \in T, d \in D, h \in H\}}$$

$$\grave{p}_{ptdh} = \grave{r}_{ptdh} \times f(Q)$$

Componentes do Método de Busca Tabu Proposto

Memória de Longo Prazo - Residência

- Baseada em residência $\grave{M}_{|P|\times|T|\times|D|\times|H|}$
  - $\grave{m}_{ptdh}$: quantas iterações no decorrer da busca contaram com alguma aula do professor p para a turma t no dia d no período h

$$\grave{r}_{ptdh} = \frac{\grave{m}_{ptdh}}{max\{\grave{m}_{ptdh}|p \in P, t \in T, d \in D, h \in H\}}$$

$$\grave{p}_{ptdh} = \grave{r}_{ptdh} \times f(Q)$$

Componentes do Método de Busca Tabu Proposto

Memória de Longo Prazo - Residência

- Baseada em residência $\grave{M}_{|P| \times |T| \times |D| \times |H|}$
  - $\grave{m}_{ptdh}$: quantas iterações no decorrer da busca contaram com alguma aula do professor p para a turma t no dia d no período h

$$\grave{r}_{ptdh} = \frac{\grave{m}_{ptdh}}{max\{\grave{m}_{ptdh} | p \in P, t \in T, d \in D, h \in H\}}$$

$$\grave{p}_{ptdh} = \grave{r}_{ptdh} \times f(Q)$$

O conjunto de instâncias teste

Inst.	$\|P\|$	$\|T\|$	Total de Aulas	Aulas Geminadas	Taxa de Esparsidade (e)	V. Bin.
1	8	3	75	21	0,43	420
2	14	6	150	29	0,50	1460
3	16	8	200	4	0,30	1380
4	23	12	300	66	0,18	2471
5	31	13	325	71	0,58	2975
6	30	14	350	63	0,52	3455
7	33	20	500	84	0,39	5125

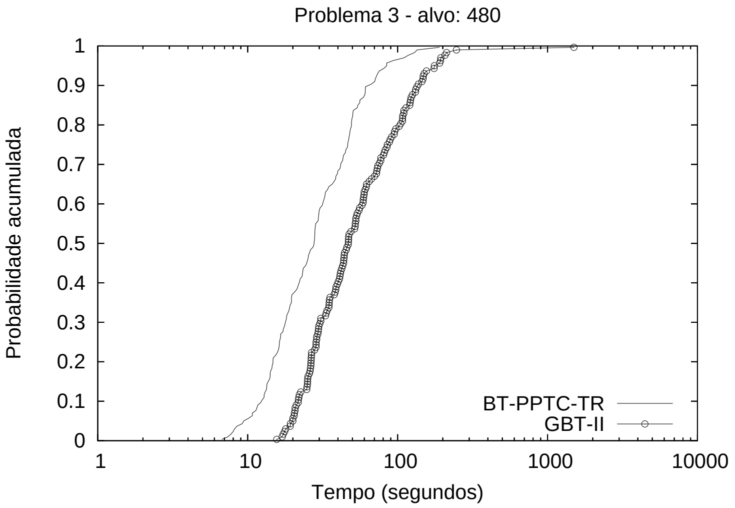
Resultados

Custos médios das soluções produzidas

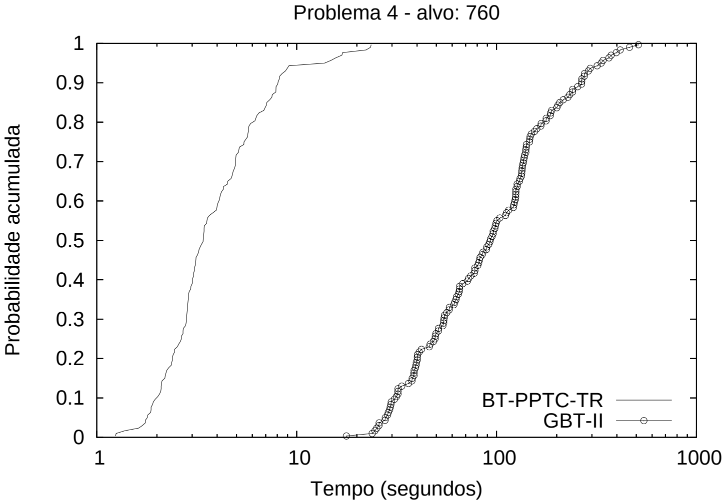
Inst.	GBT-II	BT-PPTC-S	BT-PPTC-T	BT-PPTC-R	BT-PPTC-TR
1	204,80	205,30	203,40	**203,00**	203,20
2	350,10	349,20	**343,30**	344,40	344,20
3	455,70	440,90	**438,90**	439,50	440,10
4	686,30	670,50	671,30	670,30	**668,90**
5	796,30	782,70	780,90	**779,20**	779,60
6	799,10	781,50	780,70	782,20	**779,80**
7	1.076,20	1.063,80	**1.055,20**	1.061,90	1.055,60

10 exec., tempos fixos: {90, 280, 380, 870, 1930, 1650, 2650}
AMD Athlon XP 1800+

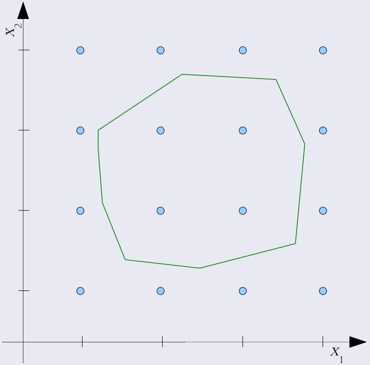
Distribuição Empírica de Probabilidade de se Atingir um Custo Alvo em Função do Tempo



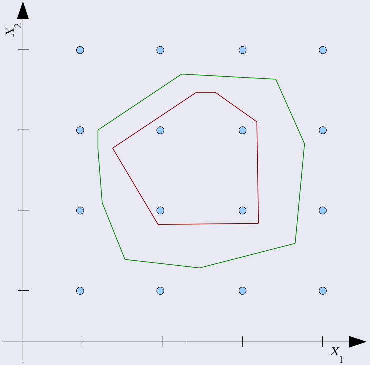
Distribuição Empírica de Probabilidade de se Atingir um Custo Alvo em Função do Tempo



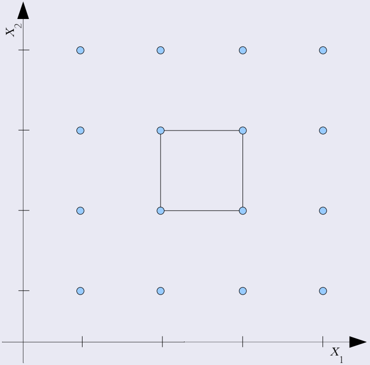
Formulações



Formulações



Formulações



Formulações

- O método de *Branch and Bound* poda a árvore utilizando dois limites
  - Limite Inferior - $\mathcal{LI}$
  - Limite Superior - $\mathcal{LS}$
- $\mathcal{LI}$: obtido resolvendo-se a relaxação linear
- $\mathcal{LS}$: obtido através de heurísticas

Formulações

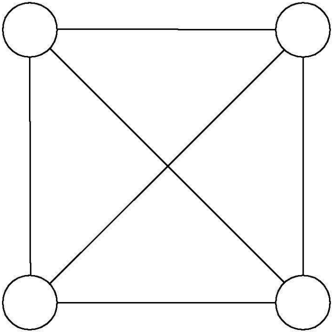
- O método de *Branch and Bound* poda a árvore utilizando dois limites
  - Limite Inferior - $\mathcal{LI}$
  - Limite Superior - $\mathcal{LS}$
- $\mathcal{LI}$: obtido resolvendo-se a relaxação linear
- $\mathcal{LS}$: obtido através de heurísticas

Formulações

- O método de *Branch and Bound* poda a árvore utilizando dois limites
  - Limite Inferior - $\mathcal{LI}$
  - Limite Superior - $\mathcal{LS}$
- $\mathcal{LI}$: obtido resolvendo-se a relaxação linear
- $\mathcal{LS}$: obtido através de heurísticas

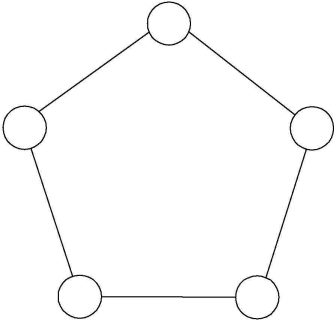
Proximidade de $\mathcal{LI}$ e $\mathcal{LS}$: chave para resolver PLIM difíceis.

