UFOP, Universidade Federal de Ouro Preto - DECOM, Departamento de Computação

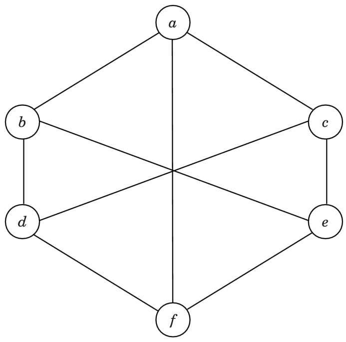
Teoria dos Grafos – BCC204

Professor: Haroldo Gambini Santos

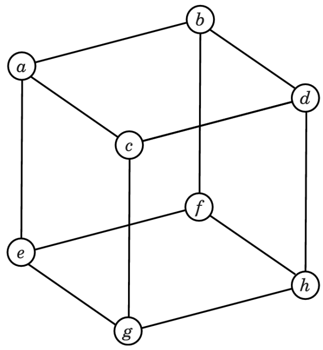
Lista de Exercícios II

Observação Geral: quando não especificado considere **grafos simples**.

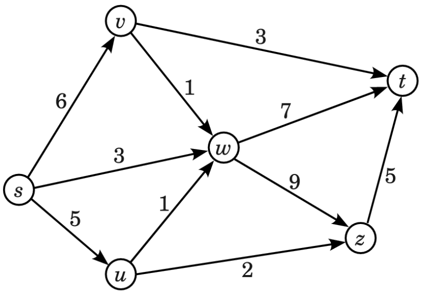
Grafos:



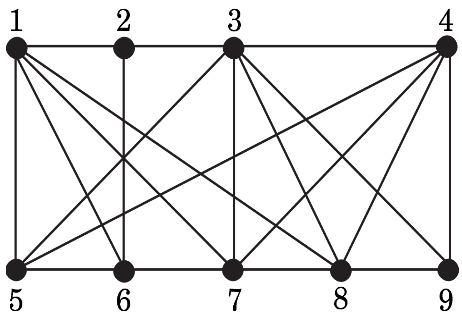
G_1



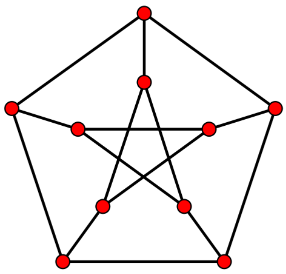
G_2



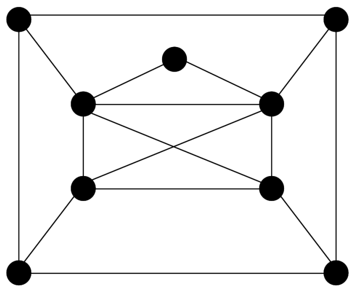
G_3



G_4



G_5



G_6

Questões:

1. Construa um grafo com a sequência de graus (4,4,3,3,3,3):

   a) que seja planar;

   b) que não seja planar.

2. K_5 e $K_{3,3}$ não são planares. Prove sua resposta.

3. O grafo G_1 é planar ? Prove sua resposta.

4. O grafo G_2 é planar ? Prove sua resposta.

5. Desenho o grafo dual do grafo G_2, denominado G_2^*.

6. Prove que em um grafo planar com n vértices, existe pelo menos 1 vértice de grau menor ou igual a 5.

7. Mostre que se um grafo simples G tem pelo menos 11 vértices, ambos G e seu complemento não po-

dem ser planares.

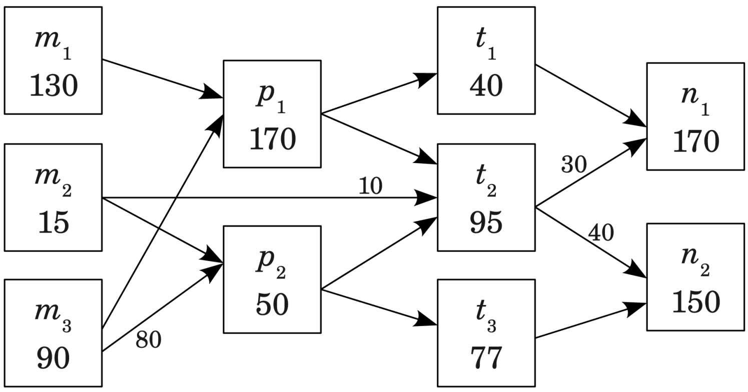
8. Prove que G_4 não é planar usando o teorema de Kuratowski.

