


Otimização Pesquisa Operacional Prob. da Dieta Método Gráfico

Introdução à Otimização

INTRODUÇÃO

Haroldo Gambini Santos
Universidade Federal de Ouro Preto

14 de março de 2011




Introdução à Otimização, INTRODUÇÃO 1 / 26

Notas

Otimização Pesquisa Operacional Prob. da Dieta Método Gráfico

Conteúdo

- 1 Otimização
- 2 Pesquisa Operacional
- 3 Prob. da Dieta
- 4 Método Gráfico




Introdução à Otimização, INTRODUÇÃO 2 / 26

Notas

Otimização Pesquisa Operacional Prob. da Dieta Método Gráfico

Introdução

- selecionar a melhor entre um conjunto de alternativas;
- ramo da matemática aplicada:
 - teoria
 - algoritmos
 - aplicações



Introdução à Otimização, INTRODUÇÃO 3 / 26


Notas

Otimização Pesquisa Operacional Prob. da Dieta Método Gráfico

Introdução

Um Problema:

- objetivo:
 - encontrar o maior número primo
- restrição:
 - com 3 casas decimais
- solução ótima:
 - 997



Introdução à Otimização, INTRODUÇÃO

4 / 26

Notas

Otimização Pesquisa Operacional Prob. da Dieta Método Gráfico


Introdução

Formato

- função objetivo:
 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
- restrições que definem o conjunto de soluções válidas:
 $S \subseteq \mathbb{R}^n$
(normalmente um conjunto de equações/desigualdades lineares ou não lineares)

Resolvendo

Encontrar $x^* \in S$, a solução ótima, que minimiza/maximiza f



Introdução à Otimização, INTRODUÇÃO


5 / 26

Notas

Otimização Pesquisa Operacional Prob. da Dieta Método Gráfico

Otimização ...

- Linear
 $x_1 + 3x_2 \dots$
- Não Linear
 $\text{seno}(x_1) + 3x_2 \dots$
- Contínua
 $x \in \mathbb{R}^n$
- Discreta
 $x \in \mathbb{Z}^n$
- Multicritério
- ...



Introdução à Otimização, INTRODUÇÃO

6 / 26


Notas

Otimização **Pesquisa Operacional** Prob. da Dieta Método Gráfico

Pesquisa Operacional

Ramo da Ciência que lida com a otimização do desempenho de sistemas.

- Otimizar
 - maximizar lucro
 - maximizar satisfação
 - minimizar custos
 - minimizar riscos
 - ...



Introdução à Otimização, INTRODUÇÃO


7 / 26

Notas

Otimização **Pesquisa Operacional** Prob. da Dieta Método Gráfico

Pesquisa Operacional: Origens Históricas

- Início formal: II Grande Guerra
 - Exército britânico:
 - \cong 1000 funcionários no cargo de Cientista de Pesquisa Operacional
 - grupo altamente interdisciplinar
 - Problemas resolvidos na pelo grupo:
 - Localização de radares
 - Determinação do tamanho de frotas de navios
 - Detecção de submarinos
 - Rapidamente implementado pelos países aliados



Introdução à Otimização, INTRODUÇÃO

8 / 26

Notas


Otimização **Pesquisa Operacional** Prob. da Dieta Método Gráfico

Pesquisa Operacional: Definição

*Pesquisa Operacional (PO) ou Ciência do Gerenciamento estuda as operações de uma organização e utiliza modelos **matemáticos** e/ou **computacionais** ou outras abordagens analíticas para encontrar maneiras **melhores** de realizá-las.*

The Science of Better

http://www.scienceofbetter.org/



Introdução à Otimização, INTRODUÇÃO

9 / 26

Notas

Construindo um Modelo

- interesse em **modelar matematicamente** o processo de decisão:

Parar com o:



E começar a formalizar:

$$x_1 + x_4 + x_7 \leq 10$$

$$x_3 - x_5 \geq 5$$

...