Reformulação Automática - Cortes de Clique



$$\sum_{k \in K} x_k \leq 1$$

Reformulação Automática - Cortes *Odd-Hole*



$$\sum_{w \in W} x_w \leq \frac{|W| - 1}{2}$$

Melhorando $\mathcal{F}_1$ - Cortes

Aulas Duplas

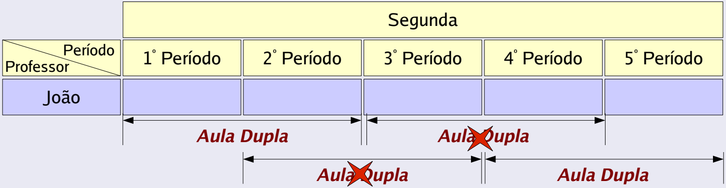
Professor \ Período	1° Período	2° Período	3° Período	4° Período	5° Período
	Segunda				
João					

Aula Dupla *Aula Dupla*

Aula Dupla *Aula Dupla*

Melhorando $\mathcal{F}_1$ - Cortes

Aulas Duplas



Melhorando $\mathcal{F}_1$ - Cortes

Aulas Duplas

$$\sum_{t \in T} \sum_{h \in \{h_1, \ldots, h_2 - 1\}} y_{ptdh} \leq v_{pd} \left\lfloor \frac{h_2 - h_1 + 1}{2} \right\rfloor$$

$$\forall p \in P, d \in D, h_1 \in H, h_2 \in H, h_2 > h_1 \mid \tilde{p}_{pdh} = 1 \; \forall \; h \in \{h_1, \ldots, h_2\}$$

$$\sum_{p \in P} \sum_{h \in \{h_1, \ldots, h_2 - 1\}} y_{ptdh} \leq \left\lfloor \frac{h_2 - h_1 + 1}{2} \right\rfloor$$

$$\forall t \in T, d \in D, h_1 \in H, h_2 \in H, h_2 > h_1$$

Melhorando $\mathcal{F}_1$ - Cortes

Aulas Duplas

$$\sum_{t \in T} \sum_{h \in \{h_1, \ldots, h_2 - 1\}} y_{ptdh} \leq v_{pd} \left\lfloor \frac{h_2 - h_1 + 1}{2} \right\rfloor$$

$$\forall p \in P, d \in D, h_1 \in H, h_2 \in H, h_2 > h_1 \mid \tilde{p}_{pdh} = 1 \; \forall \; h \in \{h_1, \ldots, h_2\}$$

$$\sum_{p \in P} \sum_{h \in \{h_1, \ldots, h_2 - 1\}} y_{ptdh} \leq \left\lfloor \frac{h_2 - h_1 + 1}{2} \right\rfloor$$

$$\forall t \in T, d \in D, h_1 \in H, h_2 \in H, h_2 > h_1$$

Melhorando $\mathcal{F}_1$ - Cortes

Mínimo de Dias Letivos para Professores

$$\sum_{d \in D} v_{pd} \geq \max \left\{ \left\lceil \frac{\sum_{t \in T} \tilde{r}_{pt}}{|H|} \right\rceil, \max_{t \in T} \left\lceil \frac{\tilde{r}_{pt}}{\tilde{m}_{pt}} \right\rceil \right\} \;\; \forall p \in P$$

$$\tilde{m}_{pt}.v_{pd} \geq \sum_{h \in H} x_{ptdh} \;\; \forall p \in P, t \in T, d \in D$$

Melhorando $\mathcal{F}_1$ - Cortes

Mínimo de Dias Letivos para Professores

$$\sum_{d \in D} v_{pd} \geq \max\left\{ \left\lceil \frac{\sum_{t \in T} \tilde{r}_{pt}}{|H|} \right\rceil, \max_{t \in T} \left\lceil \frac{\tilde{r}_{pt}}{\tilde{m}_{pt}} \right\rceil \right\} \quad \forall p \in P$$

$$\tilde{m}_{pt}.v_{pd} \geq \sum_{h \in H} x_{ptdh} \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D$$

Experimentos Computacionais

Formulação $\mathcal{F}_1$ com e sem cortes

inst.	$\mathcal{F}_{1,0}$			$\mathcal{F}_{1,4}$			
	$\mathcal{LI}$	*gap*(%)	t.cpu(s)	$\mathcal{LI}$	*gap*(%)	t.cpu(s)	$\mathcal{LS}$
1	135,0	49,6	0,2	**189,0**	**6,9**	0,5	**202**
2	270,0	23,3	1,2	**333,0**	**0,0**	5,3	**333**
3	360,0	17,5	0,5	**414,0**	**2,2**	1,7	**423**
4	600,0	8,8	3,1	**643,0**	**1,6**	7,8	**653**
5	585,0	30,9	6,4	**756,0**	**1,3**	47,0	**766**
6	630,0	20,6	8,0	**738,0**	**3,0**	53,0	**760**
7	900,0	14,3	23,7	**999,0**	**3,0**	160,0	**1.029**

CPLEX 10.0 - Dell Optiplex G620, D 3.0Ghz, 2GB de memória RAM

$\mathcal{LS}$ - melhor solução obtida heuristicamente, execuções longas.

Formulação $\mathcal{F}_2$

Considere

$\breve{P}_{pd}$: Conjunto de padrões de alocação possíveis para o professor p em um dia d

$$\lambda_{pjd} = \begin{cases} 1 & \text{professor } p \text{ lecionando no dia } d \text{ com o padrão de alocação } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Considere

$\breve{P}_{pd}$: Conjunto de padrões de alocação possíveis para o professor p em um dia d

$$\lambda_{pjd} = \begin{cases} 1 & \text{professor } p \text{ lecionando no dia } d \text{ com o padrão de alocação } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Formulação $\mathcal{F}_2$

Minimize:

$$\sum_{p \in P} \sum_{d \in D} \sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \lambda_{pjd} . c_{pj} \quad + \quad \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} w_p^{'''} . g_{pt}$$

Custo de buracos e de alguma atividade diária

Formulação $\mathcal{F}_2$

Minimize:

$$\sum_{p \in P} \sum_{d \in D} \sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \lambda_{pjd} . c_{pj} \quad + \quad \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} w_p''' . g_{pt}$$

Custo de não alocação de aulas duplas

Formulação $\mathcal{F}_2$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \lambda_{pjd} = 1 \quad \forall p \in P, d \in D \tag{1}$$

$$\sum_{p \in P} \sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \lambda_{pjd}.\breve{x}_{pjth} \leq 1 \quad \forall t \in T, d \in D, h \in H \tag{2}$$

$$\sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \sum_{d \in D} \sum_{h \in D} \lambda_{pjd}.\breve{x}_{pjth} = \tilde{r}_{pt} \quad \forall p \in P, t \in T \tag{3}$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \lambda_{pjd}.\breve{g}_{pjt} + g_{pt} \geq \tilde{g}_{pt} \quad \forall p \in P, t \in T \tag{4}$$

