


Definições Forma Padrão Soluções Básicas Simplex

Introdução à Otimização - BCC 342

O Algoritmo Simplex

Haroldo Gambini Santos
Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP

3 de maio de 2011



Introdução à Otimização - BCC 342. O Algoritmo Simplex

1 / 32

Notas


Definições Forma Padrão Soluções Básicas Simplex

Definições Preliminares

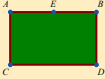
Conjunto Convexo

Um conjunto de pontos S é um **Conjunto Convexo** se o segmento de linha juntando qualquer par de pontos em S é completamente contido em S .


Convexo ou Não ?




a




b



c



d



Introdução à Otimização - BCC 342. O Algoritmo Simplex

2 / 32

Notas

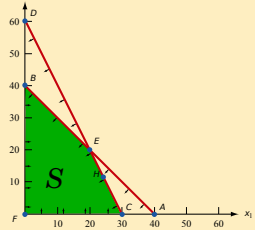
Definições Forma Padrão Soluções Básicas Simplex


Definições Preliminares

Ponto Extremo

Em um conjunto convexo S um ponto P é um **Ponto Extremo** se cada segmento de linha que fica completamente em S e contém P tem P como final da linha.

Um Poliedro - Quais são PEs ?





Introdução à Otimização - BCC 342. O Algoritmo Simplex

3 / 32

Notas

Forma Padrão

- Dizemos que um PL (Programa Linear) está na **forma padrão** se:
 - todas as restrições são de igualdade
 - todas as variáveis são não negativas (≥ 0)
- A conversão de um PL qualquer para a forma padrão é feita com os seguintes passos:
 - para restrições de \leq e \geq transformamos em igualdade através da introdução de variáveis de folga
 - significado: *falta* ou *excesso* na igualdade
 - variáveis que podem ser negativas são substituídas por duas variáveis, representando a *parte positiva* e *negativa* da mesma



Notas

Exemplo

$$\begin{aligned}
 3x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\
 \downarrow \\
 3x_1 + 2x_2 - s_1 &= 6 \\
 \vdots \\
 50x_1 + 35x_3 &\leq 80 \\
 \downarrow \\
 50x_1 + 35x_3 + s_3 &= 80
 \end{aligned}$$



Notas

Forma Padrão

Exercício

Coloque na forma padrão:

$$\begin{aligned}
 \min : & \\
 & 3x_1 + x_2 \\
 \text{s.a. :} & \\
 & x_1 \geq 3 \\
 & x_1 + x_2 \leq 4 \\
 & 2x_1 - x_2 = 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Notas

Definições **Forma Padrão** Soluções Básicas Simplex

Forma Padrão


max (ou min) :

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

s.a.

$$\begin{matrix} a_{11}x_{11} & a_{12}x_{12} & \dots & a_{1n}x_{1n} & = & b_1 \\ a_{21}x_{21} & a_{22}x_{22} & \dots & a_{2n}x_{2n} & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1}x_{m1} & a_{m2}x_{m2} & \dots & a_{mn}x_{mn} & = & b_m \end{matrix}$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in 1, \dots, n$$



Introdução à Otimização - BCC 342.O Algoritmo Simplex

7 / 32

Notas

Definições **Forma Padrão** Soluções Básicas Simplex

Forma Padrão


Considere:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Então o sistema de equações de qualquer PL pode ser escrito como:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$



Introdução à Otimização - BCC 342.O Algoritmo Simplex

8 / 32

Notas

Definições **Forma Padrão** **Soluções Básicas** Simplex

Variáveis Básicas

Definição


Em um sistema de equações com n variáveis e m restrições definimos como **solução básica** uma solução onde temos:

- m variáveis para as quais o sistema é resolvido, essas são chamadas **Variáveis Básicas**, as quais denotaremos por VB
- $m - n$ o restante das variáveis permanece fixada em zero - as **Variáveis Não-Básicas** - VNB

Exemplo

$$\begin{matrix} x_1 & + & x_2 & & = & 3 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{matrix}$$

Verifique as soluções para $VB = \{x_1, x_2\}$ e $VB = \{x_2, x_3\}$



Introdução à Otimização - BCC 342.O Algoritmo Simplex

9 / 32

Notas

Variáveis Básicas

Todo conjunto de VB permite a obtenção de uma solução básica ?