Notas

O Modelo

Variáveis de Decisão

- variáveis para as quais se tem liberdade para escolha de **quais valores** as mesmas irão receber.

Exemplo

Planejamento de produção GAS combustíveis para o segundo semestre:

x_1 quantidade em milhares de litros de gasolina que será produzida;

x_2 quantidade em milhares de litros de diesel que será produzido.



Notas

O Modelo

Dados de Entrada

Ou **variáveis não controladas**.

Variáveis cujos valores são decididos em sistemas que ficam fora do controle do tomador de decisões.

Exemplo

Planejamento da Produção:

- custos de matéria prima;
- custos trabalhistas;
- disponibilidade de matéria prima.



Notas

Programação Linear



George Dantzig

- Teoria matemática: Kantorovich, 1939 (lhe rendeu um Nobel)
- 1940: Algoritmo Simplex desenvolvido por Dantzig
- Técnica poderosa (capaz de modelar muitos problemas)
- Algoritmo Simplex
 - executa operações elementares sobre matrizes
 - essas operações são repetidas muitas vezes
 - tedioso de resolver a mão
- felizmente: nascimento do computador eletrônico também nos anos 40 !



Notas

Programação Linear

Utilização Pós-Guerra

- Crescente utilização no comércio e indústria
- Moscow, 1958, planejamento do transporte de areia de construção:
 - 10 pontos de origem
 - 230 pontos de destino
 - 10 dias de um computador *Strena*
 - 11% de economia



Notas

Programação Linear

Utilização Pós-Guerra

- Rijkswaterstaat da Noruega, 1986, definição da política de gerenciamento de água
 - 15 milhões economizados anualmente
- Eletrobrás, CEPEL, 1986 alocação ótima de recursos térmicos e hidráulicos no sistema nacional gerador de energia
 - 43 milhões economizados anualmente



Notas

Programa Linear - Formato

Função Objetivo

- Minimizar** custo, tempo, risco, poluição, ... *ou*
- Maximizar** lucro, qualidade, segurança, ... *ou*
- Encontrar** qualquer solução viável (que atenda alguns requisitos)

Restrições

- Disponibilidade** de recursos, ...
- Operacionais** horários de trabalho, tempo de máquina, ...
- Límites** venda em escala, ...



Notas

Programação Linear - Exemplo: O Problema da Dieta

Para uma boa alimentação, o corpo necessita de **vitaminas e proteínas**.

A necessidade **mínima** de vitaminas é de 32 unidades por dia e a de proteínas de 36 unidades por dia.



Uma pessoa tem disponível **carne e ovos** para se alimentar. Cada unidade de carne contém 8 unidades de vitamina e 6 unidades de proteínas. Cada unidade de ovo contém 4 unidades de vitamina e 6 unidades de proteínas.

Cada unidade de carne **custa** 3 unidades monetárias e cada unidade de ovo custo 2,5 unidades monetárias.

Qual a quantidade diária de carne e ovos que deve ser consumida para **suprir as necessidades** de vitaminas e proteínas com **menor custo possível** ?



Notas

Programação Linear - Exemplo: O Problema da Dieta

Variáveis de Decisão

- x_1 quantidade que será comprada de carne
- x_2 quantidade que será comprada de ovos

Custo de uma solução

- Preço da carne: 3
- Preço dos ovos: 2,5

$$3x_1 + 2,5x_2$$



Notas

Otimização Pesquisa Operacional **Prob. da Dieta** Método Gráfico

Programação Linear - Exemplo: O Problema da Dieta

A solução tem que satisfazer os requerimentos nutricionais:

Nutriente	Quantidade	Mínima
Vitaminas	32	
Proteínas	36	

Restrições

	Carne	Ovos	
vitaminas	$8x_1$	$4x_2$	≥ 32
proteínas	$6x_1$	$6x_2$	≥ 36

Introdução à Otimização, INTRODUÇÃO 19 / 26

Notas

Otimização Pesquisa Operacional **Prob. da Dieta** Método Gráfico

Prob. da Dieta - O Modelo

Minimize:

$$3x_1 + 2,5x_2$$

Sujeito a:

$$8x_1 + 4x_2 \geq 32$$

$$6x_1 + 6x_2 \geq 36$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Introdução à Otimização, INTRODUÇÃO 20 / 26