Formulação $\mathcal{F}_2$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \lambda_{pjd} = 1 \quad \forall p \in P, d \in D \tag{1}$$

$$\sum_{p \in P} \sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \lambda_{pjd} . \breve{x}_{pjth} \leq 1 \quad \forall t \in T, d \in D, h \in H \tag{2}$$

$$\sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \sum_{d \in D} \sum_{h \in D} \lambda_{pjd} . \breve{x}_{pjth} = \tilde{r}_{pt} \quad \forall p \in P, t \in T \tag{3}$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \lambda_{pjd} . \breve{g}_{pjt} + g_{pt} \geq \tilde{g}_{pt} \quad \forall p \in P, t \in T \tag{4}$$

Formulação $\mathcal{F}_2$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \lambda_{pjd} = 1 \quad \forall p \in P, d \in D \qquad (1)$$

$$\sum_{p \in P} \sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \lambda_{pjd} . \breve{x}_{pjth} \leq 1 \quad \forall t \in T, d \in D, h \in H \qquad (2)$$

$$\sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \sum_{d \in D} \sum_{h \in D} \lambda_{pjd} . \breve{x}_{pjth} = \tilde{r}_{pt} \quad \forall p \in P, t \in T \qquad (3)$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \lambda_{pjd} . \breve{g}_{pjt} + g_{pt} \geq \tilde{g}_{pt} \quad \forall p \in P, t \in T \qquad (4)$$

Formulação $\mathcal{F}_2$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \lambda_{pjd} = 1 \quad \forall p \in P, d \in D \tag{1}$$

$$\sum_{p \in P} \sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \lambda_{pjd} . \breve{x}_{pjth} \leq 1 \quad \forall t \in T, d \in D, h \in H \tag{2}$$

$$\sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \sum_{d \in D} \sum_{h \in D} \lambda_{pjd} . \breve{x}_{pjth} = \tilde{r}_{pt} \quad \forall p \in P, t \in T \tag{3}$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{j \in \breve{P}_{pd}} \lambda_{pjd} . \breve{g}_{pjt} + g_{pt} \geq \tilde{g}_{pt} \quad \forall p \in P, t \in T \tag{4}$$

Formulação $\mathcal{F}_2$

Geração de Colunas

- Utilização explícita de $\mathcal{F}_2$ impossível[a], exceto para as 2 menores instâncias
- Geração de Colunas: Resolve-se a relaxação linear e a cada iteração somente colunas promissoras são inseridas.

[a] 2 GB RAM

Formulação $\mathcal{F}_2$

Geração de Colunas

- Utilização explícita de $\mathcal{F}_2$ impossível[a], exceto para as 2 menores instâncias
- Geração de Colunas: Resolve-se a relaxação linear e a cada iteração somente colunas promissoras são inseridas.

[a] 2 GB RAM

O Problema de *Pricing*

$$
\mathcal{P}_{pd} = \left\{
\begin{array}{rcl}
\textit{minimizar} & & \bar{c}_{pd} = \breve{c}_{pd} - \breve{d}_{pd} \\
\textit{sujeito a} & & \\
\sum_{h \in H} \breve{x}_{th} & \leq & \min\{\tilde{m}_{pt}, \tilde{r}_{pt}\} \quad \forall t \in T \\
\breve{c}_{pd} & = & \breve{b}.w_p^{'} + \breve{v}.w_p^{''} \\
\breve{d}_{pd} & = & \mu_{pd} + \sum_{t \in T} \sum_{h \in H} \nu_{tdh}.\breve{x}_{th} + \sum_{t \in T} \sum_{h \in H} .\pi_{pt}.\breve{x}_{th} + \sum_{t \in T} \sum_{h \in \widehat{G}_{pd}} \breve{y}_{th}.\kappa_{pt} \\
\overline{a} & \leq & \sum_{t \in T} (+h - |H|).\breve{x}_{th} + |H| \quad \forall h \in H \\
\underline{a} & \geq & \sum_{t \in T} h.\breve{x}_{th} \quad \forall h \in H \\
\breve{b} & = & 1 + \underline{a} - \overline{a} - \sum_{t \in T} \sum_{h \in H} \breve{x}_{th} \\
\sum_{t \in T} \breve{x}_{th} & \leq & \tilde{p}_{pdh}.\breve{v} \quad h \in H \\
\breve{y}_{th} & \leq & \breve{x}_{th} \quad \forall t \in T, h \in \widehat{G}_{pd} \\
\breve{y}_{th} & \leq & \breve{x}_{th+1} \quad \forall t \in T, h \in \widehat{G}_{pd} \\
\breve{y}_{th} & \geq & \breve{x}_{th} + \breve{x}_{th+1} - 1 \quad \forall t \in T, h \in \widehat{G}_{pd} \\
\breve{x}_{th} \in \{0,1\} & & \forall t \in T, h \in H \\
\breve{y}_{th} \in \{0,1\} & & \forall t \in T, H \in \widehat{G}_{pd} \\
\breve{v} \in \{0,1\} & & \\
\overline{a} \in I\!N & & \\
\underline{a} \in I\!N & & \\
\breve{b} \in I\!N & &
\end{array}
\right.
$$

O Problema de *Pricing*

Resolvendo $\mathcal{P}_{pd}$

- Problema de Programação Linear Inteira Mista

$$|\mathcal{P}_{pd}| \leq (|T| + 1)^{|H|}$$

- Enumerável em tempo polinomial se $|H|$ for constante !

O Problema de *Pricing*

Resolvendo $\mathcal{P}_{pd}$

- Problema de Programação Linear Inteira Mista

$$|\mathcal{P}_{pd}| \leq (|T| + 1)^{|H|}$$

- Enumerável em tempo polinomial se $|H|$ for constante !

O Problema de *Pricing*

Resolvendo $\mathcal{P}_{pd}$

👎 Problema de Programação Linear Inteira Mista

$$|\mathcal{P}_{pd}| \leq (|T| + 1)^{|H|}$$

👍 Enumerável em tempo polinomial se $|H|$ for constante !

Resultados da Formulação com Geração de Colunas

Limites inferiores e superiores e tempo computacional

inst.	$\mathcal{F}_{1,4}$			$\mathcal{F}_2^*$			$\mathcal{LS}$
	$\mathcal{LI}$	*gap*(%)	t.cpu(s)	$\mathcal{LI}$	*gap*(%)	t.cpu(s)	
1	189,0	6,9	0,5	**196,8**	2,7	0,3	**202**
2	**333,0**	**0,0**	5,3	**333,0**	**0,0**	10,2	**333**
3	414,0	2,2	1,7	**419,3**	0,9	8,8	**423**
4	643,0	1,6	7,8	643,0	1,6	110,6	**653**
5	756,0	1,3	47,0	756,0	1,3	93,9	**766**
6	738,0	3,0	53,0	738,0	3,0	119,8	**760**
7	999,0	3,0	160,0	999,0	3,0	321,5	**1.029**

CPLEX 10.0 - Dell Optiplex G620, D 3.0Ghz, 2GB de memória RAM

$\mathcal{F}_2^*$ - Formulação $\mathcal{F}_2$ com a adição do corte M.D.T.P.

