

Introdução Exemplos Terminologia Representação

Teoria dos Grafos

BCC204

Haroldo Gambini Santos

Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP

15 de março de 2011



Teoria dos Grafos, BCC204 1 / 31

Notas

Introdução Exemplos Terminologia Representação

Conteúdo

- 1 Introdução
- 2 Exemplos
- 3 Terminologia
- 4 Representação



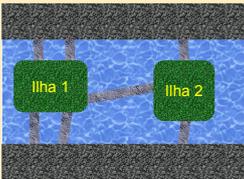
Teoria dos Grafos, BCC204 2 / 31

Notas

Introdução Exemplos Terminologia Representação

Histórico

1736: Euler e as Pontes de Königsberg



Pergunta:
Partindo de uma das margens, pode-se encontrar um percurso que passe somente **uma vez em cada ponte** e retorne ao ponto de partida ?

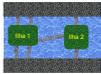
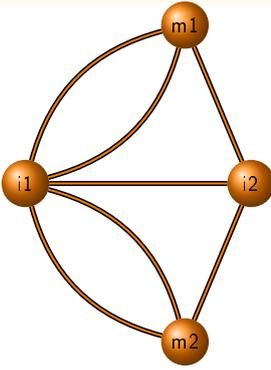


Teoria dos Grafos, BCC204 3 / 31

Notas

Introdução Exemplos Terminologia Representação

Pontes de Königsberg - O Grafo

Teoria dos Grafos, BCC204

4 / 31

Notas

Introdução Exemplos Terminologia Representação

Grafos

Representação **concisa** e **precisa** de inúmeros problemas computacionais

Teoria dos Grafos, BCC204

5 / 31

Notas

Introdução Exemplos Terminologia Representação

Grafos

Definição Formal

Grafo $G = (V, A)$

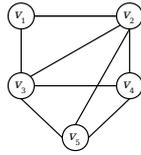
- Conjunto V com n **vértices** (também chamados nós)
 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- Conjunto A com m **arestas** ou **arcos**
 $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

Teoria dos Grafos, BCC204

6 / 31

Notas

GND - Grafo Não Direcionado

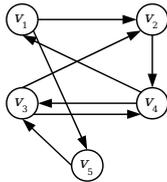


- Ligações expressas em **Arestas** —
- Se o vértice a está ligado a b , a recíproca é verdadeira
- Cada aresta é representada por um conjunto $\{v_1, v_2\}$, indicando os dois vértices envolvidos



Notas

GD - Grafo Direcionado



- Ligações expressas em **Arcos** →
- Cada arco é representada por um par ordenado (v_1, v_2) , indicando os dois vértices envolvidos



Notas

Grafos - Ex. 1: Redes Sociais

- Vértices - pessoas que interagem:
 - Estudantes em uma universidade
 - Empregados de uma empresa
 - Residentes em uma cidade
 - ...
- Arestas:
 - Se duas pessoas fizeram alguma disciplina juntas
 - Se duas pessoas já trocaram e-mail
 - ...



Notas

Grafos - Ex. 1: Redes Sociais

Chains of Affection

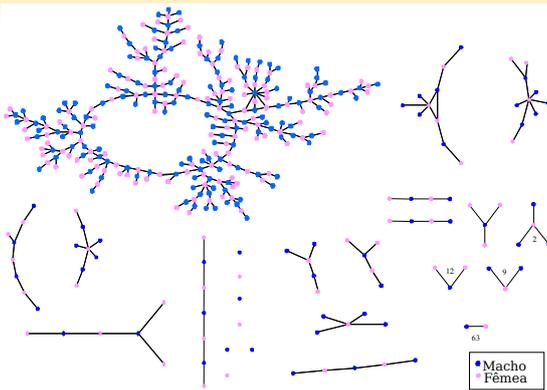
Peter Bearman, James Moody, and Katherine Stovel. Chains of affection: The structure of adolescent romantic and sexual networks. American Journal of Sociology, 110(1):44- 99, 2004.