Notas

Otimização Pesquisa Operacional Prob. da Dieta **Método Gráfico**

O Método Gráfico

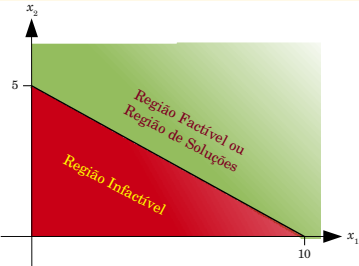
Trabalhando com problemas de 2 variáveis, podemos visualizar um PL no plano cartesiano, do seguinte modo:

- soluções são representadas por pontos no gráfico;
- restrições indicam regiões do gráfico onde as soluções são válidas.

Introdução à Otimização, INTRODUÇÃO 21 / 26

Notas

Método Gráfico - Restrições



Desenhando $x_1 + 2x_2 \geq 10$
 Considere $x_1 + 2x_2 = 10$
 para $x_1 = 0$ temos que $x_2 = 5$
 para $x_2 = 0$ temos que $x_1 = 10$

A restrição divide o gráfico em dois semiplanos.
 Somente um deles conterá a solução ótima.
 ex.: $x_1 = 0, x_2 = 0$ é válido?



Notas

Método Gráfico - Exemplo

A Roça

Um pequeno agricultor está decidindo quantos sacos de sementes irá plantar nessa semana de soja e de milho.

O mesmo dispõe de 350 reais. O custo do saco de sementes de soja é 70 reais e o custo do saco de sementes de milho é de 50 reais.

Para buscar as sementes o agricultor tem uma picape capaz de carregar 400 kilos. Cada saco de sementes de soja pesa 50 quilos e cada saco de sementes de milho pesa 80 kilos.

Consultando o vendedor, ele verificou que o vendedor somente dispõe de 4 sacos de soja, enquanto que tem uma grande quantidade de sacos de milho.

Olhando no mercado local, o agricultor calculou que irá lucrar na época da colheita 300 reais por saco de soja e 280 reais por saco de milho plantados.

Quantos sacos o mesmo deve plantar de cada um para maximizar o seu lucro ?



Notas

O Gráfico

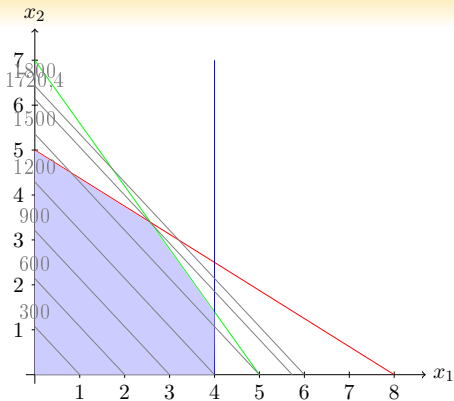
Variáveis:
 x_1 soja
 x_2 milho

Restrições:
 dinheiro (350)
 soja 70
 milho 50
 $70x_1 + 50x_2 \leq 350$

peso (400)
 soja 50
 milho 80
 $50x_1 + 80x_2 \leq 400$

disponibilidade
 soja 4
 $x_1 \leq 4$

Lucro:
 $300x_1 + 280x_2$



Notas

Espaço de Soluções

Exemplo 2

1 desenhe no gráfico a região factível (região de soluções) que satisfaz as restrições abaixo:

$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + x_2 \geq 16$$

$$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0$$



Notas

Espaço de Soluções

Exercício

1 desenhe no gráfico a região factível (região de soluções) que satisfaz as restrições abaixo:

$$5x_1 + 2x_2 \geq 25$$

$$4x_1 - 3x_2 \geq -3$$

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_2 \geq 0$$



Notas

Notas