Formulação $\mathcal{F}_2$

Variáveis adicionais

$$\breve{a}_{pdh} = \begin{cases} 1 & \text{professor } p \text{ lecionando no dia } d \text{ exatamente } h \text{ aulas} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\sum_{h \in \{0,\ldots,|H|\}} \breve{a}_{pdh} = 1 \quad \forall p \in P, d \in D \tag{1}$$

$$\sum_{j \in \breve{P}_{pdh}} \lambda_{pjd} = \breve{a}_{pdh} \quad \forall p \in P, d \in D, h \in H \tag{2}$$

$$\sum_{h \in \{0,\ldots,|H|\}} \breve{a}_{ptdh} = 1 \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D \tag{3}$$

$$\sum_{j \in \breve{P}_{ptdh}} \lambda_{pjd} = \breve{a}_{ptdh} \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D, h \in H \tag{4}$$

$$\breve{a}_{ptdh} \in \{0,1\} \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D, h \in H \tag{5}$$

Formulação $\mathcal{F}_2$

Variáveis adicionais

$$\breve{a}_{pdh} = \begin{cases} 1 & \text{professor } p \text{ lecionando no dia } d \text{ exatamente } h \text{ aulas} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\sum_{h \in \{0,\ldots,|H|\}} \breve{a}_{pdh} = 1 \quad \forall p \in P, d \in D \tag{1}$$

$$\sum_{j \in \breve{P}_{pdh}} \lambda_{pjd} = \breve{a}_{pdh} \quad \forall p \in P, d \in D, h \in H \tag{2}$$

$$\sum_{h \in \{0,\ldots,|H|\}} \breve{a}_{ptdh} = 1 \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D \tag{3}$$

$$\sum_{j \in \breve{P}_{ptdh}} \lambda_{pjd} = \breve{a}_{ptdh} \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D, h \in H \tag{4}$$

$$\breve{a}_{ptdh} \in \{0, 1\} \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D, h \in H \tag{5}$$

Variáveis adicionais

$$\breve{a}_{pdh} = \begin{cases} 1 & \text{professor } p \text{ lecionando no dia } d \text{ exatamente } h \text{ aulas} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\sum_{h \in \{0,\ldots,|H|\}} \breve{a}_{pdh} = 1 \quad \forall p \in P, d \in D \tag{1}$$

$$\sum_{j \in \breve{P}_{pdh}} \lambda_{pjd} = \breve{a}_{pdh} \quad \forall p \in P, d \in D, h \in H \tag{2}$$

$$\sum_{h \in \{0,\ldots,|H|\}} \breve{a}_{ptdh} = 1 \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D \tag{3}$$

$$\sum_{j \in \breve{P}_{ptdh}} \lambda_{pjd} = \breve{a}_{ptdh} \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D, h \in H \tag{4}$$

$$\breve{a}_{ptdh} \in \{0, 1\} \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D, h \in H \tag{5}$$

Variáveis adicionais

$$\breve{a}_{pdh} = \begin{cases} 1 & \text{professor } p \text{ lecionando no dia } d \text{ exatamente } h \text{ aulas} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\sum_{h \in \{0,\dots,|H|\}} \breve{a}_{pdh} = 1 \quad \forall p \in P, d \in D \tag{1}$$

$$\sum_{j \in \breve{P}_{pdh}} \lambda_{pjd} = \breve{a}_{pdh} \quad \forall p \in P, d \in D, h \in H \tag{2}$$

$$\sum_{h \in \{0,\dots,|H|\}} \breve{a}_{ptdh} = 1 \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D \tag{3}$$

$$\sum_{j \in \breve{P}_{ptdh}} \lambda_{pjd} = \breve{a}_{ptdh} \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D, h \in H \tag{4}$$

$$\breve{a}_{ptdh} \in \{0, 1\} \quad \forall p \in P, t \in T, d \in D, h \in H \tag{5}$$

Formulação $\mathcal{F}_2$

Restrições implícitas

$$\sum_{h \in H} \sum_{d \in D} h.\breve{a}_{pdh} = \sum_{t \in T} \tilde{r}_{pt} \quad \forall p \in P \tag{6}$$

$$\sum_{h \in H} \sum_{d \in D} h.\breve{a}_{ptdh} = \tilde{r}_{pt} \quad \forall p \in P, t \in T \tag{7}$$

Formulação $\mathcal{F}_2$

Cortes

- Para um professor p considere um conjunto $\dot{C}$:

$$\dot{C} = \{(d_1, h_1), \ldots, (d_{\dot{c}}, h_{\dot{c}})\} \quad | \quad d_i \in D, h_i \in H \forall i \in \{1, \ldots, \dot{c}\}$$

- **Cover**:

$$\sum_{i \in \{1, \ldots, \dot{c}\}} h_i . \breve{a}_{p d_i h_i} \quad > \quad \sum_{t \in T} \tilde{r}_{pt}$$

- Desigualdade válida:

$$\sum_{i \in \{1, \ldots, \dot{c}\}} \breve{a}_{p d_i h_i} \quad \leq \quad \dot{c} - 1$$

Formulação $\mathcal{F}_2$

Cortes

- Para um professor p considere um conjunto $\dot{C}$:

$$\dot{C} = \{(d_1, h_1), \ldots, (d_{\dot{c}}, h_{\dot{c}})\} \quad | \quad d_i \in D, h_i \in H \forall i \in \{1, \ldots, \dot{c}\}$$

- **Cover**:

$$\sum_{i \in \{1,\ldots,\dot{c}\}} h_i . \breve{a}_{pd_ih_i} \quad > \quad \sum_{t \in T} \tilde{r}_{pt}$$

- Desigualdade válida:

$$\sum_{i \in \{1,\ldots,\dot{c}\}} \breve{a}_{pd_ih_i} \quad \leq \quad \dot{c} - 1$$

Cortes

- Para um professor p considere um conjunto $\dot{C}$:

$$\dot{C} = \{(d_1, h_1), \ldots, (d_{\dot{c}}, h_{\dot{c}})\} \quad | \quad d_i \in D, h_i \in H \forall i \in \{1, \ldots, \dot{c}\}$$

- **Cover**:

$$\sum_{i \in \{1,\ldots,\dot{c}\}} h_i . \breve{a}_{p d_i h_i} \quad > \quad \sum_{t \in T} \tilde{r}_{pt}$$

- Desigualdade válida:

$$\sum_{i \in \{1,\ldots,\dot{c}\}} \breve{a}_{p d_i h_i} \quad \leq \quad \dot{c} - 1$$

Formulação $\mathcal{F}_2$

Cortes

- Para um professor p considere um conjunto $\dot{C}$:

$$\dot{C} = \{(d_1, h_1), \ldots, (d_{\dot{c}}, h_{\dot{c}})\} \ \mid \ d_i \in D, h_i \in H \forall i \in \{1, \ldots, \dot{c}\}$$

- **Cover**:

$$\sum_{i \in \{1,\ldots,\dot{c}\}} h_i . \breve{a}_{pd_ih_i} \ > \ \sum_{t \in T} \tilde{r}_{pt}$$

- Desigualdade válida:

$$\sum_{i \in \{1,\ldots,\dot{c}\}} \breve{a}_{pd_ih_i} \ \leq \ \dot{c} - 1$$

Separação de Cortes

Poliedros considerados na separação de cortes

$$\mathcal{S}_p \begin{cases} \displaystyle\sum_{h \in \{0,\ldots,|H|\}} \breve{a}_{pdh} = 1 \quad \forall d \in D \\ \displaystyle\sum_{h \in H} \sum_{d \in D} h.\breve{a}_{pdh} = \sum_{t \in T} \tilde{r}_{pt} \\ \breve{a}_{pdh} \in \{0,1\} \quad \forall d \in D, h \in H \end{cases}$$

$$\forall p \in P$$

$$\mathcal{S}_{pt} \begin{cases} \displaystyle\sum_{h \in \{0,\ldots,|H|\}} \breve{a}_{ptdh} = 1 \quad \forall d \in D \\ \displaystyle\sum_{h \in H} \sum_{d \in D} h.\breve{a}_{ptdh} = \tilde{r}_{pt} \\ \breve{a}_{ptdh} \in \{0,1\} \quad \forall d \in D, h \in H \end{cases}$$

$$\forall p \in P, t \in T$$

Separação de Cortes

Exemplo:

- Professor p' com carga horária semanal de 11 aulas. Grade de horários com $|H| = 5$.
- Solução fracionária válida $\breve{a}'$ para as variáveis $\breve{a}$:

$$\begin{array}{rcll} \breve{a}'_{p',1,4} & = & 1 & \text{sel. um padrão de 4 aulas para o dia 1} \\ \breve{a}'_{p',2,4} & = & 1 & \text{sel. um padrão de 4 aulas para o dia 2} \\ \breve{a}'_{p',3,4} & = & 0,75 & \text{sel. 0,75 de um padrão de 4 aulas para o dia 3} \end{array}$$