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Tente $BV = \{x_1, x_2\}$



Notas

Pontos Extremos e Soluções Básicas Factíveis

Definição

Qualquer solução básica onde todas as variáveis são não negativas é uma **Solução Básica Factível - SBF**.

Teorema

Um ponto na região factível de um PL é um **Ponto Extremo** se e somente se é uma **Solução Básica Factível** para o PL.



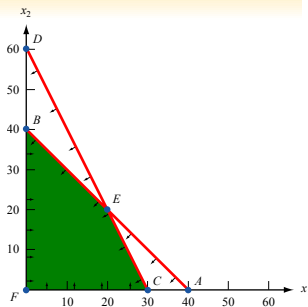
Notas

Pontos Extremos

$$\begin{aligned} \max : & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.} : & x_1 + x_2 \leq 40 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 60 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

⇓

$$\begin{aligned} \max : & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.} : & x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 60 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$



Ex.: $VB = \{x_1, x_3\}$ corresponde a qual ponto ? Qual o valor de x_3, x_2 e x_4 na SBF desse ponto ?



Notas

Definições Forma Padrão **Soluções Básicas** Simplex

Pontos Extremos

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 40 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 60 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

BV	SBF	Ponto Extremo
x_1, x_2	$x_3 = x_4 = 0, x_1 = x_2 = 20$	E
x_1, x_3	$x_2 = x_4 = 0, x_1 = 30, x_3 = 10$	C
x_1, x_4	$x_2 = x_3 = 0, x_1 = 40, x_4 = -20$	-
x_2, x_3	$x_1 = x_4 = 0, x_3 = -20, x_2 = 60$	-
x_2, x_4	$x_1 = x_3 = 0, x_2 = 40, x_4 = 20$	B
x_3, x_4	$x_1 = x_2 = 0, x_3 = 40, x_4 = 60$	F

UFPA

Introdução à Otimização - BCC 342.O Algoritmo Simplex

13 / 32

Notas

Definições Forma Padrão **Soluções Básicas** Simplex

PLs Degenerados

Degeneração

Eventualmente, mais de um Conjunto de Variáveis Básicas pode corresponder a um mesmo Ponto Extremo. Nesse caso dizemos que o Programa Linear é Degenerado.

O impacto de soluções degeneradas na resolução dos PLs será discutido posteriormente.

UFPA

Introdução à Otimização - BCC 342.O Algoritmo Simplex

14 / 32

Notas

Definições Forma Padrão **Soluções Básicas** Simplex

Direção Ilimitada

Definição

Em um PL com região factível S e restrições $Ax = b, x \geq 0$ dizemos que d é uma Direção Ilimitada se para qualquer solução $x \in S$ e qualquer $c \geq 0$:

$$x + cd \in S$$

UFPA

Introdução à Otimização - BCC 342.O Algoritmo Simplex

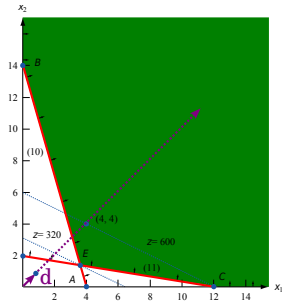
15 / 32

Notas

Direção Ilimitada

$$\begin{aligned} \min : & 50x_1 + 100x_2 \\ \text{s.a.} : & 7x_1 + 2x_2 - x_3 = 28 \\ & 2x_1 + 12x_2 - x_4 = 24 \end{aligned}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}$$



Notas

Pontos Extremos e Soluções Factíveis

Teorema

Considere um PL na forma padrão com Soluções Básicas Factíveis

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$$

Qualquer ponto \mathbf{x} na região factível do PL pode ser escrito no formato:

$$\mathbf{x} = \mathbf{d} + \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{b}_i$$

sendo que $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ ou é a direção ilimitada e $\sum_{i=1}^k \sigma_i = 1$.

Notas

Combinações Convexas de SBFs Exemplo PL Limitado

$$\begin{aligned} \max : & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.} : & x_1 + x_2 \leq 40 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 60 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ponto $H(24,12)$ não é SBF.