Pesquisa com 800 estudantes de uma escola secundária americana.



Notas

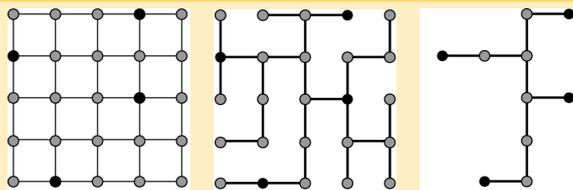
Chains of Affection



Notas

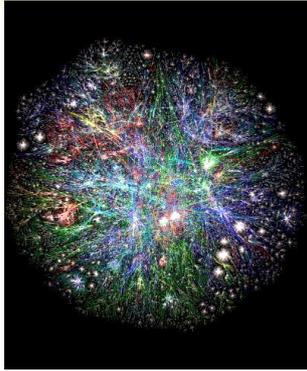
Grafos - Ex. 2: Projeto VLSI

O Problema de Steiner em Grafos



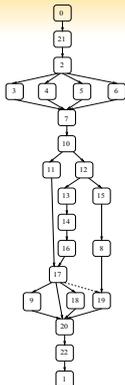
Notas

Ex. 3: World Wide Web



Notas

Grafos - Ex. 4: Escalonamento de Tarefas



Iteração do método do gradiente conjugado: instruções e suas dependências



Notas

Terminologia

- Laço : uma aresta associada ao par de vértices (v_i, v_i) ;
- Arestas paralelas : quando mais de uma aresta está associada ao mesmo par de vértices;
- Grafo simples : um grafo que não possui Laços e nem arestas paralelas;
- Vértices adjacentes : vértices que são os pontos finais de uma mesma aresta;
- Arestas adjacentes : arestas não paralelas que são adjacentes a um vértice comum;



Notas

Introdução Exemplos **Terminologia** Representação

Terminologia

Incidência : uma aresta é dita ser incidente a cada um de seus nós terminais.

Grau de um vértice : o grau de um vértice i , expressado por $d(i)$ indica número de arestas incidentes ao vértice, sendo que Laços contam 2. No exemplo abaixo temos que $d(4) = 5$.

UFPA

Teoria dos Grafos, BCC204

16 / 31

Notas

Introdução Exemplos **Terminologia** Representação

Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G .

$$\sum_{i=1}^n d(i) = 2m$$

Teorema

O número de vértices de grau ímpar em um GND é par.

UFPA

Teoria dos Grafos, BCC204

17 / 31

Notas

Introdução Exemplos **Terminologia** Representação

Terminologia

Grafo Completo : um grafo completo com n vértices, denominado K_n é um grafo simples contendo exatamente uma aresta para cada par de vértices distintos.

UFPA

Teoria dos Grafos, BCC204

18 / 31

Notas

Terminologia

Grafo regular : um grafo no qual todos os vértices possuem o mesmo grau.

Obs: qualquer grafo completo é regular.

Vértice isolado : um vértice com nenhuma aresta incidente;

Vértice pendente : vértice i com $d(i) = 1$;

Grafo nulo : grafo sem nenhuma aresta.

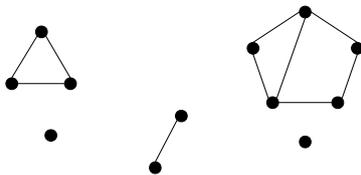


Notas

Terminologia

Grafo conexo : existe pelo menos um caminho entre todos os pares de vértices de G ;

Grafo desconexo : consiste de 2 ou mais grafos conexos é chamado de componente.



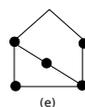
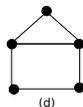
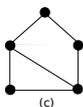
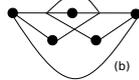
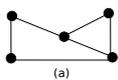
Um grafo desconexo com 5 componentes.



Notas

Exercício

Que grafo é diferente dos demais?