- Corte para separar o ponto $\breve{a}'$, fora do poliedro considerado em $\mathcal{S}_{p'}$:

$$\breve{a}'_{p',1,4} + \breve{a}'_{p',2,4} + \breve{a}'_{p',3,4} \leq 2$$

Separação de Cortes

Exemplo:

- Professor p' com carga horária semanal de 11 aulas. Grade de horários com $|H| = 5$.
- Solução fracionária válida $\breve{a}'$ para as variáveis $\breve{a}$:

$$\begin{array}{rcl} \breve{a}'_{p',1,4} = & 1 & \text{sel. um padrão de 4 aulas para o dia 1} \\ \breve{a}'_{p',2,4} = & 1 & \text{sel. um padrão de 4 aulas para o dia 2} \\ \breve{a}'_{p',3,4} = & 0,75 & \text{sel. 0,75 de um padrão de 4 aulas para o dia 3} \end{array}$$

- Corte para separar o ponto $\breve{a}'$, fora do poliedro considerado em $\mathcal{S}_{p'}$:

$$\breve{a}'_{p',1,4} + \breve{a}'_{p',2,4} + \breve{a}'_{p',3,4} \leq 2$$

Separação de Cortes

Exemplo:

- Professor p' com carga horária semanal de 11 aulas. Grade de horários com $|H| = 5$.
- Solução fracionária válida $\breve{a}'$ para as variáveis $\breve{a}$:

$$\begin{array}{rcl}
\breve{a}'_{p',1,4} = & 1 & \text{sel. um padrão de 4 aulas para o dia 1} \\
\breve{a}'_{p',2,4} = & 1 & \text{sel. um padrão de 4 aulas para o dia 2} \\
\breve{a}'_{p',3,4} = & 0,75 & \text{sel. 0,75 de um padrão de 4 aulas para o dia 3}
\end{array}$$

- Corte para separar o ponto $\breve{a}'$, fora do poliedro considerado em $\mathcal{S}_{p'}$:

$$\breve{a}'_{p',1,4} + \breve{a}'_{p',2,4} + \breve{a}'_{p',3,4} \quad \leq \quad 2$$

Exemplo:

- Professor p' com carga horária semanal de 11 aulas. Grade de horários com $|H| = 5$.
- Solução fracionária válida $\breve{a}'$ para as variáveis $\breve{a}$:

$$\begin{array}{rcll} \breve{a}'_{p',1,4} = & 1 & \text{sel. um padrão de 4 aulas para o dia 1} \\ \breve{a}'_{p',2,4} = & 1 & \text{sel. um padrão de 4 aulas para o dia 2} \\ \breve{a}'_{p',3,4} = & 0,75 & \text{sel. 0,75 de um padrão de 4 aulas para o dia 3} \end{array}$$

- Corte para separar o ponto $\breve{a}'$, fora do poliedro considerado em $\mathcal{S}_{p'}$:

$$\breve{a}'_{p',1,4} + \breve{a}'_{p',2,4} + \breve{a}'_{p',3,4} \leq 2$$

Lifting !

Separação de Cortes

Exemplo:

- Professor p' com carga horária semanal de 11 aulas. Grade de horários com $|H| = 5$.
- Solução fracionária válida $\breve{a}'$ para as variáveis $\breve{a}$:

$$\begin{array}{rcll} \breve{a}'_{p',1,4} = & 1 & \text{sel. um padrão de 4 aulas para o dia 1} \\ \breve{a}'_{p',2,4} = & 1 & \text{sel. um padrão de 4 aulas para o dia 2} \\ \breve{a}'_{p',3,4} = & 0,75 & \text{sel. 0,75 de um padrão de 4 aulas para o dia 3} \end{array}$$

- Corte para separar o ponto $\breve{a}'$, fora do poliedro considerado em $\mathcal{S}_{p'}$:

$$\sum_{d \in D} (\breve{a}'_{p',d,4} + \breve{a}'_{p',d,5}) \quad \leq \quad 2$$

Separação de Cortes

Implementantо a separação para $\mathcal{S}_p$ e $\mathcal{S}_{pt}$

- Possibilidade 1: Separar cortes *knapsack cover*, usando implementações disponíveis

    - 👍 Separação rápida
    - 👎 Cortes não tão fortes quanto possível

- Possibilidade 2: Considerar explicitamente os pontos extremos do poliedro de $\mathcal{S}_p$ e $\mathcal{S}_{pt}$ e realizar a separação através dos cortes de *Fenchel*

    - 👍 Cortes mais fortes
    - 👍 Resolução de 1 programa linear por separação
    - 👎 Núm. exponencial de restrições
    - 👍 Proporcional à $|D|$ e $|H|$

Separação de Cortes

Implementanto a separação para $\mathcal{S}_p$ e $\mathcal{S}_{pt}$

- Possibilidade 1: Separar cortes *knapsack cover*, usando implementações disponíveis
  - Separação rápida
  - Cortes não tão fortes quanto possível
- Possibilidade 2: Considerar explicitamente os pontos extremos do poliedro de $\mathcal{S}_p$ e $\mathcal{S}_{pt}$ e realizar a separação através dos cortes de *Fenchel*
  - Cortes mais fortes
  - Resolução de 1 programa linear por separação
  - Núm. exponencial de restrições
  - Proporcional à $|D|$ e $|H|$

Resultados da formulação estendida com geração de colunas e cortes

Limites inferiores e superiores e tempo computacional

inst.	$\mathcal{F}_{1,4}$			CCGCTTPC			
	$\mathcal{LI}$	*gap*(%)	t.cpu(s)	$\mathcal{LI}$	*gap*(%)	t.cpu(s)	$\mathcal{LS}$
1	189,0	6,9	0,5	**202,0**	**0,0**	0,5	**202**
2	**333,0**	**0,0**	5,3	**333,0**	**0,0**	11,4	**333**
3	414,0	2,2	1,7	**423,0**	**0,0**	4,8	**423**
4	643,0	1,6	7,8	**652,0**	**0,2**	91,2	**653**
5	756,0	1,3	47,0	**762,0**	**0,5**	179,4	**766**
6	738,0	3,0	53,0	**756,0**	**0,5**	231,1	**760**
7	999,0	3,0	160,0	**1.017,0**	**1,2**	2.678,3	**1.029**

CPLEX 10.0 - Dell Optiplex G620, D 3.0Ghz, 2GB de memória RAM

PLIM para Busca em Vizinhança

Resolvedores PLIM de propósito geral

- Avanços contínuos e significativos
  - Planos de Corte
  - Pré-Processamento
  - Seleção Inteligente de Nós
- Não resolvem efetivamente todos os problemas combinatórios importantes
- Fischetti and Lodi (2003): usar resolvedores PLIM de propósito geral para a busca em grandes vizinhanças

PLIM para Busca em Vizinhança

Resolvedores PLIM de propósito geral

- Avanços contínuos e significativos
  - Planos de Corte
  - Pré-Processamento
  - Seleção Inteligente de Nós
- Não resolvem efetivamente todos os problemas combinatórios importantes
- Fischetti and Lodi (2003): usar resolvedores PLIM de propósito geral para a busca em grandes vizinhanças

PLIM para Busca em Vizinhança

Resolvedores PLIM de propósito geral

- Avanços contínuos e significativos
  - Planos de Corte
  - Pré-Processamento
  - Seleção Inteligente de Nós
- Não resolvem efetivamente todos os problemas combinatórios importantes
- Fischetti and Lodi (2003): usar resolvedores PLIM de propósito geral para a busca em grandes vizinhanças