9. Calcule, passo-a-passo, o fluxo máximo que pode ser escoado do nó s até o nó t no grafo G_3, usando o algoritmo de Ford & Fulkerson. Indique a cada iteração o valor das variáveis envolvidas.

10. Qual o corte mínimo que desconecta s–t no grafo G_3 ?

11. No esquema abaixo encontra-se representado o esquema de distribuição de uma companhia que trabalha com minério de ferro. Essa companhia conta com 3 minas m_1, m_2 e m_3; dois pátios de armazenamento: p_1 e p_2 e três terminais portuários: t_1, t_2 e t_3. Dentro dos retângulos está indicada a capacidade de produção/armazenamento, em toneladas, de terminais, pátios e minas, referentes a um mês. Os arcos representam os meios de transporte. Quando não indicado, sua capacidade é infinita. Neste momento encontram-se atracados 2 navios, n_1 e n_2, os quais devem ser carregados o mais rapidamente possível, sua demanda é indicada também dentro dos retângulos em toneladas.

    A companhia lhe procurou, informando que eles possuem uma implementação do algoritmo de Ford & Fulkerson (F & F), para resolução do problema do Fluxo Máximo, mas que o mesmo não aceita os dados no formato em que eles trabalham. Apresente como o problema deveria estar modelado, em um grafo, para que o mesmo possa ser resolvido pelo algoritmo de F & F.



12. Utilize os resultados de Kuratowski para mostrar que o Grafo de Petersen (G_5)não é planar.

13. A cintura g de um grafo indica o tamanho do menor ciclo existente no mesmo. Mostre que em um grafo planar temos:

$$m \leqslant \frac{(n-2)g}{g-2}$$

14. Mostre que um grafo planar G com $\Delta(G)=5$ tem no mínimo 12 vértices. De um exemplo de grafo planar com $\Delta(G)=5$ e $n=12$.

15. Mostre:

    a) que só existe uma forma (a menos de isomorfismo) de colorir C_5 com três cores.

    b) use o resultado anterior para provar que o número cromático do grafo de Petersen G_5 é maior ou igual a 3.

    c) exiba uma coloração mínima para grafo de Petersen.

16. Para muitos grafos pode-se ter uma estimativa do seu número cromático sem necessidade de se examinar o grafo por completo. Essas estimativas consistem em limites superiores e inferiores. Considere o número cromático $\chi(G_6)$: apresente 3 limites para o mesmo considerando apenas propriedades de sub-estruturas/elementos do grafo. Indique a sub-estrutura encontrada e o limite oferecido.

	Nome Estrutura	Limites		Componentes
		I nferior ou S uperior	Valor	
1				
2				
3				

17. Determine o número cromático $\chi(G_1)$, $\chi(G_2)$ e $\chi(G_5)$.

18. Considere o grafo de Petersen (G_5):

a) qual o número de independência do mesmo ?

b) utilize a) para apresentar um acoplamento (casamento) maximal de com 3 arestas.

c) use cadeias aumentantes para encontrar um acoplamento maximal com 4 arestas.

d) encontre um acoplamento máximo.

19. Um algoritmo guloso é um método que a cada passo toma uma decisão baseada em algum critério e não recua (desfaz decisões) jamais.

a) proponha um algoritmo guloso para o problema de coloração de vértices em grafos.

b) mostre um grafo $G=(V,A)$ com $|V|>2$ e $|A|>3$ onde o mesmo encontra a solução ótima, ou seja, o valor mínimo de k para o qual existe uma k coloração válida.

c) mostre um grafo $G=(V,A)$ com $|V|>2$ e $|A|>3$ onde o mesmo não encontra a solução ótima.

20. Indique um algoritmo guloso visto na disciplina que sempre encontra a solução ótima.

Legenda
$\delta(G)$: grau mínimo de G
$\Delta(G)$: grau máximo de G