Notas

Introdução Exemplos Terminologia Representação

Isomorfismo

Dois grafos G e H são ditos isomorfos se existir uma correspondência um-para-um entre seus vértices e entre suas arestas, de maneira que as relações de incidência são preservadas.

Teoria dos Grafos, BCC204 22 / 31

Notas

Introdução Exemplos Terminologia Representação

Isomorfismo

- Condições necessárias mas não suficientes para que G e H sejam isomorfos:
 - mesmo número de vértices
 - mesmo número de arestas
 - mesmo número de componentes
 - mesmo número de vértices com o mesmo grau
- Exemplo:

Obs: Não existem algoritmos eficientes para determinar se dois grafos são isomorfos.

Teoria dos Grafos, BCC204 23 / 31

Notas

Introdução Exemplos Terminologia Representação

Exercícios

- Construa todos os grafos simples não isomorfos com 3 vértices.
- Os seguintes grafos são isomorfos?

(a)

(b)

Teoria dos Grafos, BCC204 24 / 31

Notas

Introdução Exemplos Terminologia Representação

cont.

(c)

(d)

Teoria dos Grafos, BCC204 25 / 31

Notas

Introdução Exemplos Terminologia Representação

Grafos Distintos

Total de Grafos Distintos com n vértices

$$2^{\frac{n^2-n}{2}}$$

A potência indica o número possível de arestas desse grafo.

Teoria dos Grafos, BCC204 26 / 31

Notas

Introdução Exemplos Terminologia Representação

Grafo Complementar

Definição

- Seja $G = (V, E)$ um grafo simples dirigido ou não-dirigido, o complemento de G , $C(G)$, é um grafo formado da seguinte maneira:
- Os vértices de $C(G)$ são todos os vértices de G
- As arestas de $C(G)$ são exatamente as arestas que faltam em G para formarmos um grafo completo

Exercícios:

- 1 Encontre um grafo com 5 vértices que seja isomorfo a seu complemento.
- 2 Qual o número de arestas de um grafo que é isomorfo a seu complemento?

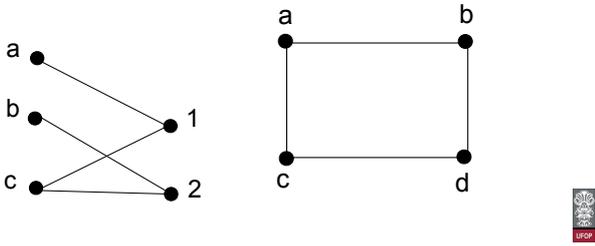
Teoria dos Grafos, BCC204 27 / 31

Notas

Grafo Bipartido

Definição

Um grafo é bipartido se o conjunto de vértices V pode ser particionado em 2 subconjuntos V_1 e V_2 tal que todas as arestas do grafo são incidentes a um vértice de V_1 e a um vértice de V_2



Notas

Exercícios

- Determine o número de vértices para os seguintes grafos:
 - G tem 9 arestas e todos os vértices têm grau 3
 - G é regular com 15 arestas
 - G tem 10 arestas com 2 vértices de grau 4 e todos os outros de grau 3
- Dê exemplo de um grafo simples com 8 vértices com os seguintes graus: 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, e 7
- Dê exemplo de um grafo conexo sem loops com 8 vértices com os seguintes graus: 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, e 7

Notas

Grafos - Representação Computacional

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Adjacências

$A_{n \times n}$, sendo que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se existe o arco } (v_i, v_j) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- simétrica para grafos não direcionados
- consulta existência de arco com um acesso à memória
- n^2 de espaço mesmo para grafos esparsos

Notas

Grafos - Representação Computacional

Lista de Adjacências

- $|V|$ listas
- lista de v_i contém todos os arcos de saída do mesmo, ou seja:
 $(v_i, v_j) \in A \quad \forall v_j \in V$



Notas

Notas

Notas