PLIM para Busca em Vizinhança

O Corte *Local Branching*

- solução de referência $\overline{x}$ (variáveis binárias)
- $\overline{S}$ variáveis ativas ($x_j = 1 \forall j \in \overline{S}$) de $\overline{x}$
- $\mathcal{N}_{lb}(\overline{x}, k)$ = soluções factíveis que também satisfazem:

$$\sum_{j \in \overline{S}} (1 - x_j) \leq k$$

(assumindo que $|\overline{S}|$ é constante para todas as soluções)

PLIM para Busca em Vizinhança

O Corte *Local Branching*

- solução de referência $\overline{x}$ (variáveis binárias)
- $\overline{S}$ variáveis ativas ($x_j = 1 \forall j \in \overline{S}$) de $\overline{x}$
- $\mathcal{N}_{lb}(\overline{x}, k)$ = soluções factíveis que também satisfazem:

$$\sum_{j \in \overline{S}} (1 - x_j) \leq k$$

(assumindo que $|\overline{S}|$ é constante para todas as soluções)

PLIM para Busca em Vizinhança

O Corte *Local Branching*

- solução de referência $\overline{x}$ (variáveis binárias)
- $\overline{S}$ variáveis ativas ($x_j = 1 \forall j \in \overline{S}$) de $\overline{x}$
- $\mathcal{N}_{lb}(\overline{x}, k)$ = soluções factíveis que também satisfazem:

$$\sum_{j \in \overline{S}} (1 - x_j) \leq k$$

(assumindo que $|\overline{S}|$ é constante para todas as soluções)

PLIM para Busca em Vizinhança

Cortes Elipsoidais - Pigatti, Poggi e Uchoa (2004)

- Duas soluções de referência, $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$
- Variáveis ativas $\overline{S}_1$ e $\overline{S}_2$
- $\mathcal{N}_{eps}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, k)$=soluções factíveis que também satisfazem:

$$\sum_{j \in (\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2)} 2x_j + \sum_{j \in \overline{S}_1 \setminus \overline{S}_2} x_j + \sum_{j \in \overline{S}_2 \setminus \overline{S}_1} x_j \geq \alpha(\overline{x}_1, \overline{x}_2) - k$$

- Paralelo com Reconexão de Caminhos

PLIM para Busca em Vizinhança

Cortes Elipsoidais - Pigatti, Poggi e Uchoa (2004)

- Duas soluções de referência, $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$
- Variáveis ativas $\overline{S}_1$ e $\overline{S}_2$
- $\mathcal{N}_{eps}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, k)$=soluções factíveis que também satisfazem:

$$\sum_{j \in (\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2)} 2x_j + \sum_{j \in \overline{S}_1 \setminus \overline{S}_2} x_j + \sum_{j \in \overline{S}_2 \setminus \overline{S}_1} x_j \geq \alpha(\overline{x}_1, \overline{x}_2) - k$$

- Paralelo com Reconexão de Caminhos

PLIM para Busca em Vizinhança

Cortes Elipsoidais - Pigatti, Poggi e Uchoa (2004)

- Duas soluções de referência, $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$
- Variáveis ativas $\overline{S}_1$ e $\overline{S}_2$
- $\mathcal{N}_{eps}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, k)$=soluções factíveis que também satisfazem:

$$\sum_{j \in (\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2)} 2x_j + \sum_{j \in \overline{S}_1 \setminus \overline{S}_2} x_j + \sum_{j \in \overline{S}_2 \setminus \overline{S}_1} x_j \geq \alpha(\overline{x}_1, \overline{x}_2) - k$$

- Paralelo com Reconexão de Caminhos

PLIM para Busca em Vizinhança

Cortes Elipsoidais - Pigatti, Poggi e Uchoa (2004)

- Duas soluções de referência, $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$
- Variáveis ativas $\overline{S}_1$ e $\overline{S}_2$
- $\mathcal{N}_{eps}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, k)$=soluções factíveis que também satisfazem:

$$\sum_{j \in (\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2)} 2x_j + \sum_{j \in \overline{S}_1 \setminus \overline{S}_2} x_j + \sum_{j \in \overline{S}_2 \setminus \overline{S}_1} x_j \geq \alpha(\overline{x}_1, \overline{x}_2) - k$$

- Paralelo com Reconexão de Caminhos

PLIM para Busca em Vizinhança

Cortes Elipsoidais - Pigatti, Poggi e Uchoa (2004)

- Duas soluções de referência, $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$
- Variáveis ativas $\overline{S}_1$ e $\overline{S}_2$
- $\mathcal{N}_{eps}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, k)$=soluções factíveis que também satisfazem:

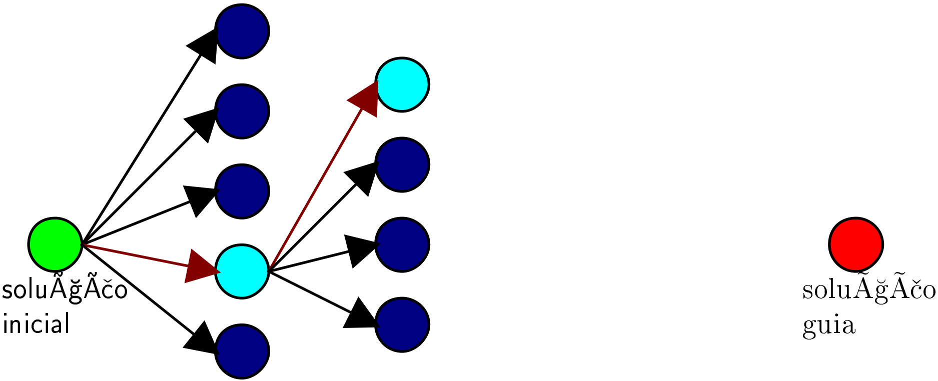
$$\sum_{j \in (\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2)} 2x_j + \sum_{j \in \overline{S}_1 \setminus \overline{S}_2} x_j + \sum_{j \in \overline{S}_2 \setminus \overline{S}_1} x_j \geq \alpha(\overline{x}_1, \overline{x}_2) - k$$