Pode ser escrito como a combinação convexa de E e C :

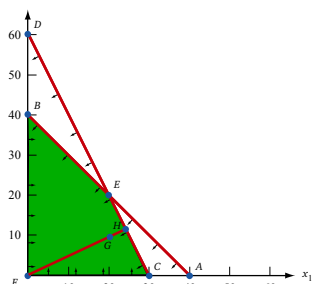
$$H = 0,6 E + 0,4 C$$

Ponto G também não é BFS.

Pode ser escrito como :

$$G = \frac{1}{6} F + \frac{5}{6} H$$

$$\Downarrow \\ G = \frac{1}{6} F + \frac{5}{6} (0,6E + 0,4C)$$



Notas

Definições Forma Padrão Soluções Básicas Simplex

Combinções Convexas de SBFs Exemplo PL Ilimitado

$$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 - x_3 &= 28 \\ 2x_1 + 12x_2 - x_4 &= 24 \end{aligned}$$

Descrevendo F em termos de SBFs.
Direção Ilimitada:
 Inclinação para ir de C a F : $\frac{4-0}{14-12}$

$$d = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 22 \\ 52 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 56 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 78 \\ 52 \end{bmatrix}$$

Desse modo obtemos:
 $x = d + b_1$

Introdução à Otimização - BCC 342.O Algoritmo Simplex

19 / 32

Notas

Definições Forma Padrão Soluções Básicas Simplex

O Algoritmo Simplex

- Passo 1 Converta o PL para a **Forma Padrão**.
- Passo 2 Obtenha uma **Solução Básica Factível** (se possível) da Forma Padrão.
- Passo 3 **Teste de Otimalidade:** Determine se a Solução Básica é Ótima. Se Ótima PARE.
- Passo 4 Caso não seja ótima - **Mudança de Base:** determine:
 - qual variável não básica irá entrar na base, com o intuito de melhorar a função objetivo;
 - qual variável básica irá sair da base.
- Passo 5 Utilize as operações elementares para computar a **Nova Solução Básica** e volte para o Passo 3.

Introdução à Otimização - BCC 342.O Algoritmo Simplex

20 / 32

Notas

Definições Forma Padrão Soluções Básicas Simplex

Exemplo - Móveis *Dakota*

A empresa *Dakota* fabrica Mesas, Armários e Cadeiras. A manufatura de cada um desses móveis utiliza madeira e dois tipos de trabalho: acabamento e carpintaria. A necessidade de cada recurso é dada abaixo:

Recurso	Mesa	Armário	Cadeira
Madeira (m^2)	8	6	1
Acabamento (horas)	4	2	1,5
Carpintaria (horas)	2	1,5	0,5

Tem-se disponível 48 m^2 de madeira, 20 horas de acabamento e 8 horas de carpintaria. As mesas são vendidas por \$ 60, armários por \$ 30 e cadeira por \$ 20. A empresa acredita que a demanda por mesas e cadeiras é ilimitada, enquanto que no máximo 5 armários serão vendidos.

Introdução à Otimização - BCC 342.O Algoritmo Simplex

21 / 32

Notas

Móveis Dakota

$$\begin{aligned}
 \max z &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\
 \text{s.t. : } & 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \leq 20 \\
 & 2x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 \leq 8 \\
 & x_2 \leq 5 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$



Notas

Forma Padrão

Linha						
0	z	-60x ₁	-30x ₂	-20x ₃		= 0
1		8x ₁	+6x ₂	+1x ₃	+x ₄	= 48
2		4x ₁	+2x ₂	+1,5x ₃	+x ₅	= 20
3		2x ₁	+1,5x ₂	+0,5x ₃	+x ₆	= 8
4			x ₂		+x ₇	= 5



Notas

Primeira Solução Básica Factível

Linha						Variáveis Básicas
0	z	-60x ₁	-30x ₂	-20x ₃		= 0 z=0
1		8x ₁	+6x ₂	+1x ₃	+x ₄	= 48 x ₄ =48
2		4x ₁	+2x ₂	+1,5x ₃	+x ₅	= 20 x ₅ =20
3		2x ₁	+1,5x ₂	+0,5x ₃	+x ₆	= 8 x ₆ =8
4			x ₂		+x ₇	= 5 x ₇ =5

$$\begin{aligned}
 \text{VNB} &= x_1, x_2, x_3 \\
 z &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3
 \end{aligned}$$

Quem entra ?

x₁ possibilita maior ganho por unidade e será aumentado.

