

## Teoria dos Grafos - BCC 204 SUBCONJUNTOS ESPECIAIS

Haroldo Gambini Santos

Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP

10 de maio de 2011



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

## Alocação de Exames de Final de Curso

### Descrição

Deseja-se alocar o **maior número de exames** em um **mesmo período**. Essa alocação não deve, no entanto, impossibilitar que algum aluno realize o exame, ou seja, se dois exames possuem algum aluno em comum os mesmos devem estar em períodos diferentes.

### Modelo

Vértices exames

Arestas indicam que dois exames possuem algum alunos em comum



Notas

---

---

---

---

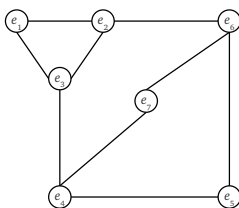
---

---

---

---

## Alocação de Exames de Final de Curso



Selecione o maior conjunto de exames que pode ser realizado ao mesmo tempo.



Notas

---

---

---

---

---

---

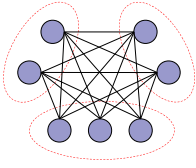
---

---

# Conjunto Independentes

## Definição

Um conjunto independente de um grafo  $G$  é um subconjunto de vértices no qual não existam dois vértices adjacentes.



$$\alpha(G) = 3$$

## Número de Independência

O número de independência  $\alpha(G)$  é a cardinalidade do conjunto independente máximo.



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

# Construção de um Conjunto Independente Máximo

## Algoritmo Guloso Simples

- 1 selecione um nó ainda não considerado;
- 2 se o mesmo não conflitar com nós já adicionados, inclua-o no conjunto;
- 3 se houverem nós ainda não considerados volte para 1.



Notas

---

---

---

---

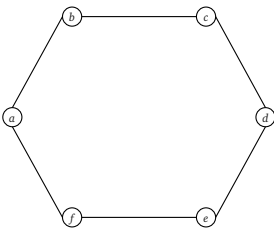
---

---

---

---

# Execução de Exemplo I



Execução considerando os nós em ordem alfabética:

- |                |                |
|----------------|----------------|
| $a$ : OK       | $d$ : conflito |
| $b$ : conflito | $e$ : OK       |
| $c$ : OK       | $f$ : conflito |

Conjunto independente  $S = \{a, c, e\}$ ,  
 $|S| = 3$



Notas

---

---

---

---

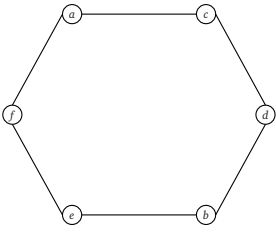
---

---

---

---

### Execução de Exemplo II



Mesmo grafo, rótulos diferentes:

- a : OK
- b : OK
- c : conflito
- d : conflito
- e : conflito
- f : conflito

Conjunto independente  $S = \{a, b\}$ ,  $|S| = 2$

Este **não é** o Conjunto Independente **Máximo**, mas não podemos adicionar nenhum outro nó sem desfazer escolhas já feitas. Denominados o mesmo de Conjunto Independente **Maximal**.



Notas

---

---

---

---

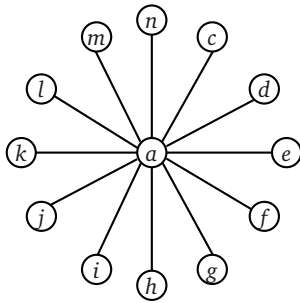
---

---

---

---

### Falhando Miseravelmente



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

### Conjuntos Independentes e Cliques

Encontrar o *conjunto independente máximo* é equivalente a encontrar o *clique máximo* em um grafo.

#### Explique



Notas

---

---

---

---

---

---

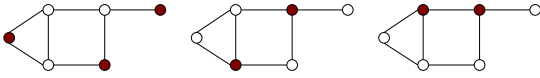
---

---

# Conjuntos Dominantes

## Definição

Um *conjunto dominante* é um subconjunto de vértices tal que todo vértice do grafo está no conjunto ou é adjacente a um de seus vértices.



## Número de Dominação

O *número de dominação*  $\gamma(G)$  é a cardinalidade do menor conjunto dominante de  $G$ .



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

# Aplicação

## Câmeras de Vigilância

Deseja-se instalar um número mínimo de câmeras que cubram todos os pontos que devem ser vigiados.



Notas

---

---

---

---

---

---

---

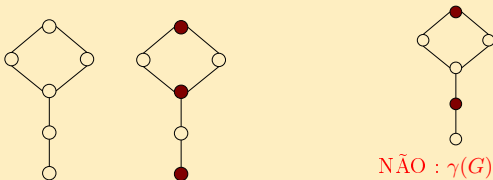
---

# Um Algoritmo Heurístico para Determinar $\gamma(G)$

## Idéia

Selecionar em seqüência os vértices com *maior grau* (que cobrem uma quantidade maior de vértices), até que se obtenha um conjunto dominante.

## Funciona ?



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

# Conjuntos Dominantes

### Teorema

Se  $S \in V$  é um conjunto dominante minimal de um grafo conexo  $G = (V, E)$ , então  $V \setminus S$  também é.

### Demonstração

Pelas condições do teorema, todos os vértices de  $V \setminus S$  também são adjacentes a um vértice de  $S$ . Pela minimalidade, todo vértice  $v$  de  $S$  também é adjacente a algum vértice de  $V \setminus S$ , senão  $S \setminus \{v\}$  seria também dominante. Logo,  $V \setminus S$  também é dominante.

### Implicação

Máximo de  $\frac{n}{2}$  elementos no conjunto dominante mínimo.



Notas

---

---

---

---

---

---

---

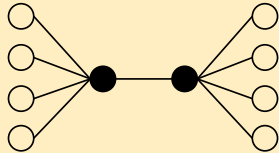
---

# Conjuntos Dominantes e Conjuntos Independentes

### Observação

- Um Conjunto Independente Maximal é sempre Dominante
- Um Conjunto Dominante Mínimo pode não ser Independente

### Exemplo



Notas

---

---

---

---

---

---

---

---

Notas

---

---

---

---

---

---

---

---