- Paralelo com Reconexão de Caminhos

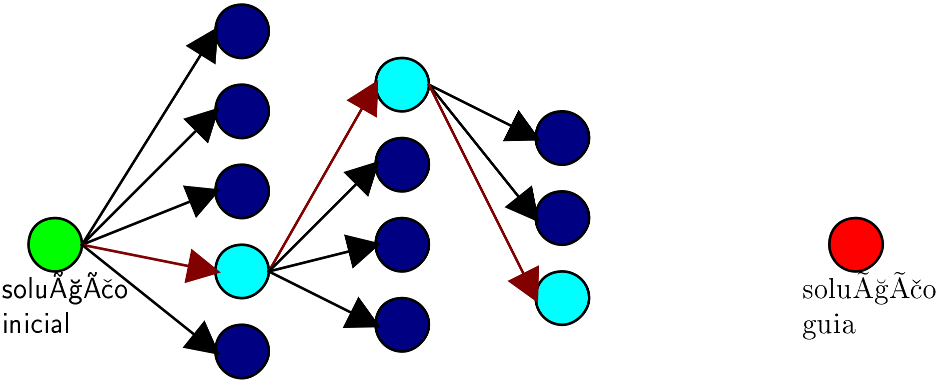
Reconexão de Caminhos

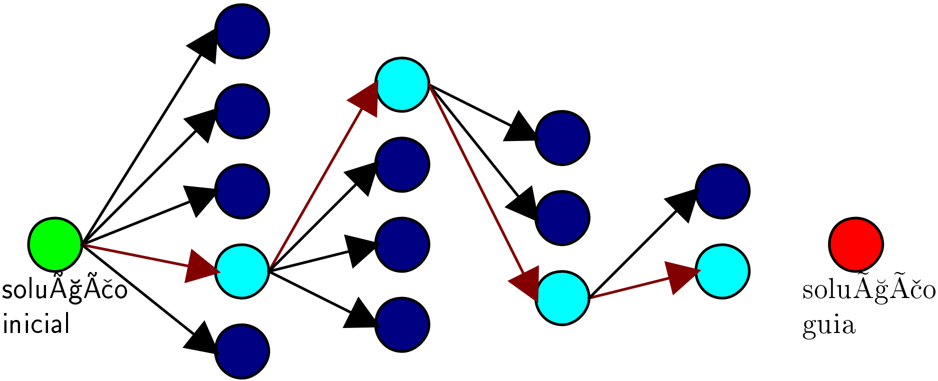
Reconexão de Caminhos

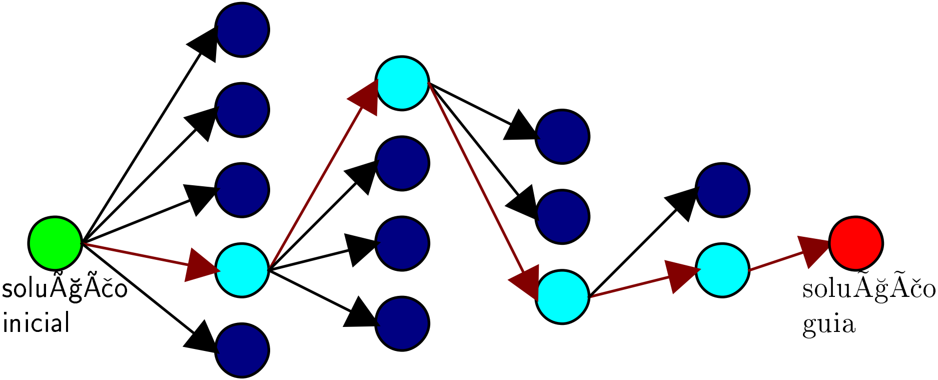
Reconexão de Caminhos



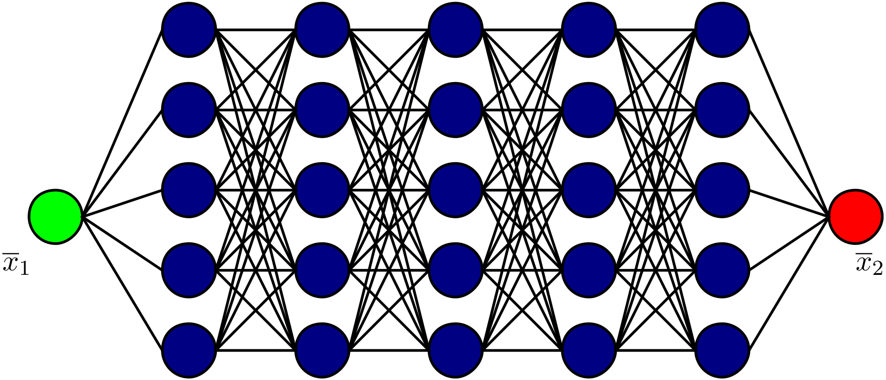
Reconexão de Caminhos




soluÃğÃčo
inicial
soluÃğÃčo
guia


soluÃğÃčo
inicial
soluÃğÃčo
guia

$\mathcal{N}_{eps}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, 0)$



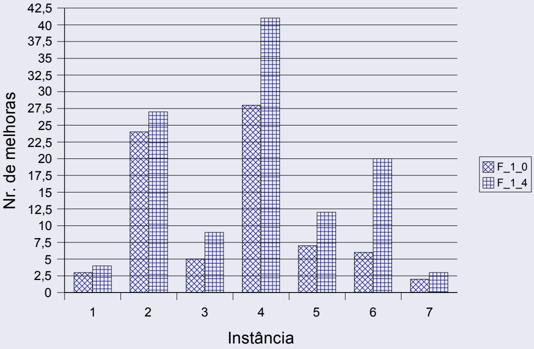
PLIM para Busca em Vizinhança

Questões de implementação importantes:

- Qual formulação utilizar ?
  - Formulação forte (processamento de nós mais lento, árvore menor)
  - Formulação fraca (processamento de nós mais rápido, árvore maior)
- Que valor de k ?
- Reiniciar a busca com uma nova solução incumbente, sempre que essa for encontrada (implicando uma nova fase de pré-processamento e geração de cortes) ou continuar a busca na vizinhança já definida ?

Formulação Fraca x Formulação Forte

Número de melhoras obtidas buscando-se em $\mathcal{N}_{lb}(\overline{x}, 12)$



Limite de tempo de 10 minutos.

Comparação das vizinhanças

Taxa de sucesso em melhorar sol. inicial × tempo computacional, k pequeno

	$\mathcal{N}_{eps}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, k)$		$\mathcal{N}_{lb}(\overline{x}, k)$	
k	Tempo	Sucesso	Tempo	Sucesso
1	47,63	14,29%	7,81	0,00%
2	182,70	57,14%	84,48	14,29%
3	488,12	80,00%	191,10	28,57%
4	870,49	94,12%	279,01	85,29%

$$\overline{x}_1, \overline{x}_2,\ x \in ES,\ |ES| = 35$$

Comparação das vizinhanças

Taxa de sucesso em melhorar sol. inicial $\times$ tempo computacional, k pequeno

	$\mathcal{N}_{eps}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, k)$		$\mathcal{N}_{lb}(\overline{x}, k)$	
k	Tempo	Sucesso	Tempo	Sucesso
1	47,63	14,29%	7,81	0,00%
2	182,70	57,14%	84,48	14,29%
3	488,12	80,00%	191,10	28,57%
4	870,49	94,12%	279,01	85,29%

$$\overline{x}_1, \overline{x}_2,\ x \in ES,\ |ES| = 35$$

Valores de k pequenos definem vizinhanças suficientemente grandes com o corte elipsoidal para melhorar as soluções inicicias

Comparação das vizinhanças

Taxa de sucesso em melhorar sol. inicial × tempo computacional, k pequeno

	$\mathcal{N}_{eps}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, k)$		$\mathcal{N}_{lb}(\overline{x}, k)$	
k	Tempo	Sucesso	Tempo	Sucesso
1	47,63	14,29%	7,81	0,00%
2	182,70	57,14%	84,48	14,29%
3	488,12	80,00%	191,10	28,57%
4	870,49	94,12%	279,01	85,29%

$$\overline{x}_1, \overline{x}_2,\ x \in ES,\ |ES| = 35$$

Um tempo computacional maior foi necessário para se atingir uma taxa de sucesso similar com o corte *Local Branching*

Conclusões e Trabalhos Futuros

Heurística Proposta

- Resultados significativamente melhores que os disponíveis na literatura
- Projeto simples - utilização do *framework* de Busca Tabu
- Importância da diversificação informada
  - Produção de soluções de melhor qualidade
  - Menor dependência de ajuste de parâmetros
- Melhoramentos: incorporação do procedimento "Intraturmas-Interturmas" proposto em Souza

Conclusões e Trabalhos Futuros

Heurística Proposta

- Resultados significativamente melhores que os disponíveis na literatura
- Projeto simples - utilização do *framework* de Busca Tabu
- Importância da diversificação informada
  - Produção de soluções de melhor qualidade
  - Menor dependência de ajuste de parâmetros
- Melhoramentos: incorporação do procedimento "Intraturmas-Interturmas" proposto em Souza

Conclusões e Trabalhos Futuros

Heurística Proposta

- Resultados significativamente melhores que os disponíveis na literatura
- Projeto simples - utilização do *framework* de Busca Tabu
- Importância da diversificação informada
  - Produção de soluções de melhor qualidade
  - Menor dependência de ajuste de parâmetros
- Melhoramentos: incorporação do procedimento "Intraturmas-Interturmas" proposto em Souza

Conclusões e Trabalhos Futuros

Heurística Proposta

- Resultados significativamente melhores que os disponíveis na literatura
- Projeto simples - utilização do *framework* de Busca Tabu
- Importância da diversificação informada
  - Produção de soluções de melhor qualidade
  - Menor dependência de ajuste de parâmetros
- Melhoramentos: incorporação do procedimento "Intraturmas-Interturmas" proposto em Souza