Até qual limite ?



Notas

Definições Forma Padrão Soluções Básicas Simplex

Limite para Aumento de x_1

Linha	Variáveis Básicas
0 z -60 x_1 -30 x_2 -20 x_3 = 0 z=0	
1 8 x_1 +6 x_2 +1 x_3 + x_4 = 48 $x_4=48$	
2 4 x_1 +2 x_2 +1,5 x_3 + x_5 = 20 $x_5=20$	
3 2 x_1 +1,5 x_2 +0,5 x_3 + x_6 = 8 $x_6=8$	
4 x_2 + x_7 = 5 $x_7=5$	

LIMITES

LINHA	RESTRIÇÃO	MÁX x_1
1	$x_4 = 48 - 8x_1$ $x_4 \geq 0$	$48/8$
2	$x_5 = 20 - 4x_1$ $x_5 \geq 0$	$20/4$
*3	$x_6 = 8 - 2x_1$ $x_6 \geq 0$	$8/2$
4	x_1 NÃO APARECE $x_7 \geq 0$	∞

* limite mais apertado

Introdução à Otimização - BCC 342. O Algoritmo Simplex

25 / 32

Notas

Definições Forma Padrão Soluções Básicas Simplex

Calculando a Nova Base

Linha	Variáveis Básicas
0 z -60 x_1 -30 x_2 -20 x_3 = 0 z=0	
1 8 x_1 +6 x_2 +1 x_3 + x_4 = 48 $x_4=48$	
2 4 x_1 +2 x_2 +1,5 x_3 + x_5 = 20 $x_5=20$	
3 2 x_1 +1,5 x_2 +0,5 x_3 + x_6 = 8 $x_6=8$	x_6, x_1
4 x_2 + x_7 = 5 $x_7=5$	

Na linha 3 a variável x_6 sairá da base e entrará a variável x_1 .

PIVOTEAMENTO:

Executam-se as operações elementares para que x_1 apareça com coeficiente 1 nessa linha e com coeficiente 0 em todas as outras. A linha 3 é dita linha pivô.

Introdução à Otimização - BCC 342. O Algoritmo Simplex

26 / 32

Notas

Definições Forma Padrão Soluções Básicas Simplex

Nova SBF

Linha	Variáveis Básicas
0 z +15 x_2 -5 x_3 +30 x_6 = 240 z=240	
1 - x_3 + x_4 -4 x_6 = 16 $x_4=16$	
2 - x_2 +0,5 x_3 + x_5 -2 x_6 = 4 $x_5=4$	
3 x_1 +0,75 x_2 +0,25 x_3 +0,5 x_6 = 4 $x_1=4$	
4 x_2 + x_7 = 5 $x_7=5$	

É ótima ?

Se não, quem entra e quem sai da base ?

Introdução à Otimização - BCC 342. O Algoritmo Simplex

27 / 32

Notas

Definições Forma Padrão Soluções Básicas Simplex

Pivoteamento

Linha						Variáveis Básicas
0	z	+15x ₂	-5x ₃	+30x ₆	= 240	z=240
1			-x ₃ +x ₄	-4x ₆	= 16	x ₄ =16
2		-x ₂ +0,5x ₃	+x ₅	-2x ₆	= 4	↓ x ₅ ↑ x ₃
3	x ₁	+0,75x ₂ +0,25x ₃		+0,5x ₆	= 4	x ₁ =4
4		x ₂		+x ₇	= 5	x ₇ =5

