Teoria dos Grafos - BCC204
Planaridade

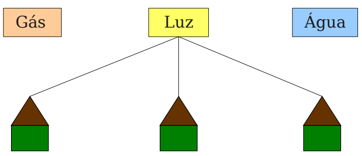
Haroldo Gambini Santos

Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP

29 de maio de 2011

Notas

Oferta de Serviços



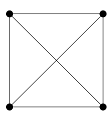
Podemos oferecer os demais serviços para as residências sem que as linhas se cruzem ?

Notas

Grafo Planar

Definição

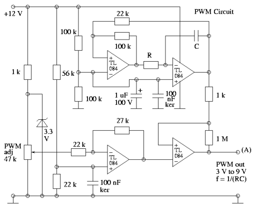
Um grafo G é planar se existir uma representação gráfica de G no plano sem cruzamento de arestas.



K_4 é planar ?

Notas

Grafos Planares - Aplicação de Exemplo

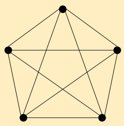


- vértices: portas lógicas (*gates*)
- arestas: fios entre os *gates*
- encontrar um desenho do circuito sem cruzamento de fios

Notas

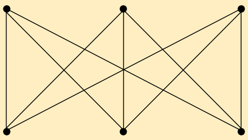
Grafos de Kuratowski

K_5



Grafo não planar com menor número de **vértices**.

$K_{3,3}$



Grafo não planar com menor número de **arestas**.

Notas

Grafos de Kuratowski

O que K_5 e $K_{3,3}$ têm em comum:

- ambos são regulares
- ambos são não planares
- a remoção de <u>uma</u> aresta ou um vértice torna o grafo planar
- K_5 é o grafo não-planar com o menor número de vértices e o $K_{3,3}$ com o menor número de arestas

Notas

Planaridade

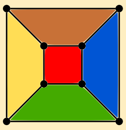
Teorema:
Qualquer grafo planar simples pode ter sua representação planar utilizando apenas **linhas retas**.

Notas

Região ou Face

Definição
Seja G um grafo planar, uma **Face** é uma região G limitada por algumas arestas de G.

Exemplo
No grafo abaixo temos 6 faces. A última face é o exterior do grafo que também é chamada de *Face Infinita*.



Notas

Planaridade

Teorema (Fórmula de Euler):
Seja G um grafo conexo com

- n vértices
- m arestas
- f faces

temos que :

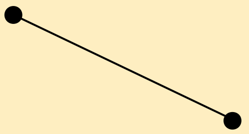
$$n - m + f = 2$$

Implicação: apesar das inúmeras maneiras de se desenhar um grafo no plano, o número de faces irá permanecer o mesmo.

Notas

$n - m + f = 2$

Prova



G_1

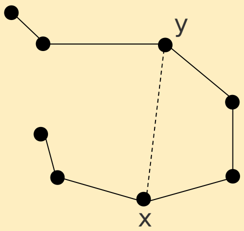
A Fórmula de Euler é válida para G_1.

É fácil mostrar que a fórmula de Euler é válida para qualquer árvore, ou seja, um grafo onde $m = n - 1$ e $f = 1$.

Notas

$n - m + f = 2$

Prova (cont.)



Se G é conexo, então a adição de uma nova aresta a cria um ciclo e, por consequência, uma nova face em G.

Ou seja, adicionar arestas em uma árvore (onde a fórmula de Euler está correta), não modifica o valor obtido pela fórmula.

Notas

A Fórmula de Euler

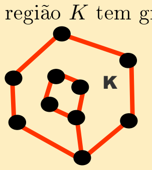
Corolário

Se G é um grafo planar conexo com $m > 1$, então

$$m \leq 3n - 6$$

Prova (p.1)

Defina o grau de uma face como o número de arestas nos seus limites. Se uma aresta aparece duas vezes pelo limiar, então conte duas vezes. Ex.: A região K tem grau 12.



Notas

A Fórmula de Euler

Corolário

Se G é um grafo planar conexo com $m > 1$, então

$$m \leq 3n - 6$$

Prova (p.2)

Note que nenhuma face pode ter menos do que grau 3 (trabalhamos com grafos simples).