Conclusões e Trabalhos Futuros

Programação Linear Inteira Mista

- Determinação da solução ótima para 3 instâncias em aberto da literatura
- *gap* $\leq 0,5\%$ para 6 dos 7 problemas considerados, $1,2\%$ para o problema 7
- Importância da combinação dos procedimentos de geração de colunas e de cortes
- Idéias da formulação aplicáveis a inúmeros problemas de programação de horários
- Trabalho futuro: desenvolvimento de um *Branch, Cut and Price* robusto, considerando o estudo de estratégias de *branch* com *Special Ordered Sets* e ordens de prioridade

Conclusões e Trabalhos Futuros

Programação Linear Inteira Mista

- Determinação da solução ótima para 3 instâncias em aberto da literatura
- *gap* $\leq 0,5\%$ para 6 dos 7 problemas considerados, $1,2\%$ para o problema 7
- Importância da combinação dos procedimentos de geração de colunas e de cortes
- Idéias da formulação aplicáveis a inúmeros problemas de programação de horários
- Trabalho futuro: desenvolvimento de um *Branch, Cut and Price* robusto, considerando o estudo de estratégias de *branch* com *Special Ordered Sets* e ordens de prioridade

Conclusões e Trabalhos Futuros

Programação Linear Inteira Mista

- Determinação da solução ótima para 3 instâncias em aberto da literatura
- *gap* $\leq 0,5\%$ para 6 dos 7 problemas considerados, $1,2\%$ para o problema 7
- Importância da combinação dos procedimentos de geração de colunas e de cortes
- Idéias da formulação aplicáveis a inúmeros problemas de programação de horários
- Trabalho futuro: desenvolvimento de um *Branch, Cut and Price* robusto, considerando o estudo de estratégias de *branch* com *Special Ordered Sets* e ordens de prioridade

Conclusões e Trabalhos Futuros

Programação Linear Inteira Mista

- Determinação da solução ótima para 3 instâncias em aberto da literatura
- *gap* $\leq 0,5\%$ para 6 dos 7 problemas considerados, $1,2\%$ para o problema 7
- Importância da combinação dos procedimentos de geração de colunas e de cortes
- Idéias da formulação aplicáveis a inúmeros problemas de programação de horários
- Trabalho futuro: desenvolvimento de um *Branch, Cut and Price* robusto, considerando o estudo de estratégias de *branch* com *Special Ordered Sets* e ordens de prioridade

Conclusões e Trabalhos Futuros

Programação Linear Inteira Mista

- Determinação da solução ótima para 3 instâncias em aberto da literatura
- *gap* $\leq 0,5\%$ para 6 dos 7 problemas considerados, $1,2\%$ para o problema 7
- Importância da combinação dos procedimentos de geração de colunas e de cortes
- Idéias da formulação aplicáveis a inúmeros problemas de programação de horários
- Trabalho futuro: desenvolvimento de um *Branch, Cut and Price* robusto, considerando o estudo de estratégias de *branch* com *Special Ordered Sets* e ordens de prioridade

Métodos Híbridos

- Combinação frutífera: Metaheurísticas e Programação Linear Inteira Mista
- MH: bons "pontos de partida" para a busca com PLIM
- PLIM para a busca em grandes vizinhanças:
  - PLIM pode "polir" soluções fornecidas por MH
  - Ou, no mínimo, dar um "certificado de qualidade" para a solução da MH tão bom quanto maior for o valor de k
- Formulações fortes se comportam melhor, mesmo considerando a busca heurística:

  Testes com LB e CE com $\mathcal{F}_2$!?

- Trabalho Futuro: utilização da informação solução linear relaxada para guiar uma heurística

Métodos Híbridos

- Combinação frutífera: Metaheurísticas e Programação Linear Inteira Mista
- MH: bons "pontos de partida" para a busca com PLIM
- PLIM para a busca em grandes vizinhanças:
  - PLIM pode "polir" soluções fornecidas por MH
  - Ou, no mínimo, dar um "certificado de qualidade" para a solução da MH tão bom quanto maior for o valor de k
- Formulações fortes se comportam melhor, mesmo considerando a busca heurística:

  Testes com LB e CE com $\mathcal{F}_2$!?

- Trabalho Futuro: utilização da informação solução linear relaxada para guiar uma heurística

Métodos Híbridos

- Combinação frutífera: Metaheurísticas e Programação Linear Inteira Mista
- MH: bons "pontos de partida" para a busca com PLIM
- PLIM para a busca em grandes vizinhanças:
  - PLIM pode "polir" soluções fornecidas por MH
  - Ou, no mínimo, dar um "certificado de qualidade" para a solução da MH tão bom quanto maior for o valor de k
- Formulações fortes se comportam melhor, mesmo considerando a busca heurística:

Testes com LB e CE com $\mathcal{F}_2$!?

- Trabalho Futuro: utilização da informação solução linear relaxada para guiar uma heurística

Métodos Híbridos

- Combinação frutífera: Metaheurísticas e Programação Linear Inteira Mista
- MH: bons "pontos de partida" para a busca com PLIM
- PLIM para a busca em grandes vizinhanças:
  - PLIM pode "polir" soluções fornecidas por MH
  - Ou, no mínimo, dar um "certificado de qualidade" para a solução da MH tão bom quanto maior for o valor de k
- Formulações fortes se comportam melhor, mesmo considerando a busca heurística:

  Testes com LB e CE com $\mathcal{F}_2$!?

- Trabalho Futuro: utilização da informação solução linear relaxada para guiar uma heurística

Métodos Híbridos

- Combinação frutífera: Metaheurísticas e Programação Linear Inteira Mista
- MH: bons “pontos de partida” para a busca com PLIM
- PLIM para a busca em grandes vizinhanças:
    - PLIM pode “polir” soluções fornecidas por MH
    - Ou, no mínimo, dar um “certificado de qualidade” para a solução da MH tão bom quanto maior for o valor de k
- Formulações fortes se comportam melhor, mesmo considerando a busca heurística:

  Testes com LB e CE com $\mathcal{F}_2$!?

- Trabalho Futuro: utilização da informação solução linear relaxada para guiar uma heurística

Solução Ótima - Problema 3

Professor\Período	Dia 1					Dia 2					Dia 3					Dia 4					Dia 5				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	1	3	2	3	2	3	2	3	1	1	×	×	×	×	×	3	1	2	2	1					
2	2	1	3	2	3	×	×	×	×	×						1	2	3	1	3	2	1	2	1	3
3									2	2	1	1	2	3	3	×	×	×	×	×	1	3	1	3	2
4	3	2	1										3	1	2	×	×	×	×	×					
5	×	×	×	×	×	2	1	7	3	8	3	2	1	7	6						3	2	6	8	1
6	4	8	7	1	5	1	4	6			5	8	7	6	1						×	×	×	×	×
7						6	5	1	7	3	2	4	8			×	×	×	×	×					
8					1	8	3	2	4	5	×	×	×	×	×	6	7	1	3	2					
9	×	×	×	×	×						4	3		2	5	2	3				5	4	3	2	
10				5	4	×	×	×	×	×						5		4	4	5	4	5	5		4
11	5	4	5	4							×	×	×	×	×		4	5	5	4				4	5
12						7	8	5	6	4	7	6	5	8	4	×	×	×	×	×	7	6	4	5	8
13	7	6	6	8	7						×	×	×	×	×	7	6	8	6	8	6	8	8	7	7
14	8	7	8	6	6	×	×	×	×	×						8	8	7	7	6	8	7	7	6	6
15	6	5	4	7	8	4	6	8	5	7	8	5	6	4	7	×	×	×	×	×					
16						5	7	4	8	6	6	7	4	5	8	4	5	6	8	7	×	×	×	×	×

Problema 3 - 200 alocações - Custo: 423

Obrigado

Haroldo Gambini Santos
hsantos@ic.uff.br