Introdução à Otimização - BCC 342.O Algoritmo Simplex 28 / 32

Notas

Definições Forma Padrão Soluções Básicas Simplex

Nova SBF

Linha						Variáveis Básicas
0	z	+5x ₂		+10x ₅ +10x ₆	= 280	z=280
1		-2x ₂	+x ₄	+2x ₅ -8x ₆	= 24	x ₄ =24
2		-2x ₂ +x ₃		+2x ₅ -4x ₆	= 8	x ₃ =8
3	x ₁	+1,25x ₂		-0,5x ₅ +1,5x ₆	= 2	x ₁ =2
4		x ₂		+x ₇	= 5	x ₇ =5

função objetivo: $max z = -5x_2 - 10x_5 - 10x_6$
sem variáveis atrativas

SOLUÇÃO ÓTIMA (x_1, \dots, x_3) : (2, 0, 8)
BASE ÓTIMA (x_1, \dots, x_7) : (2, 0, 8, 24, 0, 0, 5)

Introdução à Otimização - BCC 342.O Algoritmo Simplex 29 / 32

Notas

Definições Forma Padrão Soluções Básicas Simplex

Base Ótima - Informações

Linha						Variáveis Básicas
0	z	+5x ₂		+10x ₅ +10x ₆	= 280	z=280
1		-2x ₂	+x ₄	+2x ₅ -8x ₆	= 24	x ₄ =24
2		-2x ₂ +x ₃		+2x ₅ -4x ₆	= 8	x ₃ =8
3	x ₁	+1,25x ₂		-0,5x ₅ +1,5x ₆	= 2	x ₁ =2
4		x ₂		+x ₇	= 5	x ₇ =5

Custo Reduzido (CR)

Indicado na linha 0 significa: quanto o aumento de uma unidade em cada variável pode reduzir a f.o. z

- VB tem CR 0 na base ótima
- VNB (ex. x₂) na base ótima com 5 indica que aumentar x₂ em 1 pode diminuir em 5 unidades a f.o.

Introdução à Otimização - BCC 342.O Algoritmo Simplex 30 / 32

Notas

Definições Forma Padrão Soluções Básicas Simplex

Base Ótima - Informações

RESTRITÕES ATIVAS - *Binding Constraints*

Restrições com variável de folga igual a zero.

Linha					Variáveis Básicas	Var. Folga	Restrição Original
1	$-2x_2$	$+x_4$	$+2x_5$	$-8x_6$	$= 24$	$x_4=24$ $x_5=24$	$+8x_1+6x_2+x_3 \leq 48$
2	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_5$	$-4x_6$	$= 8$	$x_3=8$ $x_5=0$	$+4x_1+2x_2+1,5x_3 \leq 20$
3	x_1	$+1,25x_2$	$-0,5x_5$	$+1,5x_6$	$= 2$	$x_1=2$ $x_6=0$	$+2x_1+1,5x_2+0,5x_3 \leq 8$
4	x_2				$+x_7 = 5$	$x_7=5$ $x_7=5$	$x_2 \leq 5$

As restrições 2 e 3, (horas de acabamento e carpintaria) são as únicas que estão limitando o aumento do lucro.

Introdução à Otimização - BCC 342.O Algoritmo Simplex

31 / 32

Notas

Definições Forma Padrão Soluções Básicas Simplex

Base Ótima - Informações

RESTRITÕES INATIVAS - *Non-binding Constraints*

Restrições com variável de folga > 0 .

Linha					Variáveis Básicas	Var. Folga	Restrição Original
1	$-2x_2$	$+x_4$	$+2x_5$	$-8x_6$	$= 24$	$x_4=24$ $x_5=24$	$+8x_1+6x_2+x_3 \leq 48$
2	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_5$	$-4x_6$	$= 8$	$x_3=8$ $x_5=0$	$+4x_1+2x_2+1,5x_3 \leq 20$
3	x_1	$+1,25x_2$	$-0,5x_5$	$+1,5x_6$	$= 2$	$x_1=2$ $x_6=0$	$+2x_1+1,5x_2+0,5x_3 \leq 8$
4	x_2				$+x_7 = 5$	$x_7=5$ $x_7=5$	$x_2 \leq 5$

As restrições 1 e 4, (qtd. de madeira e demanda de armários) são restrições **com folga**. Ter mais madeira, por exemplo, não vai permitir uma produção maior.

Introdução à Otimização - BCC 342.O Algoritmo Simplex

32 / 32

Notas

Notas