$2m =$ soma dos graus das faces $\geq 3f$ ou seja $f \leq \frac{2}{3}m$

Combinando a desigualdade acima com a Fórmula de Euler temos:

$$\frac{2}{3}m \geq f = m - n + 2$$

resolvendo para m temos:

$$\frac{2}{3}m \geq f = m - n + 2$$

$$m \leq 3n - 6$$

Notas

A Fórmula de Euler

Exercício

Encontre um exemplo de Grafo com

$$m \leq 3n - 6$$

que não seja planar.

Notas

Exercícios

1. Prove matematicamente que os grafos K_5 e $K_{3,3}$ não são planares.
2. Prove que em um grafo planar com n vértices, existe pelo menos 1 vértice de grau menor ou igual a 5.
3. Encontre o número de arestas de um grafo no qual toda região é limitada por exatamente k arestas.
4. Mostre que se um grafo simples G tem pelo menos 11 vértices, ambos G e seu complemento não podem ser planares.

Notas

Detecção de Planaridade

Em um grafo G podemos, com segurança, contrair todos os vértices de grau 2 sem afetar sua planaridade. Esse processo é chamado de Redução Elementar.

Depois dessa operação, o grafo resultante H é:

1. uma única aresta;
2. um grafo completo com 4 vértices; ou
3. um grafo com $n \geq 5$ e $m \geq 7$.

- se H estiver nas condições 1 ou 2 ele é planar, senão, continua-se a investigação.

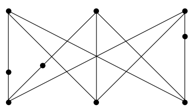
Notas

Homeomorfismo

Definição

Dizemos que um grafo H é homeomorfo a G se H puder ser obtido de G pela inserção de vértices de grau 2 em pontos intermediários de suas arestas.

De outro modo: dois grafos G_1 e G_2 são homeomorfos se os grafos H_1 e H_2 obtidos a partir da redução elementar de G_1 e G_2, respectivamente, forem isomorfos.

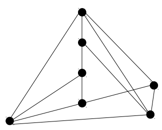


Notas

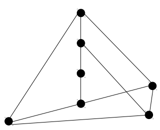
Detecção de Planaridade

Teorema de Kuratowski, 1930

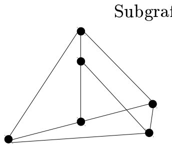
Um grafo é planar se e somente se nenhum de seus subgrafos for homeomorfo a K_5 ou em $K_{3,3}$.



G



Subgrafo de G



Contração do subgrafo

Notas

Planar Maximal

Definição

Um grafo planar G é chamado Planar Maximal se, para cada par (i, j) de vértices não adjacentes o grafo $G + (i, j)$ não é planar.

Notas

Dualidade

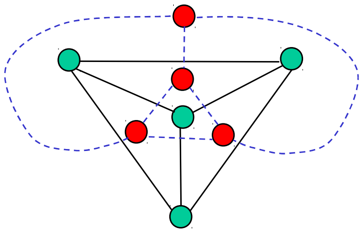
Dado um grafo G planar, o grafo G^* chamado dual de G, é construído da seguinte forma:

- para cada face f de G, G^* tem um vértice
- una os dois vértices de G^* da seguinte forma:
  - se 2 regiões f_i e f_j são adjacentes (possuem alguma aresta em comum) coloque uma aresta entre v_i e v_j interceptando a aresta em comum;
  - se existir mais de uma aresta em comum entre f_i e f_j coloque uma aresta entre v_i e v_j para cada aresta em comum;
  - se uma aresta está inteiramente em uma região, f_k, coloque um loop no vértice v_k.

O termo dual se justifica pois $G^{**} = G$

Notas

Dualidade



Notas

Dualidade

Todo dual de G é isomorfo a G^* ?

Notas

Exercícios

1. Qual o dual de um ciclo C_n ?
2. Qual o dual de uma roda R_n ?
3. Qual o dual de um cubo[1] ?
4. Mostre que o dual do K_4 é o próprio K_4. Dê outro exemplo de um grafo que é igual ao seu dual.
5. Prove se a seguinte afirmativa é verdadeira ou falsa e justifique: "Qualquer grafo que tenha n vértices ($n \leq 5$) e 1 vértice de grau 2 é planar".
6. Prove que toda região de um grafo planar maximal é um triângulo.

[1] um outro sólido platônico

Notas

Notas