

Teoria dos Grafos - BCC 204 PROBLEMAS DE INTERLIGAÇÃO

Haroldo Gambini Santos

Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP

31 de maio de 2011



Teoria dos Grafos - BCC 204, PROBLEMAS DE INTERLIGAÇÃO

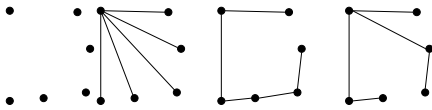
1 / 14

Notas

Árvores

Imagine que desejemos interligar 6 casas com uma rede elétrica. Ao fazê-lo, gostaríamos que duas regras fossem obedecidas:

- todos os pares de pontos devem ser ligados por ao menos um percurso;
- usaremos um mínimo possível de ligações.



- características das soluções:
 - 5 arestas
 - sem ciclos

Estes grafos são árvores.



Teoria dos Grafos - BCC 204, PROBLEMAS DE INTERLIGAÇÃO

2 / 14

Notas

Árvores

Definição

Grafo conexo e sem ciclos.

Características

Seja T uma árvore com n vértices, então:

- I. T é conexo e sem ciclos;
- II. T possui $n - 1$ arestas;
- III. cada aresta de T é uma ponte.

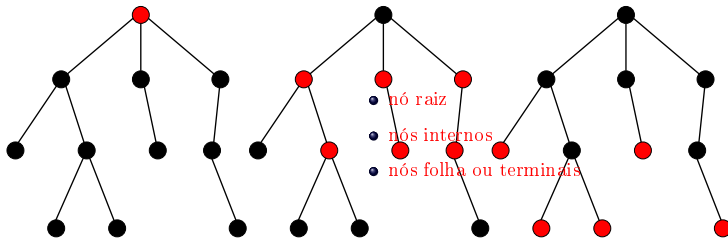


Teoria dos Grafos - BCC 204, PROBLEMAS DE INTERLIGAÇÃO

3 / 14

Notas

Nomenclatura



Notas

Árvores

Outros Termos

- pai/filho;
- ancestral, descendente;
- irmãos;
- nível de um nó: o comprimento do caminho de um nó até a raiz;
- altura da árvore: o maior nível existente na mesma.

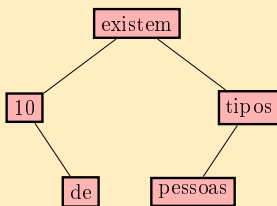


Notas

Aplicações de Exemplo

Árvores de Busca

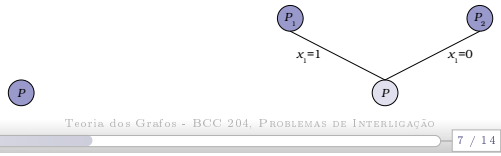
“Existem 10 tipos de pessoas no mundo, os computadores e os outros.”



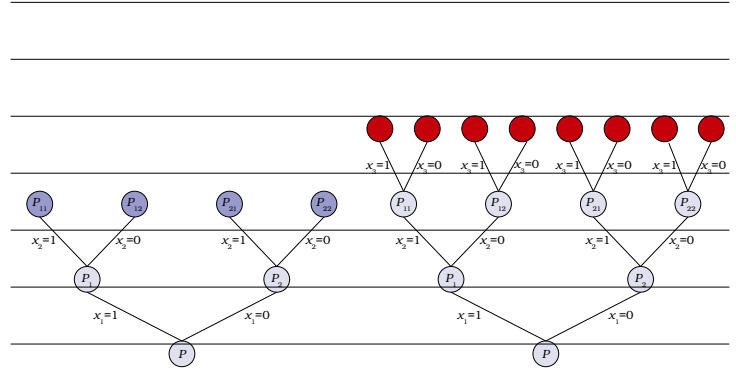
Notas

Árvore de Decisão

Ex.: Problema com 3 variáveis binárias: x_1, x_2, x_3 .
Problema original P Branch na variável x_1 , criam-se subproblemas P_1 e P_2 Branch na variável x_2 , criam-se subproblemas P_{11}, P_{12}, P_{21} e P_{22} Branch na variável x_3 leva as soluções completas



Notas



O Problema da Interligação

- como construir uma **rede de serviços**. ex.:
 - energia
 - telefone
 - ...
- todos os participantes devem ser alcançados
 - grafo conexo
- não irá se esbanjar dinheiro:
 - será construído um número mínimo de ligações de menor custo



Notas

Rede de Serviços

- Número de Ligações**
- 2 usuários: 1 ligação
 - 3 usuários: 2 ligações
 - ...
 - para cada novo usuário uma nova ligação
 - o menor número de ligações para n usuários é $n - 1$



Notas

Rede de Serviços

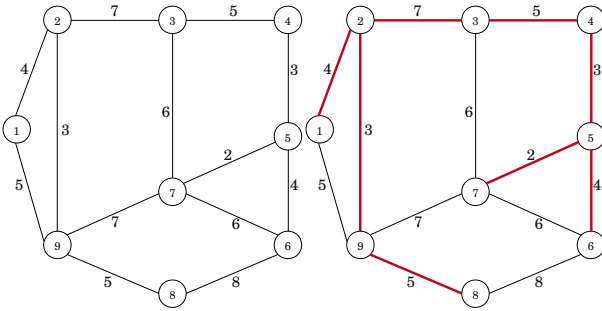
Custo das Ligações

- pelo bom senso, acredita-se que cada não serão feitas ligações diretas entre usuários distantes;
- por outro lado, nem sempre usuários próximos tem ligação barata (podem estar separados por um lago, por ex.);
- de maneira genérica deve-se observar um grafo com pesos indicando o custo de cada ligação;
- podem ser escolhidas as $n - 1$ arestas mais baratas ?



Notas

O Problema da Árvore Geradora de Custo Mínimo



Notas

O Algoritmo de Kruskal

Idéia

Incluir a cada iteração a aresta de menor custo que não formar ciclo. Processar $n - 1$ iterações.



Notas

O Algoritmo de Kruskal

Teorema

O algoritmo de Kruskal fornece uma solução ótima para o problema da Árvore geradora de custo mínimo.

Demonstração

Suponhamos que T não tenha peso mínimo. Então haverá uma árvore T' com custo menor do que T . Seja e a primeira aresta escolhida para T que não pertence a T' . Se adicionarmos e a T' obteremos um ciclo com a aresta e_k que não está em T . Retiramos a aresta e_k e temos uma árvore T'' com peso menor que T . Mas, nesse caso, e_k teria sido escolhida pelo algoritmo no lugar de e , o que mostra que o algoritmo constrói efetivamente uma árvore de menor peso.



Notas

O Algoritmo de Prim

Idéia

Formar uma árvore e a cada passo incluir a aresta de menor peso que ligue um vértice de fora da árvore a ela.



Notas

Notas
